

TIEA3810 Sovellettu predikaattilogiikka

Antti Valmari

Jyväskylän yliopisto
Informaatioteknologian tiedekunta

	Kurssilla käytettävä pseudokoodi	3
1	Johdanto	5
2	Peruskäsitteitä	8
3	Logiikkaa ilman kvanttoreita	34
4	Päättyoperaattorit	65
5	Esimerkki: mikä tietorakenne?	109
6	Kvanttorit	115
7	Lopuksi	130

Tämän esityksen käyttö opiskeluun ja opetukseen on sallittu seuraavin ehdoin:

- *on käytettävä aina uusinta saatavilla olevaa versiota*
 - *riittää ladata uusin versio lukukauden alussa*
- *esitystä ei anneta eteenpäin, vaan annetaan linkki siihen*
- *lähde on mainittava*

Esityksessä noudatetaan (tai ainakin melkein) seuraavia merkintätapoja

- **maaritelma** keskeinen käsite tai merkintä, kannattaa opiskella kunnolla
- *huomautus* muu (ainakin kurssin ajan) yleispätevä tärkeä asia
- **esimerkki** ei yleispätevä tai ei itsessään tärkeä, mutta havainnollistaa jotakin tärkeää
- toisarvoinen ei kuulu kurssiin tai vielä siihen kohtaan, mutta on mainittu esim. jotta ei annettaisi virheellistä kokonaiskuvaa
- **korostus** **korostus** **korostus** yksityiskohtien löytämisen helpottamiseksi esim. esimerkin sisällä

Kurssilla käytettävä pseudokoodi

Suunnittelussa on

- otettu huomioon, että luentosalin valkokangas on leveä ja matala
- vältetty merkintöjä, joilla on matematiikassa eri merkitys

Lauseen, lausekkeen tai ehdon laskeminen voi epäonnistua

- ohjelma jää ikuisen silmukkaan, kaatuu tai sekoaa
- ellei alla sanota toisin, osan epäonnistuminen johtaa kokonaisuuden epäonnistumiseen

$a :=$ lauseke

Muuttuja **a** saa arvokseen **lausekkeen** arvon.

if ehto then lauseita

Jos **ehto** on voimassa, niin suoritetaan **lauseita**.
Muussa tapauksessa mennään jatkoon tekemättä mitään.

**if ehto then lauseita1
else lauseita2**

Jos **ehto** on voimassa, niin suoritetaan **lauseita1**.
Muussa tapauksessa suoritetaan **lauseita2**.

**for $i :=$ ala to ylä do
lauseita**

Suoritetaan **lauseita** ensin **i** :n arvolla **ala**, sitten **$ala + 1$** , sitten **$ala + 2$** ja niin edelleen, niin kauan kuin **$i \leq$ ylä**. Sitten mennään jatkoon. Jos aluksi **$ala >$ ylä**, niin mennään jatkoon tekemättä mitään.

while ehto do lauseita	Jos ehto ei ole voimassa, niin mennään jatkoon. Muussa tapauksessa suoritetaan lauseita ja palataan kokeilemaan onko ehto voimassa. Jos ehto ei tule koskaan voimaan, niin lauseita suoritetaan uudelleen ja uudelleen loputtomasti.
lause1 ; lause2	Puolipiste helpottaa lukemista erottamalla samalla rivillä olevat lauseet toisistaan. Se ei vaikuta toimintaan.
return	Palataan aliohjelmasta.
return lauseke	Palataan aliohjelmasta ja palautetaan se tulos, jonka lauseke tuottaa.
ehto1 && ehto2	Lasketaan ehto1 . Jos se tuottaa T niin lasketaan ehto2 ja palautetaan sen tulos. Muussa tapauksessa palautetaan ehto1:n tulos. Epäonnistuu jos ja vain jos joko ehto1 epäonnistuu tai ehto1 tuottaa T ja ehto2 epäonnistuu.
ehto1 ehto2	Lasketaan ehto1 . Jos se tuottaa F niin lasketaan ehto2 ja palautetaan sen tulos. Muussa tapauksessa palautetaan ehto1:n tulos. Epäonnistuu jos ja vain jos joko ehto1 epäonnistuu tai ehto1 tuottaa F ja ehto2 epäonnistuu.
if -, for - ja while -lauseiden vaikutusalue osoitetaan sisentämällä.	

1 Johdanto

Kurssin tavoitteena on oppia täsmällistä ilmaisemista

- salliiko "hän ottaa teetä tai kahvia ja maitoa" teen ilman maitoa?
- kummassa alla kahdessa viimeisessä sanassa kaksi viimeistä kirjainta ovat samat?
 - saimme hyvää ruokaa
 - aluksi söin salaatin
- mitä taulukosta etsimisen pitää antaa tulokseksi, jos **x** ei esiinny tai esiintyy useasti?

```
1  i = 0;  
2  while( i < A.koko && A[i] != x ){ ++i; }
```

Kurssin tavoitteena on myös oppia pätevää päättelyä

- esim. mitkä seuraavista ovat pätevä?

korkeakoulu on yliopisto tai AMK
siellä on korkeakoulu
siellä on AMK

siellä ei ole yliopistoa

jos hän ei pidä mämmistä, niin hän pitää mämmistä

hän pitää mämmistä

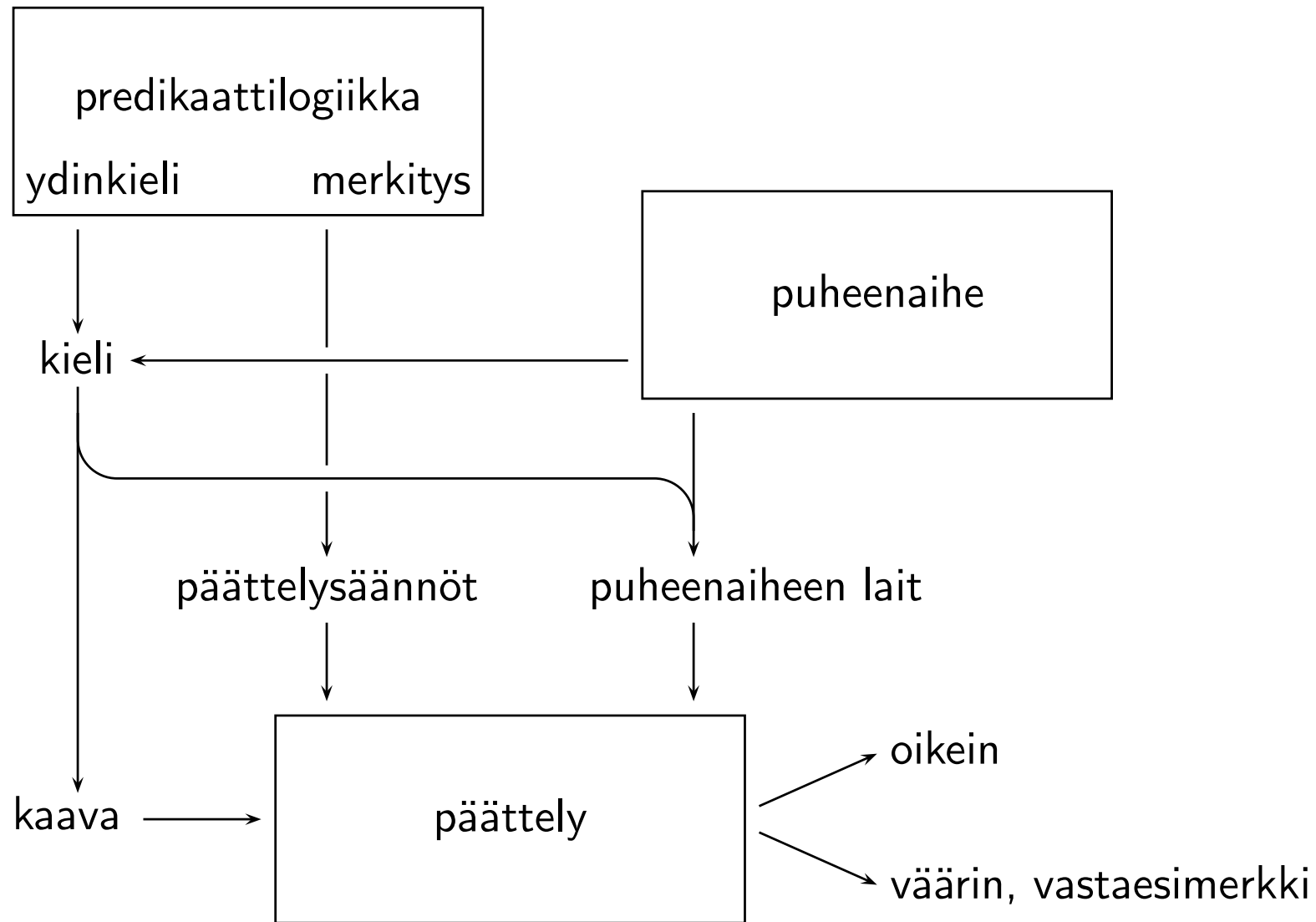
jos sataa, niin jään kotiin
ei sada

en jää kotiin

Taikaviitta on Aku
lines tietää, että Taikaviitta osaa lentää

lines tietää, että Aku osaa lentää

Predikaattilogiikan ja sen käyttämisen rakenne



Miten tämä kurssi poikkeaa muista logiikan kursseista

- pääpaino on yksinkertaisissa sovelluksissa tarvittavissa taidoissa, sovellusalueina mm.
 - tavallinen matematiikka
 - ohjelmointi
- aineistoa on muokattu tavoitteiden mukaisesti
 - kolmiarvoinen logiikka määrittelemättömien lausekkeiden käsittelemiseksi
 - $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ kaavojen välissä, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kaavojen sisällä

Muita lähteitä

- englanninkielisen Wikipedian logiikkasivut
 - enimmäkseen luotettavia
 - monin paikoin vaikeita lukea
 - merkintöjen yms. osalta eivät täysin johdonmukaisia
- suomenkielisen Wikipedian logiikkasivut eivät ole suositeltavia
- pätevältä vaikuttavia verkkokursseja
 - for all x: Calgary
 - Stanford Introduction to Logic
- Stanford Encyclopedia of Philosophy
 - erittäin luotettava
 - hyvin laajalti logiikan eri aiheita
 - pääsääntöisesti vaikea lukea

2 Peruskäsitteitä

Puheenaihe (domain of discourse)

- epätyhjä joukko (tai monta epätyhjää joukkoa)
- kokoelma merkintöjä
- kokoelma tosiasioita

Esimerkki: Suomen kaupungit

- $\{ \text{Akaa, Alajärvi, } \dots, \text{Joensuu, Jyväskylä, Jämsä, } \dots, \text{Äänekoski} \}$
- vakiosymboleita: $\text{Akaa}, \dots$
relaationsymboleita: $\text{Yliopisto}(\), \text{Rautatieasema}(\), \text{Naapuri}(\ , \), \dots$
- $\text{Yliopisto}(\text{Jyväskylä}), \neg \text{Yliopisto}(\text{Jämsä}), \text{Naapuri}(\text{Jyväskylä}, \text{Jämsä}),$
 $\forall x : \text{Yliopisto}(x) \rightarrow \text{Rautatieasema}(x), \dots$
- $(\neg, \rightarrow, \forall)$ jne. ei tarvitse oppia vielä, vaikka käytetään jo nyt esimerkeissä)

Esimerkki: reaaliluvut $\mathbb{R}$ (eli lukusuoran luvut)

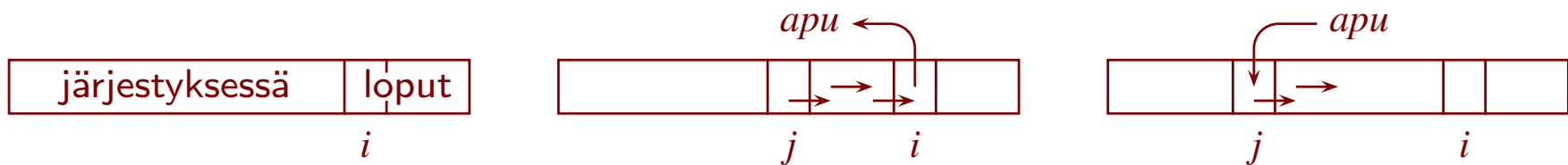
- arvoja on (ylinumeroituvasti) äärettömästi
- vakiosymboleita: $0, 3810, 1,44, \pi, \dots$
funktiosymboleita: $+, -, \cdot, \sqrt{\ }, \dots$
relaationsymboleita: $<, \leq, \dots$
- $\forall a : a + 0 = a, \forall a : \exists b : a + b = 0, \forall a : \forall b : \forall c : a < b \rightarrow a + c < b + c, \dots$

Esimerkki: INSERTION-SORTin toiminta

- taulukko A indeksoidaan $0, A.koko - 1$

```
INSERTIONSORT(&A)  
1  for  $i := 1$  to  $A.koko - 1$  do  
2       $apu := A[i] ; j := i$   
3      while  $j > 0 \ \&\& \ A[j-1].x > apu.x$  do  
4           $A[j] := A[j-1] ; j = j - 1$   
5       $A[j] := apu$ 
```

- predikaattilogiikkaa käytetään osana laajempaa ajattelutapaa
- esim. aina rivin 3 alussa pätee $0 \leq j \leq i < A.koko$, koska
 - riveillä 2, ..., 5 pätee $1 \leq i < A.koko$
 - j aloittaa arvosta i ja voi sen jälkeen vain pienentyä 1 kerrallaan
 - j :n pieneneminen loppuu viimeistään kun $j = 0$
- esim. aina rivin 1 alussa pätee $\forall k ; 1 \leq k < i : A[k-1] \leq A[k]$
 - tarkka päättely on pitkähkö, mutta perusidean voi havainnollistaa kuvilla



Yksi vai monta puheenaiheen joukkoa?

- esim. taulukon alkiot ja indeksit ovat usein eri tyyppiä
 - alkiot: esim. ihmisten nimiä
 - indeksit: kokonaislukuja
 - logiikan kannalta yhden ja monen puheenaiheen joukon ero on pinnallinen
- ⇒ logiikan opiskelussa on helpointa käyttää yhtä, silti sovelluksissa saa käyttää monta

Puheenaiheen valinta vaikuttaa siihen, mikä on totta / pätevää

- Torikatu on tärkeä joukkoliikennekatu on totta Oulussa mutta ei Jyväskylässä
- $p \leq 1 \vee p \geq 2$ on tosi jos puhutaan kokonaisluvuista (eli $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), mutta ei ole jos puhutaan reaaliluvuista (myös kokonaislukujen väliin jäävät luvut)
- jos $p > 1$ niin $p \geq 2$ on pätevää jos puhutaan kokonaisluvuista, mutta ei ole jos puhutaan reaaliluvuista

Lauseke (expression, term)

- tietynlainen ilmaus, joka tuottaa alkion puheenaiheen jostakin joukosta — tai ei tuota!

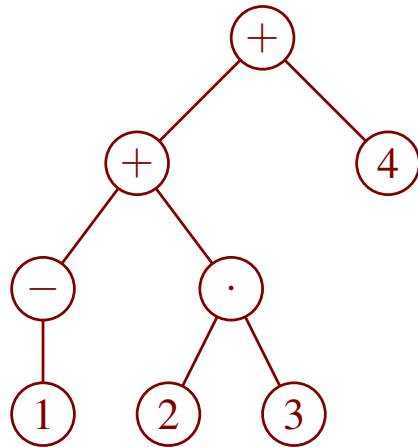
• esim.	kun x on	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
	lauseke $\frac{x-2}{x}$ tuottaa	...	$\frac{5}{3}$	2	3	ei arvoa	-1	0	$\frac{1}{3}$	...

- voi sisältää vakioita, (puheenaiheen) muuttujia ja funktioita
 - vakio sisältää kiinteän arvon ja muuttuja (mahdollisesti tuntemattoman tai vaihtuvan) arvon puheenaiheen jostakin joukosta
 - funktio on laskutoimitus tms. joka ottaa arvon jostakin tai arvoja joistakin puheenaiheen joukoista ja tuottaa arvon puheenaiheen jostakin joukosta
 - käsittelemme niitä perusteellisemmin ruudusta 23 alkaen
- lisäksi voi olla sulkeita "(" ja ")" ilmaisemassa lausekkeen rakennetta
- lausekkeen tarkka rakenne riippuu puheenaiheesta
⇒ tässä ei kannata yrittää määritellä tämän tarkemmin
- logiikassa on tapana käyttää sanaa "term" ja muualla "expression"

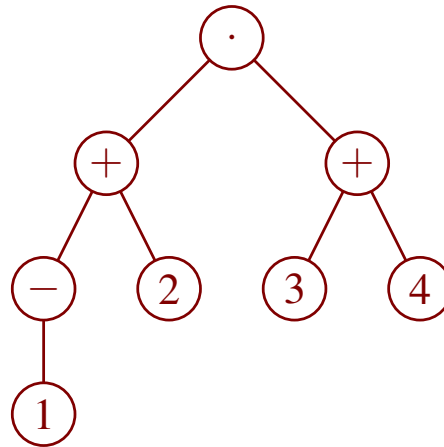
Lausekepuu (expression tree)

- lauseke on tekstuaalinen keino ilmaista puumainen rakenne

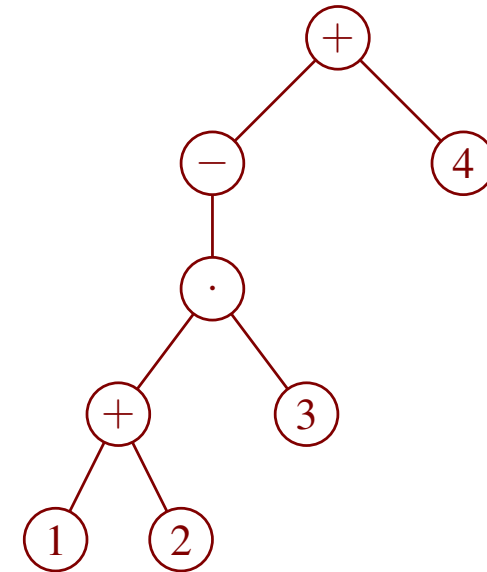
$$-1 + 2 \cdot 3 + 4$$



$$(-1 + 2) \cdot (3 + 4)$$

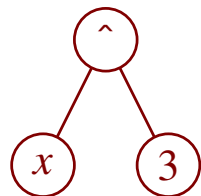


$$-((1 + 2) \cdot 3) + 4$$

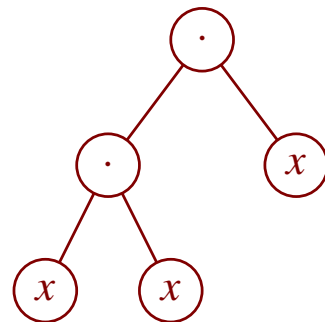


- lauseke on eri asia kuin lausekkeen merkitys

$$x^3$$



$$x \cdot x \cdot x$$



Lausekepuu on eri asia kuin lausekkeen tuottama arvo

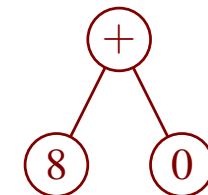
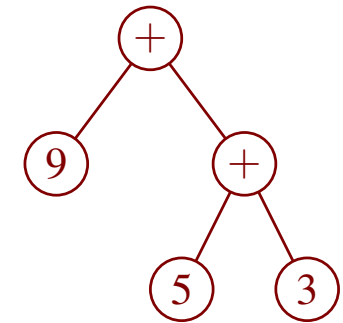
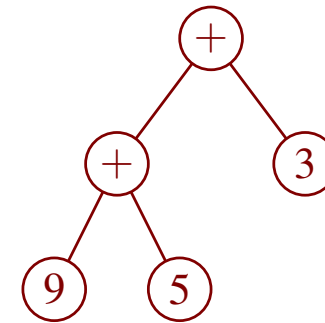
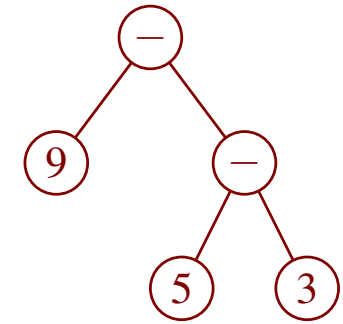
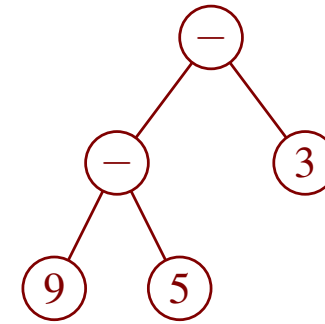
- $(9 - 5) - 3 = 4 - 3 = 1$ mutta
 $9 - (5 - 3) = 9 - 2 = 7 \neq 1$

⇒ lausekkeet $(9 - 5) - 3$ ja $9 - (5 - 3)$ tuottavat eri arvon, ja siksi niillä on välttämättä eri rakenne

- lausekkeet $(9 + 5) + 3$ ja $9 + (5 + 3)$ tuottavat saman arvon, mutta niillä on silti eri rakenne

⇒ niitä vastaavat lausekepuut ovat erit, vaikka ne tuottavat saman arvon

- myös lausekkeet 8 ja $8 + 0$ tuottavat saman arvon, vaikka niillä on eri rakenne (ja eri lausekepuut)



Lausekepuu ottaa kantaa vain lausekkeen rakenteeseen, ei merkitykseen eikä arvoon

- $+$ ja $-$ ovat sille eri symboleita
- se ei välitä mitä ne tarkoittavat

⇒ se ei "tiedä" että $(9 + 5) + 3 = 9 + (5 + 3)$, eikä piittaa siitä

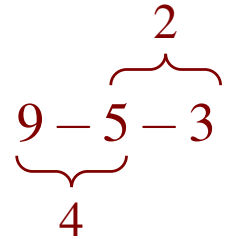
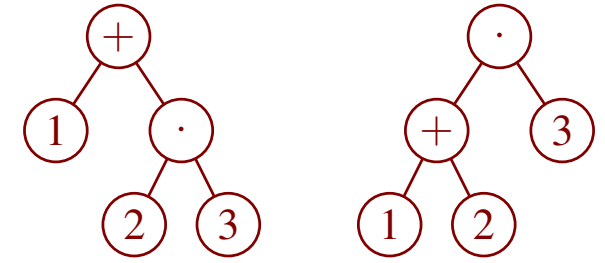
- samoilla lausekepuilla on välttämättä sama merkitys, mutta eri lausekepuilla voi olla sama tai eri merkitys

Lauseke ilman sulkeita tuottaa yleensä saman lausekepuun kuin jokin sen sulutettu versio

- $9 - 5 + 3$ tuottaa saman lausekepuun kuin $(9 - 5) + 3$
- $9 + 5 + 3$ tuottaa saman lausekepuun kuin $(9 + 5) + 3$
- $9 + 5 + 3$ tuottaa eri lausekepuun kuin $9 + (5 + 3)$, vaikka ne tuottavat saman arvon

Koulumatematiikan sääntöjä, kun sulkeet eivät määrää toisin

- kertolasku lasketaan ennen yhteen- ja vähennyslaskua
 - lausekkeilla $1 + 2 \cdot 3$ ja $1 + (2 \cdot 3)$ on sama lausekepuu, joka on eri kuin lausekkeen $(1 + 2) \cdot 3$ lausekepuu
- etumerkki lasketaan ennen yhteen- ja vähennyslaskua
 - $-2 + 3 = (-2) + 3 = 1 \neq -(2 + 3) = -5$
- potenssilasku lasketaan ennen edellä mainittuja
 - $-3^2 = -(3^2) = -9 \neq (-3)^2 = 9$ ja $3x^2 = 3(x^2)$ eri kuin $(3x)^2 = 9x^2$
- samantarvoiset lasketaan vasemmalta oikealle, paitsi potenssilasku
 - $9 - 5 - 3$ ei ole sama kuin $9 - (5 - 3) = 9 - 2 = 7$
vaan sama kuin $(9 - 5) - 3 = 4 - 3 = 1$
 - 2^{1^3} on sama kuin $2^{(1^3)} = 2^1 = 2$ eikä sama kuin $(2^1)^3 = 2^3 = 8$
- laskujärjestyksen ilmaisemiseen käytetään myös vaakaviivoja ja yläindeksiä
 - esim. $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 - esim. $b^2 - 4ac$ ei tarkoita samaa kuin $b^{2-4a}c$
- funktiosymboleiden tapauksessa hyvin määriteltynä johdonmukaisia sääntöjä ei ole
 - esim. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ tarkoittaa $\sin(2x) = 2(\sin x) \cos x$
 - tarkoittaako $\log(x+1)x$ samaa kuin $\log((x+1)x)$ vai samaa kuin $(\log(x+1))x$?

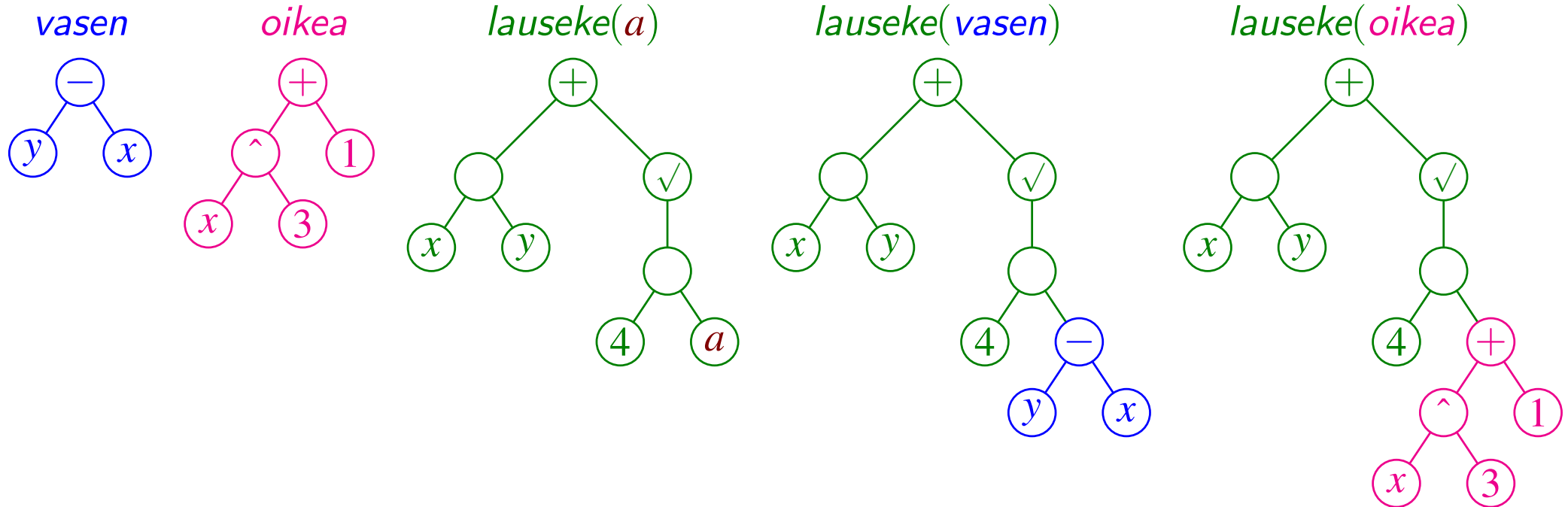


Merkinnöillä $lauseke(x,y)$ ja $lauseke(vasen,oikea)$ esitetään lausekkeiden $vasen$ ja $oikea$ sijoittaminen muuttujien x ja y tilalle lausekkeessa $lauseke$

- kun lauseke sijoitetaan muuttujan tilalle, saattaa olla tarpeen lisätä $sulkeet$ tai $\cdot$
 - jos $lauseke(x,y)$ on $x^2 - 3y$ ja $vasen$ on $5b$ ja $oikea$ on 6 ,
niin $lauseke(vasen,oikea)$ on $(5b)^2 - 3 \cdot 6$
- jos on epävarma tarvitaanko sulkeita, ne voi lisätä varmuuden vuoksi
 - esim. jos $lauseke(x)$ on $1 + x$ ja $vasen$ on 3 , niin saa kirjoittaa $1 + (3)$
- sijoitus tehdään muuttujan jokaiseen esiintymään lausekkeessa
 - jos $lauseke(x,y)$ on $x^2 - 2xy$ ja $vasen$ on $x + 1$ ja $oikea$ on 6 ,
niin $lauseke(vasen,oikea)$ on $(x + 1)^2 - 2(x + 1) \cdot 6$
- merkintä $lauseke(x)$ ei takaa, että x esiintyy $lauseke$:ssa
- merkinnässä $lauseke(x,y)$ ei välttämättä näytetä sulkeissa kaikkia muuttujia
 - asian kannalta tarpeettomat muuttujat vievät tilaa ja häiritsevät lukemista

Esimerkki kahdesta eri sijoituksesta lausekepuiden avulla

- *vasen* on $y - x$, *oikea* on $x^3 + 1$ ja $lauseke(a) = xy + \sqrt{4a}$
 $\Rightarrow$ $lauseke(vasen)$ on $xy + \sqrt{4(y-x)}$ ja $lauseke(oikea)$ on $xy + \sqrt{4(x^3 + 1)}$



Määritelmä (definition) tarkoittaa ilmausta, joka kertoo jonkin symbolin tai ilmauksen merkityksen

- esim. *pääkaupunki* tarkoittaa sitä kaupunkia, jossa ylimmät hallintoelimet sijaitsevat
- esim. $\sqrt{x}$ tarkoittaa (ainoaa) ei-negatiivista reaalilukua, jolle pätee $(\sqrt{x})^2 = x$

Ohjelmoinnissa, matematiikassa ja arjessa esiintyy myös **määrittelemättömiä (undefined)** lausekkeita

- lausekkeita, joille ei haluta tai ei ole järkevästi mahdollista antaa arvoa
- esim. kun $x < 0$, niin ei ole olemassa sellaista reaalilukua y , että $y^2 = x$

Tyypilliset sellaisia sisältävät (atomiset) väitteet eivät ole tosia ...

- esim. `olio = null; if( olio.kenttä == 0 ){ ... }`
- esim. `ohjelmanpätkän i=0; while(true){i=1;} return i;` palauttama arvo on 1
- esim. $-\frac{1}{0} < \frac{1}{0}$
- esim. Suomen kuningatar antoi tulipalon sammuttajalle urhoollisuusmitalin

... mutta myöskään "ei" luonnollisessa kohdassa ei tee niistä tosia

- esim. `olio = null; if( olio.kenttä != 0 ){ ... }`
- esim. `ohjelmanpätkän i=0; while(true){i=1;} return i;` palauttama arvo ei ole 1
- esim. $-\frac{1}{0} \geq \frac{1}{0}$
- esim. Suomen kuningatar ei antanut tulipalon sammuttajalle urhoollisuusmitalia

Tällä kurssilla on käytössä kolme **totuusarvoa** (**truth value**):

T	tosi	true	} 2-arvologiikka (2-valued logic)	} 3-arvologiikka (3-valued logic)
F	epätosi	false		
U	määrittelemätön	undefined		

- **U** sopii totuusarvoksi, kun väite ei ole tosi eikä "ei" muuta sitä todeksi
- nimestään huolimatta **U** on totuusarvo eikä "totuusarvoa ei ole"
- 2-arvologiikkaa saa ja kannattaa käyttää, kun käytössä ei ole
 - mitään laskutoimitusta tms., joka voi jättää tuottamatta tuloksen, eikä
 - propositionmuuttujaa tai -vakiota, joka voi tuottaa **U**
- 2-arvologiikka riittää esim. kun käytössä on vain yhteen-, vähennys- ja kertolasku
 - ei jakolaskua, neliöjuurta, ...

Huomaa!

- 3-arvologiikassa "ei ole tosi" ei ole sama kuin "on epätosi"
- se on sama kuin "on epätosi tai määrittelemätön"
- vertaa
 - ei ole niin, että Suomen kuningatar antoi tulipalon sammuttajalle urhoollisuusmitalin
 - Suomen kuningatar ei antanut tulipalon sammuttajalle urhoollisuusmitalia

Propositiomuuttuja (propositional variable)

- symboli, joka saa (mahdollisesti tilanteesta riippuvan) totuusarvon
 - jos käytetään 2-arvologiikkaa, niin **F** tai **T**
 - jos käytetään 3-arvologiikkaa, niin **F**, **U** tai **T**
- esim. *sataa*, *tuulee*, *otan_kahvia*, *otan_teetä*, *lisään_maitoa*, *lisään_sokeria*
- pitkät nimet ovat hankalia isoissa kaavoissa ja harjoitusohjelman syötteissä
 - kirjoitatko vastaukseksi mieluummin

otan_kahvia /\ lisään_maitoa \/ otan_teetä /\ !lisään_maitoa
vai *K /\ M \/ T /\ !M* ?

⇒ propositiomuuttujina käytetään usein isoja kirjaimia (mahdollisesti alaindeksillä tms.)

- erityisesti P , Q , R , P' , P_1 , P_2 , P_i , ...

- huomaa
 - **F**, **T** ja **U** ovat totuusarvoja
 - F , T ja U ovat propositiomuuttujia

Ellei asiayhteydestä muuta seuraa, "muuttuja" ilman etuliitettä "propositio" ei tarkoita propositiomuuttujaa, vaan puheenaiheen muuttujaa

Kaava (formula)

- tietynlainen ilmaus, joka tuottaa totuusarvon

• esim.	kun x on	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
	kaava $\frac{x-2}{x} \leq 0$ tuottaa	...	F	F	F	U	T	T	F	...

- yksinkertaisimmillaan kaava on **atomikaava** (**atomic formula**) eli jokin seuraavista:
 - **T**, **F** tai **U**
 - propositiomuuttuja
 - lauseke1 = lauseke2 tai lauseke1 $\neq$ lauseke2
 - puheenaiheesta riippuvan relaationsymbolin käyttö, esim.
lauseke1 < lauseke2, Yliopisto(lauseke) tai Naapuri(lauseke1, lauseke2)
- kaavoista voi muodostaa isompia seuraavasti:
 - käsittelemme niitä perusteellisesti luvusta 3 alkaen

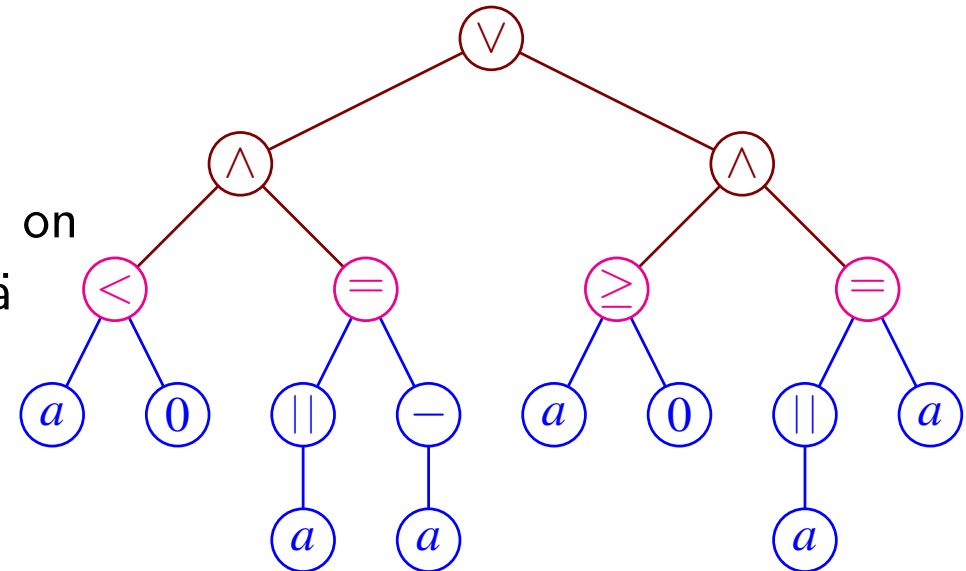
$\neg$ kaava	ei	kaava1 $\rightarrow$ kaava2	(ei kaava1) tai kaava2
kaava1 $\wedge$ kaava2	ja	kaava1 $\leftrightarrow$ kaava2	molemmat tai ei kumpikaan
kaava1 $\vee$ kaava2	tai	$\forall$ muuttuja: kaava	jokaisella
	puheenaiheen	$\exists$ muuttuja: kaava	jollakin

- lisäksi voi olla sulkeita "(" ja ")" ilmaisemassa kaavan rakennetta

Esimerkki: itseisarvon määritelmä

Jokaisella reaaliluvulla a pätee $a < 0 \wedge |a| = -a \vee a \geq 0 \wedge |a| = a$.

- tarkoittaa samaa kuin että
 - jos $a \geq 0$ niin $|a| = a$, ja
 - jos $a < 0$ niin $|a| = -a$
- kaavassa $a < 0 \wedge |a| = -a \vee a \geq 0 \wedge |a| = a$ on
 - 1 vakiosymboli: 0 , yhteensä 2 esiintymää
 - 1 muuttujasymboli: a , yhteensä 6 esiintymää
 - 2 eri yksipaikkaista funktiosymbolia: $|$ ja $-$, yhteensä 3 esiintymää
 - 4 eri lauseketta: a , 0 , $|a|$, ja $-a$, yhteensä 11 esiintymää
 - 3 eri relaatioymbolia: $<$, $=$ ja $\geq$, yhteensä 4 esiintymää
 - 4 eri atomikaavaa: $a < 0$, $|a| = -a$, $a \geq 0$ ja $|a| = a$
 - 3 eri muuta kaavaa: $a < 0 \wedge |a| = -a$, $a \geq 0 \wedge |a| = a$ ja koko alkuperäinen kaava



Vakiosymboli (**constant symbol**) on puheenaiheen joukon alkiolle annettu nimi

- katso esimerkkejä edeltä
 - myös 0, 3810, 1,44, ... katsotaan nimiksi
- jokaisella alkiolla ei välttämättä ole nimeä
 - esim. reaalityyppi on enemmän kuin missään kirjoitusjärjestelmässä on nimiä
- vakiosymbolin arvo ei muutu yksittäisen pohdinnan aikana, mutta voi olla erisuuri eri pohdinnoissa
 - esim. Suomen presidentti on tarkoittanut eri aikoina eri ihmistä
 - tällä hetkellä pätee Suomen presidentti = Alexander Stubb
- vakion arvo (**value**) on se puheenaiheen joukon alkio, jota vakio edustaa
- vakiosymbolin ja sen edustaman arvon ero on samankaltainen kuin seuraavassa:
 - esim. mihin talvi loppuu?
 - symboli "talvi" loppuu ii-kirjaimeen
 - vuodenaika "talvi" loppuu, kun vuorokauden keskilämpötila nousee pysyvämmiin 0 asteen yläpuolelle [<https://www.ilmatieteenlaitos.fi/termiset-vuodenajat>]
- kun ei ole tarpeen korostaa, että tarkoitetaan nimeä eikä sen edustamaa arvoa, voidaan sanoa lyhyemmin "vakio"

Puheenaiheen **muuttuja** (variable)

- muuttuja sisältää arvon, joka saa vaihdella yksittäisen pohdinnan aikana
 - nytkin arvo on puheenaiheen joukon alkio (määrittelemätön ei kelpaa)
- esim. **siinä** kaupungissa on yliopisto:
 - **tosi**: Jyväskylä, Rovaniemi, ...
 - **epätosi**: Jämsä, Vantaa, ...
- esim. **hän** on tai on ollut Suomen presidentti:
 - **tosi**: Alexander Stubb, Tarja Halonen, ...
 - **epätosi**: Minna Canth, Jean Sibelius, ...
- esim. $x^2 - 5x + 6 = 0$



- esim. x :n **jossakin** naapurikaupungissa on yliopisto: $\exists y : \text{Naapuri}(x, y) \wedge \text{Yliopisto}(y)$
 - **tosi**: Jämsä, Helsinki, ...
 - **epätosi**: Jyväskylä, Äänekoski, ...
- esim. **jokaissa** kaupungissa, jossa on yliopisto, on myös rautatieasema
 - $\forall x : \text{Yliopisto}(x) \rightarrow \text{Rautatieasema}(x)$
 - **tosi** (siis ei **tosi**: esim.1, esim.2, ... vaan pelkkä **tosi**, koska tässä kaavassa ei ole **muuttujaa**, jonka arvosta kaavan totuusarvo voisi riippua)

Vapaa (free) ja sidottu (bound) muuttujan x esiintymä

- vapaa x : ei edusta "jokainen" tai "joku" / ei ole minkään $\forall x$: eikä $\exists x$: vaikutuspiirissä
- sidottu: vapaan vastakohta
- esim. x on vapaa ja y on sidottu kaavassa $\exists y : \text{Naapuri}(x, y) \wedge \text{Yliopisto}(y)$
 - sen kaupungin jossakin naapurikaupungissa on yliopisto

Avoim (open) ja suljettu (closed) kaava

- avoin: sisältää ainakin yhden muuttujan vapaan esiintymän tai propositionumuuttujan
suljettu: avoimen vastakohta
- tällä kurssilla käsitteitä "avoin" ja "suljettu" voidaan soveltaa myös luonnollisella kielellä esitettyihin väittämiin
- monen, mutta ei jokaisen, avoimen kaavan tai väittämän totuusarvo riippuu vapaiden muuttujien arvoista ja/tai propositionumuuttujien totuusarvoista
 - esim. $\text{hän on Suomen presidentti}$ on avoin väittämä, jonka totuusarvo riippuu siitä, kuka on "hän"
 - esim. $\text{siellä on yliopisto mutta ei rautatieasemaa}$ on aina epätosi avoin väittämä
- suljetulla kaavalla / väittämällä on kiinteä totuusarvo
 - tosi, epätosi tai määrittelemätön
 - esim. $\text{kukaan ei ole Suomen presidentti}$ on epätosi suljettu väittämä
 - esim. $\forall x : \text{Yliopisto}(x) \rightarrow \text{Rautatieasema}(x)$ on tosi suljettu kaava
 - esim. $\forall x : \text{Rautatieasema}(x) \rightarrow \text{Yliopisto}(x)$ on epätosi suljettu kaava

Muuttujasymboli (variable symbol)

- muuttujasymboli on muuttujan nimi
- kun $\forall$ ja $\exists$ ovat käytössä, voi usealla eri muuttujalla olla sama nimi
 - vertaa ohjelmointi: seuraava tulostaa 1 2 3 8 6

```
1  #include <iostream>
2  int i = 6;
3  void hupsis( int i ){
4      for( unsigned i = 1; i <= 3; ++i ){ std::cout << ' ' << i; }
5      std::cout << ' ' << i;
6  }
7  int main(){ hupsis(8); std::cout << ' ' << i << '\n'; }
```

Funktio (function) ja funktiosymboli (function symbol) logiikassa

- ottaa yhden tai useamman puheenaiheen jonkin joukon alkion, ja tuottaa puheenaiheen jonkin joukon alkion
- esimerkkejä
 - $+$ (yhteenlasku) ottaa kaksi lukua ja tuottaa luvun
 - **asukasluku** ottaa kaupungin ja tuottaa sen asukkaiden lukumäärän
 - **etäisyys** ottaa kaksi kaupunkia ja tuottaa luvun
 - **henkilötunnus** ottaa ihmisen ja tuottaa tietynlaisen merkkijonon
- funktioksi kelpaa myös sellainen, joka tuottaa aina saman alkion
 - esim. **0x** tuottaa aina nollan
- funktiosymboli on funktion nimi
- sama funktio ottaa aina saman määrän alkioita
 - ⇒ etumerkki- $-$ ja vähennyslasku- $-$ edustavat eri funktioita
- usein sanotaan, että funktion nimi on otettujen alkioden funktio
 - esim. **asukasluku on kaupungin funktio**
 - esim. **ihmisen ikä on hänen syntymähetkensä ja nykyhetken funktio**
- funktioiden määrittelemiseen voidaan käyttää eri keinoja
- toisin kuin ohjelmoinnissa, sana "funktio" ei kata määritelmän sisältöä, vaan vain määritelmällä tuotettua funktion parametrien ja tuloksen välistä riippuvuutta

Esimerkiksi seuraavat määrittelevät saman funktion kokonaisluvuilta kokonaisluville

- | n | alle 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | yli 10 |
|-----------|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------|
| $hups(n)$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | -2 |

- $hups(n)$ on se m , jolle pätee
 $n \leq m = -1 \vee (0 \leq n \leq 10 \wedge 0 \leq m \leq 2 \wedge \exists k : n = m + 3k) \vee n > 10 = -5m$
- ```
int hups(int n){ return n < 0 ? -1 : n > 10 ? -2 : n % 3; }
```
- ```
int hups( int n ){
    if( n > 10 ){ return -2; }
    if( n < 0 ){ return -1; }
    while( n >= 3 ){ n -= 3; }
    return n;
}
```

Funktion **argumentti** (**argument**) ja **parametri** (**parameter**)

- argumentti** on se, mikä annetaan funktiolle sitä käytettäessä
 - esim. edellisen esimerkin funktiolle pätee $hups(7) = 1$
 - sitä voidaan kutsua myös $hups(3i + 2)$, $hups(n^2 - 7k)$, ...
- parametri** on argumentin arvosta funktion määritelmässä käytettävä nimi
 - edellä olleen esimerkin n ja n

Osittainen funktio (partial function)

- muuten kuten funktio, mutta saa jättää tuottamatta tuloksen
- esimerkkejä
 - jakolasku ei tuota tulosta, kun jakaja on 0
 - $\text{puoliso}(x)$ ei tuota tulosta, jos henkilöllä x ei ole puolisoa
 - $\text{kuningatar}(x)$ ei tuota tulosta, jos valtiolla ei ole kuningatarta
 - $A[i]$ ei tuota tulosta, kun i on liian suuri
 - seuraava ei tuota tulosta kun i on pariton (jää ikuisen silmukkaan):
if $i < 0$ **then** $i := -i$
while $i \neq 0$ **do** $i := i - 2$
return i
- jokainen funktio on samalla osittainen funktio
 - saa jättää tuottamatta tuloksen

Lauseke edustaa osittaista funktiota joistakin puheenaiheen joukoista jollekin puheenaiheen joukolle

- monta eri lauseketta voi esittää samaa (osittaista) funktiota
 - esim. $(a+b)(a-b)$ $aa - ab + ba - bb$ $a^2 - b^2$ $5 - b^2 + 3 + aa - 8$
 - mutta $\frac{x}{x}$ ja 1 esittävät eri osittaisia funktioita:
kun $x = 0$, on toinen määrittelemätön ja toinen tuottaa 1
- on paljon funktioita, joita ei voi esittää lausekkeina

Seuraava käytäntö on osoittautunut hyväksi, tällä kurssilla noudatamme sitä:

Jos (osittaisen) funktion ainakin yksi argumentti on määrittelemätön, niin myös (osittaisen) funktion tulos on määrittelemätön.

- esim. $\text{syntymävuosi}(\text{kuningatar}(\text{Tanska}))$ on määritelty
- esim. $\text{syntymävuosi}(\text{kuningatar}(\text{Suomi}))$ ei ole määritelty
- tätä voidaan tarvittaessa kiertää, mutta ei mennä siihen (ainakaan vielä)
- käytännöstä seuraa, että määrittelemätön osuus lausekkeen sisällä tekee koko lausekkeesta määrittelemättömän
 - esim. kun $y < 0$, koska $\sqrt{y}$ on määrittelemätön, myös mm. seuraavat ovat:
 $-1 + \sqrt{y}$ $\frac{y+1}{-1+\sqrt{y}}$ $x \frac{y+1}{-1+\sqrt{y}}$ $x \frac{y+1}{-1+\sqrt{y}} + 2y^3$ $\log(x \frac{y+1}{-1+\sqrt{y}} + 2y^3)$

Osittainenkaan funktio ei voi tuottaa monta tulosta

- esim. $\text{hänen lapsensa valmistui Jyväskylän yliopistosta}$
 - henkilöllä voi olla monta lasta $\Rightarrow$ "h:n lapsi" ei voi esittää osittaisena funktiona
- esimerkki voidaan esittää muodossa
 $\text{on olemassa henkilö, joka on hänen lapsensa ja valmistui Jyväskylän yliopistosta}$
 $\exists l : \text{Lapsi}(l, h) \wedge \text{Valmistui_Jyväskylän_yliopistosta}(l)$
- "hän on hänen lapsensa" voi esittää seuraavaksi esiteltävän käsitteen avulla

Relaationsymboli (relation symbol)

- ottaa yhden tai useamman lausekkeen ja tuottaa totuusarvon
- sama relaatio ottaa aina saman määrän lausekkeita
- jokaisessa puheenaiheessa on käytettävissä $=$ ja $\neq$
 - ottavat kaksi lauseketta
- monilla puheenaiheilla on lisäksi omia relaationsymboleitaan
 - ihmisten maailmassa esim. $\text{Lapsi}(l, v)$ l on v :n lapsi
 - ihmisten maailmassa esim. $\text{Lapsi}(l, v_1, v_2)$ l on v_1 :n ja v_2 :n lapsi
 - ihmisten maailmassa esim. $\text{On_opiskelija}(x)$
 - luonnollisilla, kokonais- ja reaaliluvuilla on $<$, $\leq$, $\geq$ ja $>$
 - joukko-opissa on mm. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ja $\not\subseteq$
- myös seuraava käytäntö on osoittautunut hyväksi, tällä kurssilla noudatamme sitä:

Relaationsymbolin tulos on **U** jos ja vain jos ainakin yksi argumentti on määrittelemätön.

- esim. kun $x = 0$, jokainen seuraavista tuottaa **U**:

$$\frac{1}{x} = 0 \quad \frac{1}{x} \neq 0 \quad \frac{1}{x} > 0 \quad \frac{1}{x} \leq 0 \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} \neq \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Tutuilla vakio-, funktio- ja relaationsymboleilla on tällä kurssilla niiden tutut merkitykset aina kun ei erikseen toisin sanota.

Avoin kaava edustaa matematiikan näkökulmasta funktiota

- ottaa kuhunkin vapaaseen muuttujaan arvon jostakin puheenaiheen joukosta
- ottaa kuhunkin propositiomuuttujaan arvon joukosta $\{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}$ tai $\{\mathbf{F}, \mathbf{U}, \mathbf{T}\}$
- tuottaa arvon joukosta $\{\mathbf{F}, \mathbf{T}\}$ tai $\{\mathbf{F}, \mathbf{U}, \mathbf{T}\}$
- sekaannusten välttämiseksi sitä ei yleensä kutsuta funktioksi
- monta eri kaavaa voi edustaa samaa totuusarvon tuottavaa funktiota
 - esimerkkejä: $x+1 < 3$ $1+x < 3$ $3 > x+1$ $x < 2$ $\neg(x+1 \geq 3)$

(Epä)yhtälö(ryhmän) ratkaiseminen tarkoittaa helppotajuisen kaavan etsimistä, joka edustaa "melkein samaa" funktiota totuusarvoille kuin alkuperäinen kaava

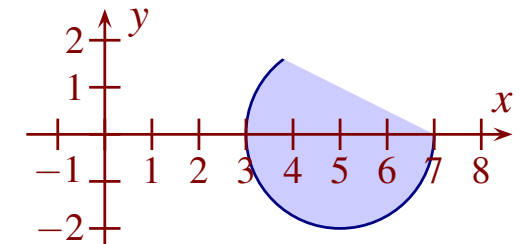
- kun alkuperäinen tuottaa $\mathbf{T}$, pitää löydetyn kaavan tuottaa $\mathbf{T}$
- kun alkuperäinen tuottaa $\mathbf{F}$ tai $\mathbf{U}$, pitää löydetyn kaavan tuottaa $\mathbf{F}$
- esim. $x^2 + 3x = 10$ jos ja vain jos $x = -5 \vee x = 2$
- esim. $x^2 + 3x < 10$ jos ja vain jos $-5 < x \wedge x < 2$ jos ja vain jos $-5 < x < 2$
- esim. $2x + 3y = 6 \wedge y - x = 7$ jos ja vain jos $x = -3 \wedge y = 4$
- esim. $\frac{x-2}{x} \leq 0$ jos ja vain jos $0 < x \leq 2$
 - kun $x = 0$, $\frac{x-2}{x} \leq 0$ tuottaa $\mathbf{U}$ ja $0 < x \leq 2$ tuottaa $\mathbf{F}$

Pikaesittely: **propositiologiikka** (**propositional logic**)

- propositiovakio on totuusarvon saava vakio
 - propositiovakion arvo ei voi muuttua (tarkasteltavassa joukossa tilanteita)
- propositiomuuttuja on totuusarvon saava muuttuja
 - propositiomuuttujan arvo voi muuttua, tai ainakaan ei haluta korostaa, että ei voi
- **propositio** (**proposition**) on propositiovakio tai propositiomuuttuja
- esim. "Jyväskylä on Suomessa" on tosi propositiovakio
- esim. "sataa" on propositiomuuttuja; se on toisinaan tosi ja toisinaan epätosi
- propositiologiikan kaavat muodostuvat propositioista ja symboleista $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ (ja sulkeista)

Pikaesittely: **predikaattilogiikka** (**predicate logic**)

- propositioiden tilalla saa käyttää relaatioita
 - esim. lukuja tuottavien lausekkeiden vertailuja
 - esim. $x^2 + y^2 \leq 10x - 21 \wedge x + 2y < 7$
- puheenaiheen muuttujien käsittelemiseksi on symbolit $\forall$ ja $\exists$
 - niihin syvennyttään luvussa 6, vaikka käytetään ajoittain kevyesti sitä ennenkin



Kaavoja voi verrata symboleilla $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ja $\equiv$

- niihin keskitytään luvussa 4, mutta $\equiv$ esitellään jo luvussa 3

3 Logiikkaa ilman kvanttoreita

" $\wedge$ " tarkoittaa "ja"

- $vasen \wedge oikea$ on tosi jos ja vain jos sekä $vasen$ että $oikea$ on tosi
- $vasen \wedge oikea$ on epätosi jos ja vain jos $vasen$ tai $oikea$ tai molemmat on epätosi
- $vasen \wedge oikea$ on muulloin määrittelemätön
 - jompikumpi on määrittelemätön, ja jäljelle jäävä on tosi tai määrittelemätön
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\wedge$ (Oslo on Tanskassa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\wedge$ (Oslo on Norjassa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\wedge$ (Oslo on Norjassa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\wedge$ (Oslo on Tanskassa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\wedge$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\wedge$ (Ankkalinnassa on USAssa) on epätosi
- esim. (Ankkalinnassa on USAssa) $\wedge$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön

$\wedge$	F	U	T
F			
U			
T			T

$\wedge$	F	U	T
F	F	F	F
U	F		
T	F		T

$\wedge$	F	U	T
F	F	F	F
U	F	U	U
T	F	U	T

"Muulloin"-tapauksen epämuodollinen johtaminen muista tapauksista purettuna auki

- olkoot

- 1 ei (sekä *vasen* että *oikea* on tosi)
- 2 ei (*vasen* tai *oikea* tai molemmat on epätosi)
- 3 jompikumpi on määrittelemätön
- 4 jäljelle jäävä on tosi tai määrittelemätön

- jos 1 ja 2, niin 3 ja 4

- | | |
|---|------|
| 5 kumpikaan ei ole epätosi | 2 |
| 6 jompikumpi ei ole tosi | 1 |
| 7 jompikumpi ei ole epätosi eikä tosi | 5, 6 |
| 8 jompikumpi on määrittelemätön (eli 3) | 7 |
| 9 jäljelle jäävä ei ole epätosi | 5 |
| 10 jäljelle jäävä on tosi tai määrittelemätön (eli 4) | 9 |

- jos 3 ja 4, niin 1 ja 2

- | | |
|--|--------|
| 11 ei (sekä <i>vasen</i> että <i>oikea</i> on tosi) (eli 1) | 3 |
| 12 jompikumpi on tosi tai määrittelemätön | 3 |
| 13 <i>vasen</i> on tosi tai määrittelemätön | 12, 4 |
| 14 <i>oikea</i> on tosi tai määrittelemätön | 12, 4 |
| 15 ei (<i>vasen</i> tai <i>oikea</i> tai molemmat on epätosi) (eli 2) | 13, 14 |

" $\vee$ " tarkoittaa "tai"

- $vasen \vee oikea$ on tosi jos ja vain jos $vasen$ tai $oikea$ tai molemmat on tosi
 - kuten "tulen mukaan jos sieltä saa kebabia tai pizzaa"
 - ei kuten "annokseen kuuluu riisi tai ranskalaiset"
- $vasen \vee oikea$ on epätosi jos ja vain jos sekä $vasen$ että $oikea$ on epätosi
- $vasen \vee oikea$ on muulloin määrittelemätön
 - jompikumpi on määrittelemätön, ja jäljelle jäävä on epätosi tai määrittelemätön
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\vee$ (Oslo on Tanskassa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\vee$ (Oslo on Norjassa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\vee$ (Oslo on Norjassa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\vee$ (Oslo on Tanskassa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\vee$ (Ankkalinnassa on USAssa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\vee$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- esim. (Ankkalinnassa on USAssa) $\vee$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- symmetrinen tapaukseen $\wedge$ verrattuna siten, että **F** ja **T** ovat vaihtaneet rooleja

$\vee$	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	T
T	T	T	T

" $\neg$ " tarkoittaa "ei"

- $\neg oikea$ on tosi jos ja vain jos *oikea* on epätosi
- $\neg oikea$ on epätosi jos ja vain jos *oikea* on tosi
- $\neg oikea$ on määrittelemätön jos ja vain jos *oikea* on määrittelemätön
- esim. $\neg(\text{Jyväskylä on Suomessa})$ on epätosi
- esim. $\neg(\text{Jyväskylä on Ruotsissa})$ on tosi
- esim. $\neg(\text{Ankkalinn on USAssa})$ on määrittelemätön

$\neg$	
F	T
U	U
T	F

Tällä kurssilla **tilanne** (**state**) tarkoittaa vapaiden muuttujien / propositiomuuttujien arvojen yhdistelmää

- esim. kokonaisluvuilla: jääkiekko-ottelun Suomi–Tsekki tilanne on 5–3
- esim. propositiomuuttujilla: sataa ja ei tuule
- esim. reaaliluvuilla: $x < y$
 - on tosi tilanteessa $x = 0 \wedge y = 1$
 - on epätosi tilanteessa $x = 1 \wedge y = 1$

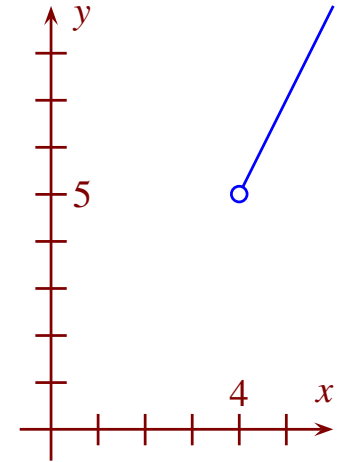
Tilanne on **mahdollinen** (**possible**), jos ja vain jos se toteuttaa voimassa olevat oletukset

Kun kaavasta väitetään, että se on tosi, niin tyypillisesti tarkoitetaan, että se on tosi jokaisessa mahdollisessa tilanteessa

- esim. reaaliluvuilla neliöjuurta $\sqrt{}$ käytettäessä täytyy varmistaa, että juuren alla oleva luku on vähintään nolla
 - muutoin neliöjuuri ei ole määritelty
- esim. reaaliluvuilla jos $a \geq 0$ ja $b \geq 0$, niin
 - $(\sqrt{a})^2 = a$
 - $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- esim. reaaliluvuilla
 - $\sqrt{a^2} = |a|$
- etsi virheitä Wikipedia "Neliöjuuri" "Yleisiä ominaisuuksia reaalilukujen neliöjuurille"

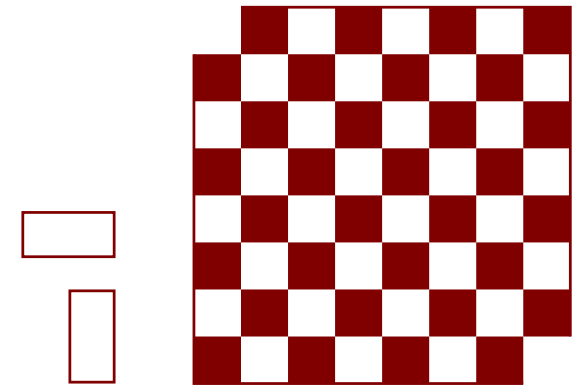
Kaava voidaan kirjoittaa ilman tarkoitusta väittää, että se on tosi

- esim. oletuksen ilmaisemiseksi: jos $x \geq 0$, niin ...
 - tarkastelu rajoitetaan niihin tilanteisiin, joissa oletuskaava on tosi $\Rightarrow$ siitä eteenpäin kunnes oletuksesta luovutaan, mahdollisia ovat vain sellaiset tilanteet, joissa oletuskaava on tosi
- esim. ratkaistavan tehtävän ilmaisemiseksi:
ratkaise $2x - y = 3 \wedge 3x - 2y < 2$
 - ratkaisijan pitää etsiä ne tilanteet, joissa ratkaistava kaava on tosi
 - " $\Leftrightarrow$ " tarkoittaa: molemmat puolet tosi tai ei kumpikaan tosi
 - esim. jos $y = 2x - 3$, niin $3x - 2y = 3x - 2(2x - 3) = 6 - x$, joten
 $2x - y = 3 \wedge 3x - 2y < 2 \Leftrightarrow y = 2x - 3 \wedge 6 - x < 2 \Leftrightarrow x > 4 \wedge y = 2x - 3$
- kaava voidaan jopa kirjoittaa oletukseksi, vaikka uskotaan, että se ei ole tosi: ristiriitatodistus



Ristiriitatodistus (proof by contradiction)

- oletetaan sen vastakohta mikä halutaan todistaa, ja osoitetaan että se johtaisi mahdottomuuteen
- esim. shakkilautaa, josta on poistettu kaksi vastakkaista nurkkaa, ei voi peittää 2×1 -laatoilla
 - jokainen 2×1 -laatta peittää yhden tumman ja yhden vaalean ruudun
 - jos peittäminen onnistuisi, niin olisi yhtä paljon tummia kuin vaaleita ruutuja



Laki (**law**) matematiikassa

- kaava, yhtätotuus tms., joka on voimassa *jokaisella* vapaiden muuttujien ja propositiomuuttujien arvojen yhdistelmällä
- ei päde pelkästään mahdollisissa tilanteissa, vaan kaikissa tilanteissa
- esim. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 - $(5 + 2)(5 - 2) = 7 \cdot 3 = 21 = 25 - 4 = 5^2 - 2^2$
 - $(7 + (-4))(7 - (-4)) = 3 \cdot 11 = 33 = 49 - 16 = 7^2 - (-4)^2$
 - ...
- esim. $ab > 0$ jos ja vain jos $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
- esim. jos $a \leq b \wedge c \leq 0$, niin $ac \geq bc$
- tyypillisesti sanaa "laki" käytetään vain erityisen hyödyllisistä laeista

Tärkeä päättelysääntö:

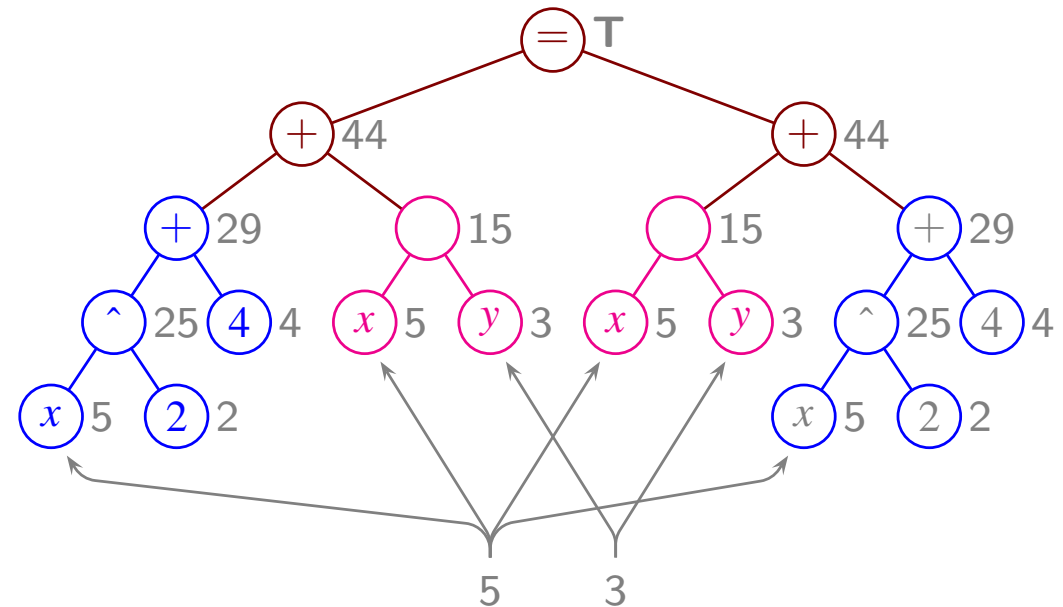
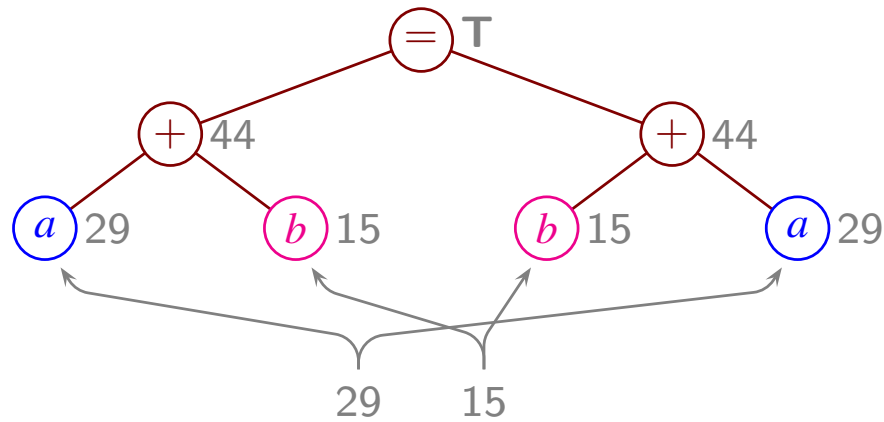
Jos

- laissa ei esiinny symbolia $\forall$ eikä $\exists$,
- sen muuttujien tilalle sijoitetaan mitkä tahansa lausekkeet ja
- sen propositionumuuttujien tilalle sijoitetaan mitkä tahansa kaavat, niin lopputulos on voimassa jokaisessa tilanteessa, jossa kaikki sijoitetut lausekkeet ovat määritellyt.

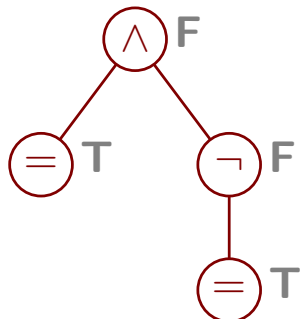
- saattaa olla tarpeen lisätä sulkeita laskujärjestyksen säilyttämiseksi
 - esim. laista $0a = 0$ saa johtaa $0(x+1) = 0$ sijoittamalla a :ksi $x+1$, mutta ei saa johtaa $0x+1 = 0$
 - esim. sijoittamalla $a = 2x$ ja $b = 1-x$ lakiin $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ saadaan $((2x) + (1-x))((2x) - (1-x)) = (2x)^2 - (1-x)^2$
 - jos olet epävarma tarvitaanko sulkeet, niin lisää ne varmuuden vuoksi
- saman muuttujan jokaisen esiintymän tilalle on sijoitettava sama lauseke
 - esim. laista $a+b = b+a$ saa johtaa $(x^2+4) + xy = xy + (x^2+4)$ sijoittamalla a :ksi x^2+4 ja b :ksi xy
- lausekkeen tuloksen pitää olla määritelty, jotta lain lupaus koskisi sitä
 - lausekkeen arvo voi olla määrittelemätön, mutta muuttujan arvo ei voi
- esim. laista $a = a$ ei saa johtaa $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$
- esim. laista $0a = 0$ ei saa johtaa $0\sqrt{x} = 0$, mutta saa johtaa jos $x \geq 0$, niin $0\sqrt{x} = 0$

Miksi tämä päättelysääntö on pätevä?

- laskun jatkamisen kannalta vain välituloksen arvolla on merkitystä, ei sillä saatiinko se suoraan muuttujasta vai laskun tuloksena
- esim. tilanne $a = 29 \wedge b = 15$ ja tilanne $x = 5 \wedge y = 3$



- vastaava pätee totuusarvoille, propositionimuuttujille ja symboleille $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$



Tämän kurssin ensimmäinen logiikan laki

$$\neg\neg kaava \equiv kaava$$

- "≡" tarkoittaa: tuottaa saman totuusarvon kuin
 - saa lukea: "yhtätosi" tai "tarkoittaa samaa kuin"
- siis $\neg\neg kaava$ tuottaa aina saman totuusarvon kuin $kaava$
- helppo tarkastaa $\neg$:n taulukosta: valitaan tarkasteltavaksi mikä tahansa tilanne

$\neg$	
F	T
U	U
T	F

jos siinä $kaava$ tuottaa niin $\neg kaava$ tuottaa ja $\neg\neg kaava$ tuottaa

F

T

F

U

U

U

T

F

T

- usein on tarpeen lisätä **sulkeet** $\neg\neg$:n perään laskujärjestyksen säilyttämiseksi

Esimerkkejä

sijoittamalla $kaava$:ksi

lakiin $\neg\neg kaava \equiv kaava$ saadaan

$$sataa \wedge tuulee$$

$$\neg\neg(sataa \wedge tuulee) \equiv sataa \wedge tuulee$$

$$1 \leq x < 5$$

$$\neg\neg(1 \leq x < 5) \equiv 1 \leq x < 5$$

$$x < 3 \wedge y = -(x-3) \vee x \geq 3 \wedge y = x-3$$

$$\begin{aligned} \neg\neg(x < 3 \wedge y = -(x-3) \vee x \geq 3 \wedge y = x-3) \\ \equiv x < 3 \wedge y = -(x-3) \vee x \geq 3 \wedge y = x-3 \end{aligned}$$

Neljä tasoa merkintöjä / käsitteitä:

- puheenaihe
 - esim. luvut: 3810, +, $\sqrt{}$, ...
 - esim. ihmiset: Minna Canth, puoliso(x), ...
- kaava
 - kaavoista kaavoja tuottavat symbolit: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall x$: ja $\exists x$:
 - puheenaiheen lausekkeista kaavoja tuottavat: $=$, $\neq$ ja puheenaiheesta riippuvia, esim. luvut: $<$, $\leq$, ... ja esim. ihmiset: Lapsi(l, v_1, v_2), ...
 - totuusarvovakiot **F**, **U** ja **T** sekä propositiomuuttujat P , Q , P_1 , ...
- päättelyoperaattorien avulla esitetty päättely
 - peräkkäisiä kaavoja, joiden välissä $\equiv \leftrightarrow \Leftarrow \Rightarrow$
- luonnollisella kielellä esitetty päättely
 - jos ... niin, muussa tapauksessa, siksi, jos ja vain jos, ...

Tärkeä päättelysääntö:

Ilman oletuksia johdettu kaava, yhtäpitävyys, päättelyimplikaatio tai yhtätotuus on laki.

- yhtäpitävyys ja päättelyimplikaatio esitellään ruuduissa 70 ja 94
- puheenaiheen valintaa ja sen lakeja, kuten $a + b = b + a$, ei katsota oletuksiksi
- esim. ilman muita lähtökohtia kuin reaalilukujen lait, voidaan päätellä

$$(a + b)(a - b) = aa - ab + ba - bb = a^2 - b^2$$

joten $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ on reaalilukujen laki

- johdetun tuloksen muuttujat voivat edustaa mitä tahansa puheenaiheen alkioita / totuusarvoja, koska niistä ei oletettu mitään
 - johtaminen olisi pätevä myös jos ko. muuttujien tilalla olisivat mitkä tahansa puheenaiheen arvot
 - esim. $(5 + 2)(5 - 2) = 5 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 5^2 - 2^2$,
 $(7 + (-4))(7 - (-4)) = 7 \cdot 7 - 7 \cdot (-4) + (-4) \cdot 7 - (-4) \cdot (-4) = 7^2 - (-4)^2, \dots$
- oletusten alaisuudessa johdetusta saadaan laki ilmaisemalla oletukset sen osana
- esim. jos $b \neq 0$, niin $\frac{a}{b} \cdot b = a$
 - $b = 0 \vee \frac{a}{b} \cdot b = a$
 - $b \neq 0 \rightarrow \frac{a}{b} \cdot b = a$
 - $b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot b = a$

Vastaesimerkki (counter-example)

- yksittäistapaus, jossa jokin väite, sääntö tms. rikkoutuu
- esim. $x = \frac{1}{2}$ on vastaesimerkki väitteelle, että reaaliluvuilla aina $x^2 \geq x$
 - $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$
- vastaesimerkki osoittaa, että väite, sääntö tms. ei ole yleispätevä

Matematiikassa ”pätevä” tarkoittaa yleispätevää

- yksikin vastaesimerkki riittää kumoamaan väitteen, säännön tms.
- toisinaan väite, sääntö tms. saadaan päteväksi lisäämällä ehto, joka estää poikkeustapaukset
 - esim. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ei ole pätevä, mutta jos $x \neq 0$ niin $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ on
 - esim. $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ei ole pätevä, mutta jos $a \geq 0 \wedge b \geq 0$ niin $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ on

Väite, päättelysääntö tms. on pätevä jos ja vain jos sillä ei ole yhtään vastaesimerkkiä.

- esim. jos $0x = 3$, niin $x + 1 = 7$ on pätevä
 - ei ole olemassa lukua, jolle $0x = 3$, joten ei ole olemassa lukua, jolle $0x = 3$ mutta ei $x + 1 = 7$
- jopa jos $0x = 3$, niin $3 = 4$ on pätevä

Vaihdannaisuus luvuilla

- yhteen- ja kertolasku ovat vaihdannaisia: jokaiselle luvulle a ja b pätee
 - $a + b = b + a$
 - $ab = ba$
- vähennys-, jako- ja potenssilasku eivät ole, vastaesimerkkejä:
 - $3 - 2 = 1$ mutta $2 - 3 = -1$
 - $\frac{6}{2} = 3$ mutta $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
 - $2^3 = 8$ mutta $3^2 = 9$

Liitännäisyys luvuilla

- yhteen- ja kertolasku ovat liitännäisiä: jokaiselle luvulle a , b ja c pätee
 - $(a + b) + c = a + (b + c)$
 - $(ab)c = a(bc)$
- vähennys-, jako- ja potenssilasku eivät ole, vastaesimerkkejä:
 - $(9 - 6) - 2 = 3 - 2 = 1$ mutta $9 - (6 - 2) = 9 - 4 = 5$
 - $\frac{\frac{8}{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ mutta $\frac{8}{\frac{4}{2}} = \frac{8}{2} = 4$
 - $(2^1)^3 = 2^3 = 8$ mutta $2^{(1^3)} = 2^1 = 2$

Symmetrisyys luvuilla

- yhtäsuuruus ja erisuuruus ovat symmetrisiä: jokaiselle luvulle a ja b pätee
 - jos $a = b$, niin $b = a$
 - jos $a \neq b$, niin $b \neq a$
- $<$, $\leq$, $\geq$ ja $>$ eivät ole, vastaesimerkkejä:
 - $2 < 3$ mutta $3 \not< 2$
 - $8 \geq 5$ mutta $5 \not\geq 8$

Transitiivisuus luvuilla

- $=$, $<$, $\leq$, $\geq$ ja $>$ ovat transitiivisia: jokaiselle luvulle a , b ja c pätee
 - jos $a = b$ ja $b = c$, niin $a = c$
 - jos $a < b$ ja $b < c$, niin $a < c$
 - jos $a \geq b$ ja $b \geq c$, niin $a \geq c$
- $\neq$ ei ole, vastaesimerkki: $2 \neq 3 \neq 2$ mutta $2 = 2$

Myös $\equiv$ on **symmetrinen** (**symmetric**) ja **transitiivinen** (**transitive**)

- jos $vasen \equiv oikea$ niin $oikea \equiv vasen$
- jos $vasen \equiv keski$ ja $keski \equiv oikea$ niin $vasen \equiv oikea$

Vaihdannaisuus (commutativity)

$$vasen \wedge oikea \equiv oikea \wedge vasen$$

$$vasen \vee oikea \equiv oikea \vee vasen$$

Perustelu

- valitaan tarkasteltavaksi mikä tahansa tilanne
- on helppo tarkastaa $\wedge$:n ja $\vee$:n taulukoista, että ym. lait pätevät siinä tilanteessa
 - ne ovat symmetriset laskevan lävistäjän suhteen

$\wedge$	F	U	T
F	F	F	F
U	F	U	U
T	F	U	T

$\vee$	F	U	T
F	F	U	T
U	U	U	T
T	T	T	T

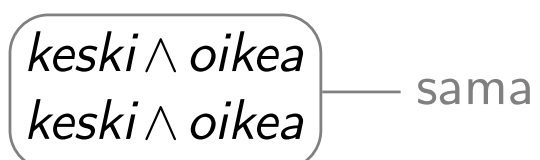
- koska tarkasteltu tilanne oli mielivaltainen, pätevät ym. lait joka tilanteessa

Liitännäisyys (associativity)

$$(vasen \wedge keski) \wedge oikea \equiv vasen \wedge (keski \wedge oikea)$$

$$(vasen \vee keski) \vee oikea \equiv vasen \vee (keski \vee oikea)$$

$\wedge$:n liitännäisyyden perustelu

- valitaan tarkasteltavaksi mikä tahansa tilanne
 - symbolia " $\equiv$ " saa käyttää myös puhumaan pelkästään siitä tilanteesta
- jos *vasen* tuottaa **F**, niin
 - $(vasen \wedge keski) \wedge oikea \equiv (\mathbf{F} \wedge keski) \wedge oikea \equiv \mathbf{F} \wedge oikea \equiv \mathbf{F}$
 - $vasen \wedge (keski \wedge oikea) \equiv \mathbf{F} \wedge (keski \wedge oikea) \equiv \mathbf{F}$
- jos *vasen* tuottaa **T**, niin
 - $(vasen \wedge keski) \wedge oikea \equiv (\mathbf{T} \wedge keski) \wedge oikea \equiv keski \wedge oikea$
 - $vasen \wedge (keski \wedge oikea) \equiv \mathbf{T} \wedge (keski \wedge oikea) \equiv keski \wedge oikea$
- samanlainen päättely toimii kun *keski* tuottaa **F** tai **T** ja kun *oikea* tuottaa **F** tai **T**
- muussa tapauksessa *vasen*, *keski* ja *oikea* tuottavat **U**
 - silloin sekä $(vasen \wedge keski) \wedge oikea$ että $vasen \wedge (keski \wedge oikea)$ tuottaa **U**

$\vee$:n liitännäisyys voidaan osoittaa samaan tapaan

Mitä $vasen \wedge keski \wedge oikea$ ja $vasen \vee keski \vee oikea$ tarkoittavat (ilman sulkeita)?

- tapana on, että ne tarkoittavat $(vasen \wedge keski) \wedge oikea$ ja $(vasen \vee keski) \vee oikea$
- tuotetut totuusarvot eivät muutu, vaikka ne tulkittaisiin $vasen \wedge (keski \wedge oikea)$ ja $vasen \vee (keski \vee oikea)$

$\Rightarrow$ asialla on hyvin vähän merkitystä

Johdanto De Morganin lakeihin

Suomen kielen "eikä" on logiikan "ja ei"

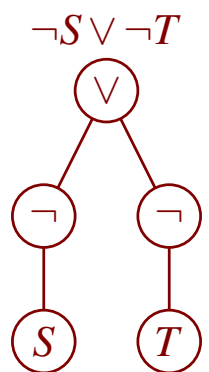
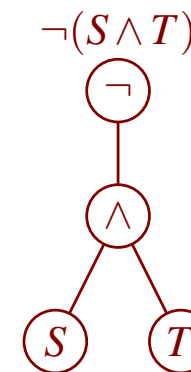
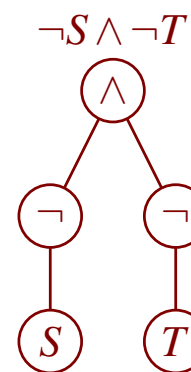
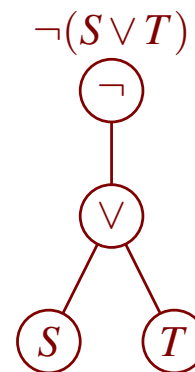
- jos ei ole niin, että sataa tai tuulee, niin ei sada eikä tuule
- jos ei sada eikä tuule, niin ei ole niin, että sataa tai tuulee
- siis "ei ole niin, että sataa tai tuulee" tarkoittaa samaa kuin "ei sada ja ei tuule"

$$\neg(S \vee T) \equiv (\neg S) \wedge (\neg T)$$

- sulkeiden määrän vähentämiseksi on omaksuttu seuraava käytäntö:

- $\neg$ lasketaan ensin
- sitten $\wedge$
- sitten $\vee$

$$\neg(S \vee T) \equiv \neg S \wedge \neg T$$



- "ei ole niin, että sataa ja tuulee" tarkoittaa samaa kuin "ei sada tai ei tuule"

$$\neg(S \wedge T) \equiv \neg S \vee \neg T$$

- päättelymme ei riippunut siitä, että S tarkoittaa "sataa" ja T tarkoittaa "tuulee"
- ⇒ ym. yhtäpitävyydet pätevät, kun S :n ja T :n tilalla on mitkä tahansa kaavat (ruutu 45)

$$\neg(\text{vasen} \vee \text{oikea}) \equiv \neg \text{vasen} \wedge \neg \text{oikea}$$

$$\neg(\text{vasen} \wedge \text{oikea}) \equiv \neg \text{vasen} \vee \neg \text{oikea}$$

De Morganin lait

$$\neg(vasen \vee oikea) \equiv \neg vasen \wedge \neg oikea$$

$$\neg(vasen \wedge oikea) \equiv \neg vasen \vee \neg oikea$$

- $\neg vasen \wedge \neg oikea$ luetaan kuten $(\neg vasen) \wedge (\neg oikea)$, samoin $\neg vasen \vee \neg oikea$
- käytetään mm. kun selvitetään, mitä "muussa tapauksessa" tarkoittaa

Muodollinen perustelu

- jos tarkasteltavassa tilanteessa $vasen \equiv \mathbf{F}$, niin

$\neg(vasen \vee oikea)$	$\equiv$	$\neg(\mathbf{F} \vee oikea)$	oletus $vasen \equiv \mathbf{F}$
$\equiv$	$\neg(\mathbf{F} \vee oikea)$	$\equiv$	$\neg oikea$
$\equiv$	$\neg oikea$	$\equiv$	$\mathbf{T} \wedge \neg oikea$
$\equiv$	$\mathbf{T} \wedge \neg oikea$	$\equiv$	$\neg \mathbf{F} \wedge \neg oikea$
$\equiv$	$\neg \mathbf{F} \wedge \neg oikea$	$\equiv$	$\neg vasen \wedge \neg oikea$

$\mathbf{F} \vee kaava \equiv kaava$
 $\mathbf{T} \wedge kaava \equiv kaava$ takaperin
 $\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$ takaperin
oletus $vasen \equiv \mathbf{F}$ takaperin

- jos tilanteessa $vasen \equiv \mathbf{T}$, niin $\neg(vasen \vee oikea) \equiv \neg(\mathbf{T} \vee oikea) \equiv \neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \wedge \neg oikea \equiv \neg \mathbf{T} \wedge \neg oikea \equiv \neg vasen \wedge \neg oikea$
- samanlainen päättely pätee kun $oikea \equiv \mathbf{F}$ ja kun $oikea \equiv \mathbf{T}$
- jäljellä on vain tilanteet, joissa $vasen \equiv \mathbf{U} \equiv oikea$
 $\neg(vasen \vee oikea) \equiv \neg(\mathbf{U} \vee \mathbf{U}) \equiv \neg \mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \equiv \neg \mathbf{U} \wedge \neg \mathbf{U} \equiv \neg vasen \wedge \neg oikea$
- alempi De Morganin laki voidaan perustella samaan tyyliin

Mitä päättelykeinoja käytimme?

	F	U	T
F	FF	FU	FT
U	UF	UU	UT
T	TF	TU	TT

- käsittelimme *kattavan* kokoelman tapauksia
 - osittain päällekkäisiä, mutta se ei haittaa
 - jokaisessa tapauksessa sijoitimme totuusarvon yhteen tai kahteen osakaavaan
- käytimme suoraan taulukoista tarkastettavia tosiasioita $\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$ jne.
- käytimme lakeja $\mathbf{F} \vee \text{kaava} \equiv \text{kaava}$ jne.
- käytimme $\equiv$:n ominaisuuksia, jotka seuraavat siitä, että $\equiv$ tarkoittaa "yhtätosi"

Jos *vasen* $\equiv$ *oikea*, niin *oikea* $\equiv$ *vasen*.

symmetrisyys

Jos *vasen* $\equiv$ *keski* ja *keski* $\equiv$ *oikea*, niin *vasen* $\equiv$ *oikea*.

transitiivisuus

Jos *vasen* $\equiv$ *oikea* ja *isompi_kaava* ei sisällä $\forall$ eikä $\exists$,
niin *isompi_kaava*(*vasen*) $\equiv$ *isompi_kaava*(*oikea*).

(tällä ei ole vakiintunutta nimeä)

- kun *vasen* ja *oikea* sijoitetaan *isompi_kaavaan*, saattaa olla tarpeen lisätä sulkeita "(" ja ")"
- esim.
 - "takaperin"-kohdissa käytettiin symmetrisyyttä
 - päättelystä $\text{eka} \equiv \text{toka} \equiv \dots \equiv \text{viim}$ seurasi transitiivisuudella $\text{eka} \equiv \text{viim}$
 - isompi_kaava*: koska $\mathbf{F} \vee \text{oikea} \equiv \text{oikea}$, pätee $\neg(\mathbf{F} \vee \text{oikea}) \equiv \neg \text{oikea}$

Näiden yksinkertaisten lakien muistaminen nopeuttaa päättelyä

$$\begin{array}{ll} \textit{kaava} \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} & \textit{kaava} \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T} \\ \textit{kaava} \wedge \mathbf{T} \equiv \textit{kaava} & \textit{kaava} \vee \mathbf{F} \equiv \textit{kaava} \\ \textit{vasen} \wedge \textit{oikea} \equiv \textit{oikea} \wedge \textit{vasen} & \textit{vasen} \vee \textit{oikea} \equiv \textit{oikea} \vee \textit{vasen} \\ \textit{kaava} \wedge \textit{kaava} \equiv \textit{kaava} & \textit{kaava} \vee \textit{kaava} \equiv \textit{kaava} \end{array}$$

- esim. edellä ollutta tapauksen $\textit{vasen} \equiv \mathbf{U} \equiv \textit{oikea}$ päättelyä voi yksinkertaistaa
 $\neg(\textit{vasen} \vee \textit{oikea}) \equiv \neg(\mathbf{U} \vee \mathbf{U}) \equiv \neg\mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \equiv \mathbf{U} \wedge \mathbf{U} \equiv \neg\mathbf{U} \wedge \neg\mathbf{U} \equiv \neg\textit{vasen} \wedge \neg\textit{oikea}$

Toisen De Morganin lain voi johtaa näppärästi toisesta

$$\begin{array}{ll} \neg(\textit{vasen} \wedge \textit{oikea}) & \\ \equiv \neg(\neg\neg\textit{vasen} \wedge \neg\neg\textit{oikea}) & \neg\neg\textit{kaava} \equiv \textit{kaava} \text{ takaperin} \\ \equiv \neg(\neg\neg\textit{vasen} \wedge \neg\neg\textit{oikea}) & \text{lisätty värejä} \\ \equiv \neg(\neg(\neg\textit{vasen} \vee \neg\textit{oikea})) & \neg(\textit{sini} \vee \textit{puna}) \equiv \neg\textit{sini} \wedge \neg\textit{puna} \text{ takaperin} \\ \equiv \neg\neg(\neg\textit{vasen} \vee \neg\textit{oikea}) & \text{värit ja tarpeettomat sulkeet pois} \\ \equiv (\neg\textit{vasen} \vee \neg\textit{oikea}) & \neg\neg\textit{kaava} \equiv \textit{kaava} \\ \equiv \neg\textit{vasen} \vee \neg\textit{oikea} & \text{tarpeettomat sulkeet pois} \end{array}$$

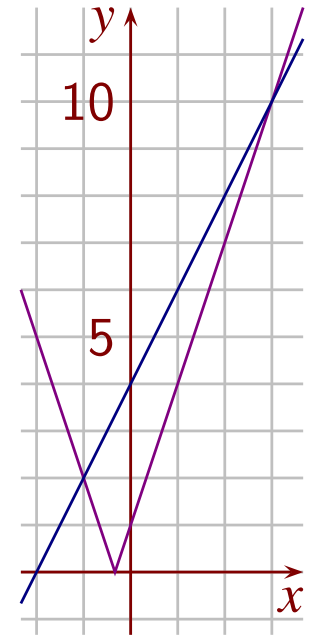
Osittelulait (distributivity)

$$(vasen \vee oikea) \wedge kaava \equiv (vasen \wedge kaava) \vee (oikea \wedge kaava)$$

$$(vasen \wedge oikea) \vee kaava \equiv (vasen \vee kaava) \wedge (oikea \vee kaava)$$

Käytetään (yleensä piilevästi) mm. itseisarvoyhtälöitä ratkaistaessa, **esim.**

$$\begin{aligned} |3x+1| = 2x+4 &\equiv \mathbf{T} \wedge |3x+1| = 2x+4 \\ &\equiv (3x+1 < 0 \vee 3x+1 \geq 0) \wedge |3x+1| = 2x+4 \\ &\equiv (3x+1 < 0 \wedge |3x+1| = 2x+4) \vee (3x+1 \geq 0 \wedge |3x+1| = 2x+4) \\ &\equiv (3x+1 < 0 \wedge -(3x+1) = 2x+4) \vee (3x+1 \geq 0 \wedge 3x+1 = 2x+4) \\ &\equiv (3x+1 < 0 \wedge x = -1) \vee (3x+1 \geq 0 \wedge x = 3) \equiv x = -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$



Ylemmän perustelu: missä tahansa tilanteessa pätee

- jos $kaava \equiv \mathbf{T}$, niin $(vasen \vee oikea) \wedge kaava \equiv (vasen \vee oikea) \wedge \mathbf{T} \equiv vasen \vee oikea \equiv (vasen \wedge \mathbf{T}) \vee (oikea \wedge \mathbf{T}) \equiv (vasen \wedge kaava) \vee (oikea \wedge kaava)$
- jos $kaava \equiv \mathbf{F}$, niin $(vasen \vee oikea) \wedge kaava \equiv (vasen \vee oikea) \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv (vasen \wedge \mathbf{F}) \vee (oikea \wedge \mathbf{F}) \equiv (vasen \wedge kaava) \vee (oikea \wedge kaava)$
- jos $kaava \equiv \mathbf{U}$, niin
 - jos $vasen \equiv oikea \equiv \mathbf{F}$, niin $(vasen \vee oikea) \wedge kaava \equiv (\mathbf{F} \vee \mathbf{F}) \wedge \mathbf{U} \equiv \mathbf{F} \wedge \mathbf{U} \equiv \mathbf{F} \equiv \mathbf{F} \vee \mathbf{F} \equiv (\mathbf{F} \wedge \mathbf{U}) \vee (\mathbf{F} \wedge \mathbf{U}) \equiv (vasen \wedge kaava) \vee (oikea \wedge kaava)$
 - muutoin $(vasen \vee oikea) \wedge kaava \equiv \mathbf{U} \equiv (vasen \wedge kaava) \vee (oikea \wedge kaava)$

" $\rightarrow$ " tarkoittaa "jälkimmäinen tai ei ensimmäinen" (lukutapaehdotus: nuoli)

- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\rightarrow$ (Jyväskylä on Suomessa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\rightarrow$ (Jyväskylä on Ruotsissa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\rightarrow$ (Jyväskylä on Suomessa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\rightarrow$ (Jyväskylä on Ruotsissa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\rightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\rightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on tosi
- esim. (Ankkalinnassa on USAssa) $\rightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- $\text{vasen} \rightarrow \text{oikea}$ tarkoittaa samaa kuin $\neg \text{vasen} \vee \text{oikea}$

$$\text{vasen} \rightarrow \text{oikea} \equiv \neg \text{vasen} \vee \text{oikea}$$

" $\rightarrow$ " ei ole vaihdannainen eikä liitännäinen

$\rightarrow$	F	U	T
F	T	T	T
U	U	U	T
T	F	U	T

Toisinaan $\rightarrow$ sopii hyvin esittämään luonnollisen kielen "jos ... niin ..."

- esim. Jos hän on Jyväskylässä, niin hän on Suomessa.

hän on Jyväskylässä	F	F	T	T
hän on Suomessa	F	T	F	T
esim. hän on / mahdoton	Oslossa	Vaasassa	mahdoton	Jyväskylässä

Toisinaan $\rightarrow$ ei kelpaa esittämään "jos ... niin ..."

- esim. Jos hän on Jyväskylässä, niin hän on Kuopiossa;
tai jos hän on Kuopiossa, niin hän on Jyväskylässä.
- monen mielestä (opettaja mukaan lukien) esimerkkiväite on väärin
 - yläriville vastaesimerkki: hän on Jyväskylässä
 - alariville vastaesimerkki: hän on Kuopiossa $\Rightarrow$ "tai":n kumpikaan puoli ei ole pätevä
- silti, jos esimerkin "jos ... niin ..." ja "tai" tulkitaan $\rightarrow$ ja $\vee$, niin kaava on aina tosi!

J	F	F	T	T
K	F	T	F	T
$J \rightarrow K$	T	T	F	T
$K \rightarrow J$	T	F	T	T
$(J \rightarrow K) \vee (K \rightarrow J)$	T	T	T	T

- $\Rightarrow$ (ainakin toisinaan) "jos ... niin ..." on parempi tulkita päättelyoperaattoriksi
- tällä kurssilla merkitään $\Rightarrow$
 - $\Rightarrow$ -ilmauksen tulee olla voimassa *jokaisessa* mahdollisessa tilanteessa
 - käsittelemme $\Rightarrow$:n perusteellisesti ruudusta 94 alkaen
 - $J \Rightarrow K$ ei ole pätevä eikä $K \Rightarrow J$ ole pätevä

" $\leftrightarrow$ " tarkoittaa "molemmat tosi tai molemmat epätosi" (lukutapaehdotus: eestaas)

- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\leftrightarrow$ (Jyväskylä on Suomessa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\leftrightarrow$ (Jyväskylä on Ruotsissa) on epätosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\leftrightarrow$ (Jyväskylä on Suomessa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\leftrightarrow$ (Jyväskylä on Ruotsissa) on tosi
- esim. (Jyväskylä on Suomessa) $\leftrightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- esim. (Jyväskylä on Ruotsissa) $\leftrightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön
- esim. (Ankkalinnassa on USAssa) $\leftrightarrow$ (Ankkalinnassa on USAssa) on määrittelemätön

$\leftrightarrow$	F	U	T
F	T	U	F
U	U	U	U
T	F	U	T

$\leftrightarrow$ voidaan esittää muiden avulla kolmella tavalla:

$vasen \leftrightarrow oikea$

$$\begin{aligned} &\equiv (vasen \rightarrow oikea) \wedge (oikea \rightarrow vasen) \\ &\equiv (vasen \vee \neg oikea) \wedge (\neg vasen \vee oikea) \\ &\equiv (vasen \wedge oikea) \vee (\neg vasen \wedge \neg oikea) \end{aligned}$$

Helppo kysymys: onko " $\leftrightarrow$ " vaihdannainen?

$\leftrightarrow$	F	U	T
F	T	U	F
U	U	U	U
T	F	U	T

Onko " $\leftrightarrow$ " liitännäinen?

- taulukosta näkee, että $kaava \leftrightarrow T \equiv T \leftrightarrow kaava \equiv T$

$\Rightarrow$ jos *vasen* tuottaa **T**, niin molemmat tuottavat $keski \leftrightarrow oikea$

- $(vasen \leftrightarrow keski) \leftrightarrow oikea \equiv (T \leftrightarrow keski) \leftrightarrow oikea \equiv keski \leftrightarrow oikea$
- $vasen \leftrightarrow (keski \leftrightarrow oikea) \equiv T \leftrightarrow (keski \leftrightarrow oikea) \equiv keski \leftrightarrow oikea$

- samaan tapaan

- jos *keski* tuottaa **T**, niin molemmat tuottavat $vasen \leftrightarrow oikea$
- jos *oikea* tuottaa **T**, niin molemmat tuottavat $vasen \leftrightarrow keski$

- taulukosta näkee, että $kaava \leftrightarrow U \equiv U \leftrightarrow kaava \equiv U$

$\Rightarrow$ jos *vasen*, *keski* tai *oikea* tuottaa **U**, niin

$(vasen \leftrightarrow keski) \leftrightarrow oikea$ ja $vasen \leftrightarrow (keski \leftrightarrow oikea)$ tuottavat **U**

- muussa tapauksessa *vasen*, *keski* ja *oikea* tuottavat **F**

- $(vasen \leftrightarrow keski) \leftrightarrow oikea \equiv (F \leftrightarrow F) \leftrightarrow F \equiv T \leftrightarrow F \equiv F$
- $vasen \leftrightarrow (keski \leftrightarrow oikea) \equiv F \leftrightarrow (F \leftrightarrow F) \equiv F \leftrightarrow T \equiv F$

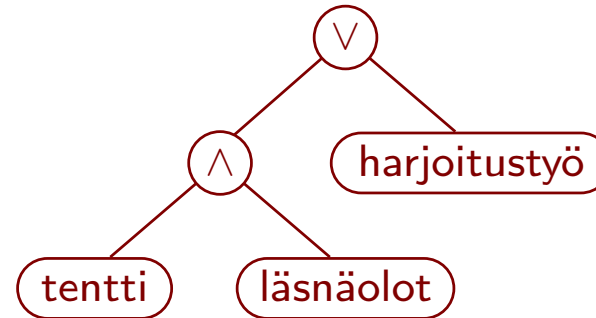
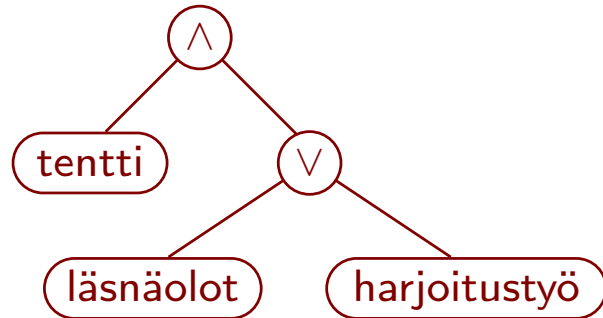
Laskujärjestys logiikassa

- kuten tavallista, laskujärjestys voidaan määrätä sulkeilla "(" ja ")"
- jollei sulkeita ole, niin tällä kurssilla laskujärjestys on seuraava:
 $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow \quad \forall \text{ ja } \exists$
- $\neg$ ensin on vakiintunut käytäntö logiikassa
 - esim. $\neg P \vee Q \equiv (\neg P) \vee Q \not\equiv \neg(P \vee Q)$ vastaesimerkki: $Q \equiv \mathbf{T}$ ja $P \equiv \dots$
- $\text{vasen} \not\equiv \text{oikea}$ tarkoittaa, että $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$ ei ole pätevä (eli sille on vastaesimerkki)
- muualla kuin tällä kurssilla joko $\wedge$ lasketaan ennen kuin $\vee$, tai vaaditaan sulkeet
 - tällä kurssilla esim. $P \vee Q \wedge R \equiv P \vee (Q \wedge R) \not\equiv (P \vee Q) \wedge R$ $P \equiv \mathbf{T}$ ja $R \equiv \mathbf{F}$
 - muualla joko samoin, tai $P \vee Q \wedge R$ on kielletty ja $P \vee (Q \wedge R)$ ja $(P \vee Q) \wedge R$ sallittu
- $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ edellä mainittujen jälkeen tässä järjestyksessä on melko vakiintunut käytäntö
- $\forall$ ja $\exists$ viimeisenä poikkeaa monista mutta ei kaikista muista
 - valittiin, koska vähentää sulkeiden tarvetta olennaisesti ja koska vakiintunutta käytäntöä mm. sulkeiden ja välimerkkien osalta ei ole
- tällä kurssilla $P \rightarrow Q \rightarrow R \equiv P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
 - muualla noudatetaan joko samaa tai vastakkaista käytäntöä
 - tätä tarvitaan niin harvoin, että ei tarvitse muistaa
- ei ole väliä, tulkitaanko $P \wedge Q \wedge R$ kuten $(P \wedge Q) \wedge R$ vai kuten $P \wedge (Q \wedge R)$
 - ei vaikuta kaavan tuottamiin totuusarvoihin
 - samoin $\vee$ ja $\leftrightarrow$

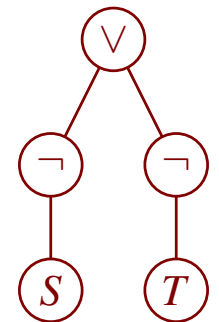
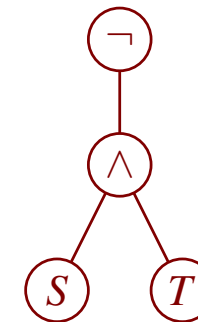
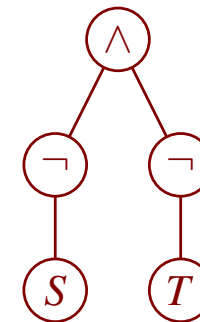
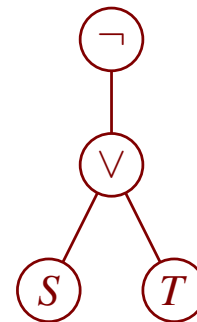
Laskujärjestyksellä on logiikassakin usein olennainen merkitys

- esim. kurssin suorittamiseksi pitää suorittaa

tentti ja (läsnäolot tai harjoitustyö)
(tentti ja läsnäolot) tai harjoitustyö



- esim. laskujärjestys De Morganin laeissa $\neg(S \vee T) \equiv \neg S \wedge \neg T$ ja $\neg(S \wedge T) \equiv \neg S \vee \neg T$
 - ei ole niin, että sataa tai tuulee tarkoittaa samaa kuin ei sada eikä tuule
 - ei ole niin, että sataa ja tuulee tarkoittaa samaa kuin ei sada tai ei tuule
 - kun käytät De Morganin lakeja, muista tarvittaessa lisätä sulkeet!



Harjoitus: keksi 2-arvologiikassa kaikki vastaesimerkit yhtätotuuudelle $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \vee Q$

- jos $P \equiv \mathbf{F}$, niin $\neg(P \vee Q) \equiv \neg(\mathbf{F} \vee Q) \equiv \neg Q$
 $\neg P \vee Q \equiv \neg \mathbf{F} \vee Q \equiv \mathbf{T} \vee Q \equiv \mathbf{T}$
 $\Rightarrow$ vastaesimerkki: $P \equiv \mathbf{F}$ ja $Q \equiv \mathbf{T}$
- jos $P \equiv \mathbf{T}$, niin $\neg(P \vee Q) \equiv \neg(\mathbf{T} \vee Q) \equiv \neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$
 $\neg P \vee Q \equiv \neg \mathbf{T} \vee Q \equiv \mathbf{F} \vee Q \equiv Q$
 $\Rightarrow$ vastaesimerkki: $P \equiv \mathbf{T}$ ja $Q \equiv \mathbf{T}$

Toinen ratkaisu edelliselle

- jos $Q \equiv \mathbf{F}$, niin $\neg(P \vee Q) \equiv \neg(P \vee \mathbf{F}) \equiv \neg P$
 $\neg P \vee Q \equiv \neg P \vee \mathbf{F} \equiv \neg P$
 $\Rightarrow$ ei ole vastaesimerkkiä, jossa $Q \equiv \mathbf{F}$
- jos $Q \equiv \mathbf{T}$, niin $\neg(P \vee Q) \equiv \neg(P \vee \mathbf{T}) \equiv \neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F}$
 $\neg P \vee Q \equiv \neg P \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$
 $\Rightarrow$ kaksi vastaesimerkkiä: $P \equiv \mathbf{F}$ ja $Q \equiv \mathbf{T}$, sekä $P \equiv \mathbf{T}$ ja $Q \equiv \mathbf{T}$

Yleinen tapa tarkastaa propositiologiikan yhtätotuuksia

- valitse mikä tahansa propositiomuuttuja
 - kannattaa suosia monesti esiintyviä propositiomuuttujia
- sijoita siihen jokin totuusarvo ja sievennä molemmat puolet
 - jos tuli sama, niin tee uudelleen muulla totuusarvolla kunnes kaikki on kokeiltu
 - jos sievennysten tuloksille keksii vastaesimerkin, niin lopeta
 - muussa tapauksessa joko käsittele sievennysten tulokset tällä samalla algoritmilla, tai hylkää jo tehty työ ja aloita alusta toisella propositiomuuttujalla

Harjoitus: keksi 2-arvologiikassa vastaesimerkki yhtätotuudelle $P \vee Q \wedge R \equiv (P \vee Q) \wedge R$

- jos $P \equiv \mathbf{F}$, niin
$$P \vee Q \wedge R \equiv \mathbf{F} \vee Q \wedge R \equiv Q \wedge R$$
$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (\mathbf{F} \vee Q) \wedge R \equiv Q \wedge R$$
$$\Rightarrow \text{ei ole vastaesimerkkiä, jossa } P \equiv \mathbf{F}$$
- jos $P \equiv \mathbf{T}$, niin
$$P \vee Q \wedge R \equiv \mathbf{T} \vee Q \wedge R \equiv \mathbf{T}$$
$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (\mathbf{T} \vee Q) \wedge R \equiv \mathbf{T} \wedge R \equiv R$$
$$\Rightarrow \text{kaksi vastaesimerkkiä: } P \equiv \mathbf{T}, R \equiv \mathbf{F} \text{ ja } Q \text{ saa olla kumpi vain}$$

4 Päättelyoperaattorit

Väittämiä voidaan esittää ja päätelmiä tehdä **tilapäisten oletusten** (**temporary assumption**) alaisuudessa

- usein sana "tilapäinen" jätetään pois
- mennessäni sateella polkupyörällä Harjun näkötornille
 - jos en pue sadevaatteita, niin kastun sateesta
 - jos puen sadevaatteet, niin kastun hiestä $\Rightarrow$ kastun joka tapauksessa
- kokonaisluvuilla
 - jos $n \leq 0$, niin $n^2 \geq n$, koska aina $n^2 \geq 0$
 - muussa tapauksessa $n \geq 1$ ja $n > 0$, joten $n^2 = n \cdot n \geq n \cdot 1 = n$ $\Rightarrow$ aina $n^2 \geq n$
- voi jopa olla, että tarkoituksellisesti tehdään mahdoton oletus
 - jos kassakaappi olisi räjäytetty viimeistään kun vahtimestari lähti töistä, niin hän olisi kuullut räjähdysten
 - hän ei kuullut räjähdystä $\Rightarrow$ kassakaappi räjäytettiin sen jälkeen kun hän lähti töistä

Kertaa tilanne ja mahdollinen tilanne ruudusta 38

Esimerkki, johon viitataan jatkossa havainnollistamaan logiikan sääntöjä:
yhtälöparin ratkaiseminen sijoituskeinolla

$$\begin{array}{ll} 1 & 3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \\ 2 & 3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \\ 3 & \text{oletus } y = 1 - 3x \\ 4 & 5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x = 2 - x = 4 \\ 5 & \Leftrightarrow x = 2 - 4 = -2 \wedge y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7 \\ 6 & \text{oletus 3 loppuu} \\ 7 & 3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7 \end{array}$$

- 1 ratkaistava yhtälöpari
- 2 ensimmäisestä yhtälöstä ratkaistiin y vähentämällä molemmilta puolilta $3x$
- 3 oletetaan, että y :llä on rivillä 2 saatu arvo x :n funktiona
- 4 jälkimmäisestä yhtälöstä korvattiin y yhtäsuurella ja sievennettiin
- 5 ratkaistiin edellisestä x lisäämällä molemmille puolille $x - 4$, ja laskettiin siitä y
- 6 luovuttiin rivin 3 oletuksesta
- 7 lopputulos

Yhtätotuus " $\equiv$ " (lukutapaehdotus: viirut)

- olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja

vasen $\equiv$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa *vasen* tuottaa saman totuusarvon kuin *oikea* tuottaa.

- siis ei saa olla olemassa muuttujien arvojen yhdistelmää, joka toteuttaa voimassa olevat oletukset, ja jolla toinen puoli tuottaa eri totuusarvon kuin toinen
 - vapaiden muuttujien / propositiomuuttujien

- esim. $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \equiv \frac{3}{x-2} < x-4 \not\equiv x^2+5 > 6x$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x \leq 5$	$x > 5$
$\frac{x+1}{x-2} < x-3$	F	F	T	U	F	T
$\frac{3}{x-2} < x-4$	F	F	T	U	F	T
$x^2+5 > 6x$	T	F	F	F	F	T

- esim. Jos $x > 2$, niin $\frac{3}{x-2} < x-4 \equiv x^2+5 > 6x$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x \leq 5$	$x > 5$
$\frac{3}{x-2} < x-4$	F	F	T	U	F	T
$x^2+5 > 6x$	T	F	F	F	F	T

$vasen \equiv oikea$ *ei ole kaava*, vaan *vertaa kahtaa kaavaa*

- analogia:
 - $x^2 + 5$ tuottaa lukuja ja $6x$ tuottaa lukuja
 - $x^2 + 5 > 6x$ ei tuota vaan vertaa lukuja

$vasen \equiv oikea$ *ei ole tosi, epätosi eikä määrittelemätön*, vaan *pätevä* tai *epäpätevä*

- jos on olemassa yksikin vastaesimerkki, niin se on epäpätevä
 - mahdollinen tilanne, jossa $vasen$ tuottaa eri totuusarvon kuin $oikea$
- muussa tapauksessa se on pätevä

Käyttäytyminen, kun $vasen$ on totuusarvovakio ja samoin $oikea$

$\equiv$	F	U	T		$\leftrightarrow$	F	U	T
F	OK	ei	ei	vertaa	F	T	U	F
U	ei	OK	ei		U	U	U	U
T	ei	ei	OK		T	F	U	T

Yliviivaus ei tarkoita "aina eri totuusarvon" vaan "ainakin yhden kerran eri totuusarvon"

$vasen \not\equiv oikea$ tarkoittaa, että ainakin yhdessä mahdollisessa tilanteessa $vasen$ tuottaa eri totuusarvon kuin $oikea$ tuottaa.

Yhtätotuusketju

$kaava_1 \equiv kaava_2 \equiv \dots \equiv kaava_n$ tarkoittaa, että
 $kaava_1 \equiv kaava_2$ ja $kaava_2 \equiv kaava_3$ ja $\dots$ ja $kaava_{n-1} \equiv kaava_n$.

- jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa
 - jokin $kaava_i$ on tosi, on jokainen $kaava_i$ tosi
 - jokin $kaava_i$ on epätosi, on jokainen $kaava_i$ epätosi
 - jokin $kaava_i$ on määrittelemätön, on jokainen $kaava_i$ määrittelemätön

Yhtätotuuden sääntöjä

jos on päätelty	niin saa päätellä
$vasen \equiv oikea$	$oikea \equiv vasen$
$kaava_1 \equiv kaava_2 \equiv \dots \equiv kaava_n$	$kaava_1 \equiv kaava_n$

- ensimmäinen seuraa siitä, että "tuottaa saman" ei riipu siitä, kumpi mainitaan ensin
- toisen perustelemiseksi tarkastelemme mitä tahansa mahdollista tilannetta
 - jos siinä $kaava_i$ saa totuusarvon X , niin $\equiv$:n määritelmän mukaan $kaava_{i+1}, kaava_{i+2}, \dots, kaava_n$ saavat totuusarvon X ja $kaava_{i-1}, kaava_{i-2}, \dots, kaava_1$ saavat totuusarvon X
- tyhjästä saa päätellä $kaava \equiv kaava$
 - $kaava$ tuottaa saman totuusarvon kuin se itse tuottaa

Yhtäpitävyys " $\Leftrightarrow$ " (lukutapaehdotus: tuplaeestaas)

- olkoot *vasen* ja *oikea* kaavoja

vasen $\Leftrightarrow$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi, ja päinvastoin.

- siis ei saa olla olemassa sellaista muuttujien arvojen yhdistelmää, joka toteuttaa voimassa olevat oletukset, ja jolla toinen puoli on tosi ja toinen ei ole tosi
- esim. $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow 1 < x < 2 \vee x > 5 \not\Leftrightarrow x^2 + 5 > 6x$

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x \leq 5$	$x > 5$
$\frac{x+1}{x-2} < x-3$	F	F	T	U	F	T
$1 < x < 2 \vee x > 5$	F	F	T	F	F	T
$x^2 + 5 > 6x$	T	F	F	F	F	T

- esim. jos $x < 2$, niin $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \Leftrightarrow x = -3$

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x^2 = 9$	F	T	F	F	T	F
$x = -3 \vee x = 3$	F	T	F	F	T	F
$x = -3$	F	T	F	F	F	F

$\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$

- *ei ole kaava*, vaan *vertaa kahta kaavaa*
- *ei ole tosi, epätosi eikä määrittelemätön*, vaan *pätevä* tai *epäpätevä*
 - jos on olemassa yksikin vastaesimerkki, niin se on epäpätevä
 - muussa tapauksessa se on pätevä

Tilanne on vastaesimerkki yhtäpitävyydelle $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$, jos ja vain jos

- voimassa olevat oletukset toteutuvat
 - siis tilanne on mahdollinen
- toinen kaavoista *vasen* ja *oikea* on tosi, ja
- toinen kaavoista *vasen* ja *oikea* ei ole tosi
 - on epätosi tai määrittelemätön

$\equiv$	F	U	T		$\Leftrightarrow$	F	U	T		$\Leftrightarrow$	F	U	T
F	OK	ei	ei	vertaa	F	OK	OK	ei	vertaa	F	T	U	F
U	ei	OK	ei		U	OK	OK	ei		U	U	U	U
T	ei	ei	OK		T	ei	ei	OK		T	F	U	T

- esim. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ vastaesimerkki: $x = 3$

$\text{vasen} \not\Leftrightarrow \text{oikea}$ tarkoittaa, että ainakin yhdessä mahdollisessa tilanteessa toinen puoli on ja toinen puoli ei ole tosi.

Yhtäpitävyysketju

$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow kaava_n$ tarkoittaa, että
 $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2$ ja $kaava_2 \Leftrightarrow kaava_3$ ja $\dots$ ja $kaava_{n-1} \Leftrightarrow kaava_n$.

- jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa jokin $kaava_i$ on tosi, on jokainen $kaava_i$ tosi

Yhtäpitävyyden sääntöjä

jos on päätelty	niin saa päätellä
$vasen \Leftrightarrow oikea$	$oikea \Leftrightarrow vasen$
$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow kaava_n$	$kaava_1 \Leftrightarrow kaava_n$
$vasen \equiv oikea$	$vasen \Leftrightarrow oikea$

- ensimmäinen seuraa $\Leftrightarrow$:n määritelmän osuudesta "ja päinvastoin"
- toisen perustelemiseksi tarkastelemme mitä tahansa mahdollista tilannetta
 - jos siinä yksikin $kaava_i$ on tosi, niin $\Leftrightarrow$:n määritelmän mukaan $kaava_{i+1}$, $kaava_{i+2}$, $\dots$, $kaava_n$ ovat tosi ja $kaava_{i-1}$, $kaava_{i-2}$, $\dots$, $kaava_1$ ovat tosi, joten sekä $kaava_1$ että $kaava_n$ on tosi
 - muussa tapauksessa mikään kaavoista $kaava_i$ ei ole tosi, joten kumpikaan kaavoista $kaava_1$ ja $kaava_n$ ei ole tosi
- kolmas seuraa suoraan määritelmistä
- tyhjästä saa päätellä $kaava \Leftrightarrow kaava$
 - $kaava$ on tosi silloin ja vain silloin kun se on tosi

Ruudun 66 esimerkki muistuttaa seuraavaa yhtäpitävyysketjua:

$$3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \quad \text{ruutu 75 tai 78}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2 \quad \text{ruutu 92}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 1 - 3x \quad \wedge\text{:n vaihdannaisuus}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7 \quad \text{ruutu 92}$$

- ketjusta seuraa lopullinen ratkaisu: $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7$
- ruudussa 66 päättely on esitetty tiiviisti mm. välttämällä kaavojen toistoa
 - tavoitteena oli käytännössä näppärä eikä logiikan kannalta säästeliäin esitystapa $\Rightarrow$ se ei etene ihan samoin

Osakaavan korvaaminen yhtätodella

Jos *vasen* $\equiv$ *oikea* ja *isompi_kaava*(*X*) ei sisällä symbolia $\forall$ eikä $\exists$,
niin *isompi_kaava*(*vasen*) $\equiv$ *isompi_kaava*(*oikea*) .

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
 - oletuksen *vasen* $\equiv$ *oikea* vuoksi *vasen* tuottaa siinä saman totuusarvon kuin *oikea*
 - kaavan *vasen* $\wedge$ *kaava* tuottaman totuusarvon kannalta millään muulla kaavojen *vasen* ja *kaava* ominaisuuksilla ei ole merkitystä kuin niiden tuottamilla totuusarvoilla
- $\Rightarrow$ koska *vasen* tuottaa saman totuusarvon kuin *oikea*, niin
vasen $\wedge$ *kaava* tuottaa saman totuusarvon kuin *oikea* $\wedge$ *kaava*
- samasta syystä *kaava* $\wedge$ *vasen* tuottaa saman totuusarvon kuin *kaava* $\wedge$ *oikea*
 - samanlainen päättely pätee myös symboleille $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$

Kvanttoreille samanlainen päättely ei päde

- kaavojen $\forall x : \textit{kaava}(x)$ ja $\exists x : \textit{kaava}(x)$ tuottamat totuusarvot riippuvat tyypillisesti *kaava*(*x*):n tuottamasta totuusarvosta monessa tilanteessa
 - *x* saa jokaisen arvon puheenaiheen joukosta
 - osakaavan näkemä tilanne ei välttämättä ole sama kuin koko kaavan näkemä
- $\Rightarrow$ nyt kvanttorit kielletään, ja ruudulla 124 kerrotaan miten ne voidaan ottaa mukaan

Ruudun 73 esimerkin vaihe $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$

- koulusta muistamme (ja ruudulla 86 näemme miksi) $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$
 $\Rightarrow$ koska $3x + y = 1$ ja $y = 1 - 3x$ eivät koskaan tuota **U**, kussakin tilanteessa pätee

joko $3x + y = 1 \equiv \mathbf{T} \equiv y = 1 - 3x$

tai $3x + y = 1 \not\equiv \mathbf{T} \not\equiv y = 1 - 3x$ jolloin $3x + y = 1 \equiv \mathbf{F} \equiv y = 1 - 3x$

- siksi $3x + y = 1 \equiv y = 1 - 3x$
- ruudun 74 säännöllä $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \equiv y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$
- ruudun 72 säännöllä $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$

Tämä ei ollut aivan suoraviivaista, joten seuraavaksi pohdimme kahta kysymystä

- miksi tarvitaan sekä " $\Leftrightarrow$ " että " $\equiv$ "?
- voisiko jollain säännöllä päätelmän tehdä helpommin, välttämättä " $\equiv$ ":n käytön?

Miksi tarvitaan sekä " $\Leftrightarrow$ " että " $\equiv$ "?

- " $\Leftrightarrow$ " tarvitaan, koska (epä)yhtälö(ryhmien) ratkaisemisessa se on sopivan vahva ja " $\equiv$ " on toisinaan liian vahva
 - " $\Leftrightarrow$ " ei salli **T**:n vaihtumista muuksi eikä muun **T**:ksi
 - " $\Leftrightarrow$ " sallii **U**:n vaihtumisen **F**:ksi (ja toisinpäin)
- esim.
 - $\frac{x-2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$
 - kun $x = 0$, pätee $\frac{x-2}{x} \leq 0 \equiv \mathbf{U}$ ja $0 < x \leq 2 \equiv \mathbf{F}$, joten $\frac{x-2}{x} \leq 0 \not\equiv 0 < x \leq 2$
 - (mutta jos $x \neq 0$, niin $\frac{x-2}{x} \leq 0 \equiv 0 < x \leq 2$)
- " $\equiv$ " tarvitaan, koska jos $\forall$ ja $\exists$ ei käytetä tai ne käsitellään oikein, niin
 - "jos $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$ niin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \equiv \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$ " on pätevä
 - "jos $\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ niin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \Leftrightarrow \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$ " ei ole
- esim.

vaikka $\frac{x-2}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$,

silti $\frac{x-2}{x} > 0 \Leftrightarrow \neg(\frac{x-2}{x} \leq 0) \not\equiv \neg(0 < x \leq 2) \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x > 2$

- kun $x = 0$, pätee $\frac{x-2}{x} > 0 \equiv \mathbf{U}$ ja $x \leq 0 \vee x > 2 \equiv \mathbf{T}$

Osakaavan korvaaminen yhtäpitävällä

Jos *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* ja X ei esiinny *ja_tai_kaava*(X):ssä minkään muiden alaisuudessa kuin $\wedge$ ja $\vee$, niin *ja_tai_kaava*(*vasen*) $\Leftrightarrow$ *ja_tai_kaava*(*oikea*).

- siis X :n mihinkään esiintymään vaikuttavat $\neg$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ ja $\exists$ on kielletty
 - koska $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$, voidaan X sallia myös $\rightarrow$:n oikeanpuoleisessa osakaavassa
- 2-arvologiikan tapauksessa tämän sijaan kannattaa käyttää ruudun 74 sääntöä

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
 - alla $\equiv$ ja $\Leftrightarrow$ tarkastavat vain sen tilanteen
 - siinä *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea*, eli joko *vasen* $\equiv \mathbf{T} \equiv$ *oikea* tai *vasen* $\neq \mathbf{T} \neq$ *oikea*
- siinä *vasen* $\wedge$ *kaava* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\wedge$ *kaava*, koska
 - jos siinä *kaava* $\equiv \mathbf{T}$, niin *vasen* $\wedge$ *kaava* $\equiv$ *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\equiv$ *oikea* $\wedge$ *kaava*
 - muussa tapauksessa *kaava* $\neq \mathbf{T}$, joten *vasen* $\wedge$ *kaava* $\neq \mathbf{T} \neq$ *oikea* $\wedge$ *kaava*
- siinä *kaava* $\wedge$ *vasen* $\Leftrightarrow$ *kaava* $\wedge$ *oikea*, koska
kaava $\wedge$ *vasen* $\equiv$ *vasen* $\wedge$ *kaava* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\wedge$ *kaava* $\equiv$ *kaava* $\wedge$ *oikea*
- siinä *vasen* $\vee$ *kaava* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\vee$ *kaava*, koska
 - jos siinä *kaava* $\neq \mathbf{T}$, niin *vasen* $\vee$ *kaava* $\Leftrightarrow$ *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\vee$ *kaava*
 - muussa tapauksessa *kaava* $\equiv \mathbf{T}$, joten *vasen* $\vee$ *kaava* $\equiv \mathbf{T} \equiv$ *oikea* $\vee$ *kaava*
- siinä *kaava* $\vee$ *vasen* $\Leftrightarrow$ *kaava* $\vee$ *oikea*, koska
kaava $\vee$ *vasen* $\equiv$ *vasen* $\vee$ *kaava* $\Leftrightarrow$ *oikea* $\vee$ *kaava* $\equiv$ *kaava* $\vee$ *oikea*

Ruudun 73 esimerkin vaihe $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$
ruudun 77 säännöllä

- $X \wedge 5x + 2y = 4$ on muotoa *ja_tai_kaava*(X)
- niinpä siitä, että $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$ saa päätellä
 $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4$

Milloin lauseke on määritelty?

Jokaiseen funktiosymboliin f liittyy kaava $\text{määr}(f)$, joka kertoo millä argumenteilla f on määritelty.

- tutuimmat matematiikan osittain määritellyt (eli osittaiset) funktiot
 - $\text{määr}(\frac{x}{y}) \equiv y \neq 0$
 - $\text{määr}(\sqrt{x}) \equiv x \geq 0$
 - $\text{määr}(\log x) \equiv x > 0$
- kaikilla argumenteilla määritellyille funktioille $\text{määr}(f) \equiv \mathbf{T}$
 - $\text{määr}(x+y) \equiv \text{määr}(xy) \equiv \text{määr}(-x) \equiv \text{määr}(|x|) \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$
- jos $\text{määr}(f)$ sisältää funktiosymboleita, niiden pitää olla kaikilla argum. määriteltyjä
 - ym. esimerkit eivät sisällä funktiosymboleita
- $\text{määr}(\text{vakio}) \equiv \text{määr}(\text{muuttuja}) \equiv \mathbf{T}$
- monimutkaisempi lauseke on määritelty, jos ja vain jos
 - kukin osalauseke on määritelty muuttujien arvoilla
 - osalausekkeet yhdistävä funktio on määritelty osalausekkeiden tuottamilla arvoilla
- näin syntyvät " $\wedge \mathbf{T}$ " ja " $\mathbf{T} \wedge$ " saa jättää pois
- esim. $\text{määr}(\frac{\sqrt{xy}}{x-2}) \equiv \text{määr}(\sqrt{xy}) \wedge \text{määr}(x-2) \wedge x-2 \neq 0$
 $\equiv (\text{määr}(xy) \wedge xy \geq 0) \wedge (\text{määr}(x) \wedge \text{määr}(2) \wedge \mathbf{T}) \wedge x \neq 2 \equiv \dots$
 $\equiv xy \geq 0 \wedge x \neq 2$

määr(<i>kaava</i>) on alla laadittu siten, että	jos <i>kaava</i> tuottaa	F	U	T
	niin määr(<i>kaava</i>) tuottaa	T	F	T

- atomikaavat (*R* edustaa mitä tahansa relaatiosymbolia)

$$\text{määr}(\mathbf{F}) \equiv \text{määr}(\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T} \text{ ja } \text{määr}(\mathbf{U}) \equiv \mathbf{F}$$

$$\text{määr}(\textit{vasen} = \textit{oikea}) \equiv \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \text{määr}(\textit{oikea}), \text{ samoin } \neq, <, \leq, \geq \text{ ja } >$$

$$\text{määr}(R(\textit{lauseke}_1, \dots, \textit{lauseke}_n)) \equiv \text{määr}(\textit{lauseke}_1) \wedge \dots \wedge \text{määr}(\textit{lauseke}_n)$$

- seuraavasta on toisinaan hyötyä

$$\text{määr}(\neg \textit{kaava}) \equiv \text{määr}(\textit{kaava})$$

- monimutkaisempien kaavojen tapauksessa voidaan usein työskennellä seuraavasti
 - etsitään kaikki atomikaavat, jotka voivat tuottaa **U**
 - käsitellään erikseen kukin tilannejoukko, jossa jokin niistä tuottaa **U**

- siksi seuraavia tuskin tarvitaan, mutta tulkoot näytetyiksi jos joku haluaa nähdä

$$\text{määr}(\textit{vasen} \wedge \textit{oikea}) \equiv \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \text{määr}(\textit{oikea}) \vee \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \neg \textit{vasen} \vee \text{määr}(\textit{oikea}) \wedge \neg \textit{oikea}$$

$$\text{määr}(\textit{vasen} \vee \textit{oikea}) \equiv \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \text{määr}(\textit{oikea}) \vee \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \neg \textit{vasen} \vee \text{määr}(\textit{oikea}) \wedge \neg \textit{oikea}$$

$$\text{määr}(\textit{vasen} \rightarrow \textit{oikea}) \equiv \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \text{määr}(\textit{oikea}) \vee \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \neg \textit{vasen} \vee \text{määr}(\textit{oikea}) \wedge \neg \textit{oikea}$$

$$\text{määr}(\textit{vasen} \leftrightarrow \textit{oikea}) \equiv \text{määr}(\textit{vasen}) \wedge \text{määr}(\textit{oikea})$$

$$\text{määr}(\forall x : \textit{kaava}) \equiv (\forall x : \text{määr}(\textit{kaava})) \vee \exists x : (\text{määr}(\textit{kaava}) \wedge \neg \textit{kaava})$$

$$\text{määr}(\exists x : \textit{kaava}) \equiv (\forall x : \text{määr}(\textit{kaava})) \vee \exists x : (\text{määr}(\textit{kaava}) \wedge \textit{kaava})$$

Esimerkki: milloin $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ tuottaa **U**?

- yhtäsuuruus tuottaa **U** silloin ja vain silloin kun jompikumpi tai molemmat puolet on määrittelemätön (ruutu 31)
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ on määrittelemätön jos ja vain jos $x < 0 \vee y < 0$
 - $\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ on määrittelemätön jos ja vain jos $x < 0 \vee y < 0 \vee \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$
 - jos $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, niin
 - sekä $\sqrt{x}$ että $\sqrt{y}$ on määritelty (ruutu 31) $\Rightarrow$ kumpikin tuottaa luvun $\Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2$ (yhtäsuurten lukujen neliöt ovat yhtäsuuret)
ja $(\sqrt{x})^2 = x$ ja $(\sqrt{y})^2 = y$ (neliöjuuren määritelmä) $\Rightarrow x = (\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2 = y \geq 0$
 - jos $x = y \geq 0$, niin $\sqrt{x} = \sqrt{y}$
- $\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$
- jos ja vain jos
- $x = y \geq 0$
- $\Rightarrow \neg \text{määr} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right) \equiv x < 0 \vee y < 0 \vee x = y \geq 0 \equiv x < 0 \vee y < 0 \vee x = y$

Lisää yhtäpitävyyden sääntöjä

- $vasen \equiv oikea$ jos ja vain jos $vasen \Leftrightarrow oikea$ ja $määr(vasen) \Leftrightarrow määr(oikea)$
 - suunta $\Rightarrow$ on ilmeinen
 - suuntaa $\Leftarrow$ varten olkoot (1) $vasen \Leftrightarrow oikea$ ja (2) $määr(vasen) \Leftrightarrow määr(oikea)$
 - jos $vasen \equiv T$ niin $oikea \equiv T$ koska (1)
 - jos $vasen \equiv U$ niin $oikea \equiv U$ koska (2)
 - jos $vasen \equiv F$, niin $oikea \not\equiv T$ koska (1) ja $oikea \not\equiv U$ koska (2), joten $oikea \equiv F$
- $vasen \equiv oikea$ jos ja vain jos $vasen \Leftrightarrow oikea$ ja $\neg vasen \Leftrightarrow \neg oikea$
 - perustelu on muuten sama kuin edellinen, mutta sunnassa $\Leftarrow$:
 - jos $vasen \equiv F$, niin $\neg vasen \equiv T \equiv \neg oikea$, joten $oikea \equiv F$
 - jos $vasen \equiv U$, niin $oikea \not\equiv T$ ja $U \equiv \neg vasen \Leftrightarrow \neg oikea \not\equiv T$, joten $oikea \equiv U$
- **kaksiarvologiikassa** $vasen \equiv oikea$ jos ja vain jos $vasen \Leftrightarrow oikea$
 - **kaksiarvologiikassa** $vasen \Leftrightarrow oikea$ takaa $\neg vasen \Leftrightarrow \neg oikea$
- $kaava \Leftrightarrow määr(kaava) \wedge kaava$
 - jos $kaava \equiv T$ niin myös $määr(kaava) \wedge kaava \equiv T$
 - jos $kaava \equiv F$ niin myös $määr(kaava) \wedge kaava \equiv F$
 - jos $kaava \equiv U$ niin $määr(kaava) \wedge kaava \equiv F$

Osalausekkeen korvaaminen lausekkeessa yhtäsuurella / yhtä aikaa määrittelemättömällä

Jos tilanteessa $vasen = oikea \vee (\neg \text{määr}(vasen) \wedge \neg \text{määr}(oikea))$,
 niin siinä tilanteessa $lauseke(vasen) = lauseke(oikea) \vee$
 $(\neg \text{määr}(lauseke(vasen)) \wedge \neg \text{määr}(lauseke(oikea)))$.

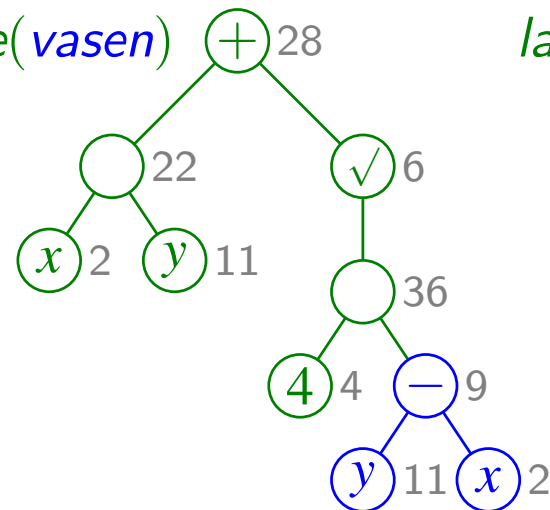
Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa tilannetta
- jos $vasen$ ja $oikea$ ovat määrittelemättömät, niin ruudun 30 käytännön vuoksi myös $lauseke(vasen)$ ja $lauseke(oikea)$ ovat määrittelemättömät
- muussa tapauksessa $vasen$ tuottaa saman arvon kuin $oikea$
 - jos $lauseke(x)$ on sillä arvolla määritelty, niin $lauseke(vasen) = lauseke(oikea)$
 - muussa tapauksessa $lauseke(vasen)$ ja $lauseke(oikea)$ ovat määrittelemättömät

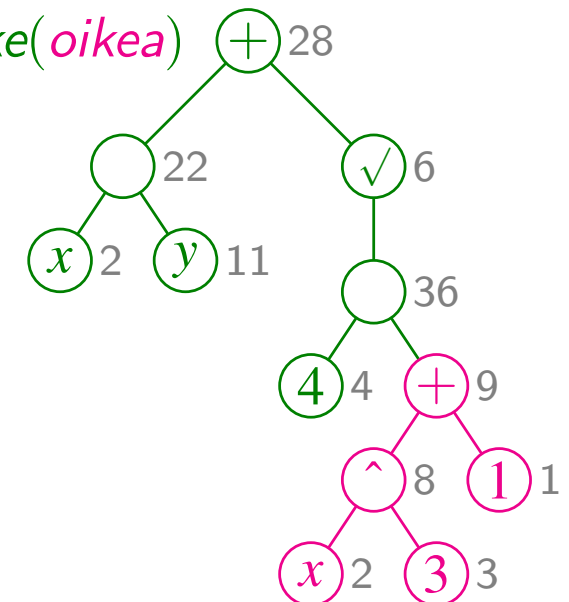
Esimerkki

- $lauseke(a) = xy + \sqrt{4a}$
- $vasen = y - x$
- $oikea = x^3 + 1$
- tilanne $x = 2$ ja $y = 11$
- vrt. $x = -2 \wedge y = -9$
- vrt. $vasen = \frac{1}{0}$ ja $oikea = \sqrt{-1}$

$lauseke(vasen)$



$lauseke(oikea)$



Koska tulos pätee kullekin tilanteelle erikseen, se pätee mille tahansa tilanteiden joukolle

- jos jokaisessa tilanteessa $\text{vasen} = \dots \neg \text{määr}(\text{oikea})$,
niin jokaisessa tilanteessa $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \dots \neg \text{määr}(\text{lauseke}(\text{oikea}))$
- jos jokaisessa mahdollisessa tilanteessa $\text{vasen} = \dots \neg \text{määr}(\text{oikea})$,
niin jokaisessa mahdollisessa tilanteessa $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \dots \neg \text{määr}(\text{lauseke}(\text{oikea}))$

Määritellyille lausekkeille saadaan yksinkertaisempi muotoilu

Jos tilanteessa $\text{lauseke}(\text{vasen})$ on määritelty ja $\text{vasen} = \text{oikea}$,
niin siinä tilanteessa $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \text{lauseke}(\text{oikea})$.

Perustelu

- jos $\text{vasen} = \text{oikea}$, niin ruudun 83 säännön mukaan
 $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \text{lauseke}(\text{oikea}) \vee (\neg \text{määr}(\text{lauseke}(\text{vasen})) \wedge \neg \text{määr}(\text{lauseke}(\text{oikea})))$
- jos lisäksi $\text{lauseke}(\text{vasen})$ on määritelty, niin
 $\vee$:n oikea puoli ei voi olla tosi, joten $\vee$:n vasen puoli on tosi

Tämäkin pätee mille tahansa tilanteiden joukolle

Koska "=" on symmetrinen, pätee myös

Jos tilanteessa $\text{lauseke}(\text{oikea})$ on määritelty ja $\text{vasen} = \text{oikea}$,
niin siinä tilanteessa $\text{lauseke}(\text{vasen}) = \text{lauseke}(\text{oikea})$.

Huom! Ruutujen 74, 77, 83 ja 84 (ja monet muut) päättelysäännöt ovat yksisuuntaisia

- "jos ... niin" on yksisuuntainen, "jos ja vain jos" kaksisuuntainen
- esim. vaikka $\text{lauseke}(\text{vasen})$ olisi määritelty, ei ruudun 84 sääntö lupaa, että $\text{vasen} = \text{oikea} \Leftrightarrow \text{lauseke}(\text{vasen}) = \text{lauseke}(\text{oikea})$
 - esim. jos $x = -3$ niin $x^2 = (-3)^2 = 9$, mutta silti $x^2 = 9$ ei takaa $x = -3$, koska $x^2 = 9$ myös kun $x = 3$
 - esim. jos $x = 5$ niin $0x = 0 \cdot 5 = 0$, mutta silti $0x = 0$ ei takaa $x = 5$, koska $0x = 0$ myös kun $x = 8$
- esim. ruudun 83 sääntö ei lupaa $1 = 2 \vee (\neg \text{määr}(1) \wedge \neg \text{määr}(2)) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \vee (\neg \text{määr}(\frac{1}{x}) \wedge \neg \text{määr}(\frac{2}{x}))$
 - kun $x = 0$, on sen vasen puoli epätosi mutta oikea puoli tosi
- esim. ruudun 77 sääntö ei lupaa $x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ jos ja vain jos $3 = 4 \wedge x = 1 \Leftrightarrow 3 = 4 \wedge x = 2$
 - $x = 1 \Leftrightarrow x = 2$ on epäpätevä, koska $x = 1$ on vastaesimerkki
 - $3 = 4 \wedge x = 1 \Leftrightarrow 3 = 4 \wedge x = 2$ on pätevä, koska sen kumpikin puoli tuottaa aina F

Ruutujen 66 ja 73 esimerkin vaihe $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$

- ruudun 84 mukaan jos $3x + y = 1$, niin $(3x + y) - 3x = 1 - 3x$
- reaalilukujen laeista seuraa $(3x + y) - 3x = y$

$$\begin{aligned} & (3x + y) - 3x \\ = & (3x + y) + -3x && \text{vähennyslasku tarkoittaa vastaluvun lisäämistä} \\ = & -3x + (3x + y) && \text{yhteenlasku on vaihdannainen} \\ = & (-3x + 3x) + y && \text{yhteenlasku on liitännäinen} \\ = & (3x + -3x) + y && \text{vaihdannaisuus, ruudun 84 sääntö} \\ = & 0 + y && \text{luvun ja sen vastaluvun summa on 0, ruudun 84 sääntö} \\ = & y + 0 && \text{vaihdannaisuus} \\ = & y && \text{luvun ja nollan summa on luku itse} \end{aligned}$$

- "=" on symmetrinen ja transitiivinen (ruutu 48)

$\Rightarrow$ jos $3x + y = 1$, niin $y = (3x + y) - 3x = 1 - 3x$

- koska ruudun 84 sääntö on yksisuuntainen, täytyy perustella myös, että jos $y = 1 - 3x$, niin $3x + y = 1$
 - ruudun 84 mukaan jos $y = 1 - 3x$, niin $3x + y = 3x + (1 - 3x)$
 - reaalilukujen laeista seuraa $3x + (1 - 3x) = 1$
- nyt on perusteltu $3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$

Lausekkeen korvaaminen kaavassa yhtäsuurella yhtä aikaa määrittelemättömällä

Jos

1. jokaisessa mahdollisessa tilanteessa

$$vasen = oikea \vee (\neg \text{määr}(vasen) \wedge \neg \text{määr}(oikea))$$

2. *isompi_kaava*(*x*) ei sisällä symbolia $\forall$ eikä $\exists$

niin *isompi_kaava*(*vasen*) $\equiv$ *isompi_kaava*(*oikea*) .

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- jos siinä $\neg \text{määr}(vasen) \wedge \neg \text{määr}(oikea)$, niin *x*:n tilalle tulee määrittelemätön sekä *isompi_kaava*(*vasen*):ssa että *isompi_kaava*(*oikea*):ssa
 $\Rightarrow$ *isompi_kaava*(*vasen*) tuottaa saman totuusarvon kuin *isompi_kaava*(*oikea*)
- muussa tapauksessa *x*:n tilalle tulee sama arvo *isompi_kaava*(*vasen*):ssa kuin *isompi_kaava*(*oikea*):ssa
 $\Rightarrow$ *isompi_kaava*(*vasen*) tuottaa saman totuusarvon kuin *isompi_kaava*(*oikea*)

Aputulos ruudun 73 esimerkille: oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2$

- ruudun 84 mukaan oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x)$
 - koska $5x + 2y$ on silloin määritelty koska se on aina määritelty

- reaalilukujen ominaisuuksien ansiosta $5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x = 2 - x$

$\Rightarrow$ oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 2 - x$

$\Rightarrow$ ruudun 87 mukaan $5x + 2y = 4 \equiv 2 - x = 4$

- ruudun 86 tyyliä saadaan $2 - x = 4 \Leftrightarrow x = -2$
- niinpä oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2$

$5x + 2y = 4 \equiv 2 - x = 4 \Leftrightarrow \dots$ perusteluineen esitettiin ruudulla 66 tiiviisti
 näin: $5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x = 2 - x = 4 \Leftrightarrow \dots$

- tässä " $\Leftrightarrow \dots$ " korostaa, että kyse ei ole yhdestä kaavasta vaan päättelyketjun alusta
- tiivistetty esitys on pätevä, koska oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa

$$\begin{aligned}
 & 5x + 2y = 4 \\
 \equiv & 4 = 5x + 2y & (1) \\
 \equiv & 4 = 5x + 2y \wedge 5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) \wedge \dots \wedge 5x + 2 - 6x = 2 - x & (2) \\
 \equiv & 4 = 5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x = 2 - x & (3) \\
 \equiv & 5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x = 2 - x = 4 & (1) \\
 \equiv & 5x + 2y = 5x + 2(1 - 3x) \wedge 5x + 2(1 - 3x) = 5x + 2 - 6x \wedge \dots \wedge 2 - x = 4 & (3) \\
 \equiv & 2 - x = 4 & (2)
 \end{aligned}$$

- (1) " $=$ " on transitiivinen ja symmetrinen
- (2) tilanteessa toden väitteen lisääminen $\wedge$:lla kaavaan ei muuta sen totuusarvoa siinä tilanteessa
- (3) $kaava_1 = kaava_2 = \dots = kaava_n$ on lyhennemerkintä kaavalle $kaava_1 = kaava_2 \wedge \dots \wedge kaava_{n-1} = kaava_n$

Ehdon siirtäminen oletuksesta kaavoihin ja päinvastoin

Olkoot *vasen*, *oikea* ja *oletus* kaavoja ja *muut_oletukset* joukko kaavoja.

$\text{vasen} \Leftrightarrow \text{oikea}$ oletuksien *oletus* ja *muut_oletukset* alaisuudessa jos ja vain jos
 $\text{oletus} \wedge \text{vasen} \Leftrightarrow \text{oletus} \wedge \text{oikea}$ oletuksien *muut_oletukset* alaisuudessa.

$\text{vasen} \equiv \text{oikea}$ oletuksien *oletus* ja *muut_oletukset* alaisuudessa jos ja vain jos
 $\text{oletus} \wedge \text{määr}(\text{oletus}) \wedge \text{vasen} \equiv \text{oletus} \wedge \text{määr}(\text{oletus}) \wedge \text{oikea}$
oletuksien *muut_oletukset* alaisuudessa.

Perustelu

- jos tilanteessa $\text{oletus} \equiv \mathbf{T}$, niin " $\text{oletus} \wedge$ " ja " $\text{oletus} \wedge \text{määr}(\text{oletus}) \wedge$ " sievenevät pois
 - tilanne on vastaesimerkki väitteen molemmille tai ei kummallekaan riville
- jos tilanteessa $\text{oletus} \equiv \mathbf{F}$, niin se ei ole kummankaan väitteen kummankaan rivin vastaesimerkki
 - tilannetta ei oteta huomioon kummankaan väitteen ylärivillä
 - väitteiden alarivit sievenevät muotoihin $\mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ ja $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
- muussa tapauksessa tilanteessa $\text{oletus} \equiv \mathbf{U}$
 - nytkään tilannetta ei oteta huomioon kummankaan väitteen ylärivillä
 - $\text{oletus} \wedge \text{vasen} \not\equiv \mathbf{T} \not\equiv \text{oletus} \wedge \text{oikea}$, joten $\text{oletus} \wedge \text{vasen} \Leftrightarrow \text{oletus} \wedge \text{oikea}$
 - $\text{oletus} \wedge \text{määr}(\text{oletus}) \wedge \text{vasen} \equiv \mathbf{F} \equiv \text{oletus} \wedge \text{määr}(\text{oletus}) \wedge \text{oikea}$ $\Rightarrow$ ei ole kummankaan väitteen kummankaan rivin vastaesimerkki

$oletus \wedge vasen \equiv oletus \wedge oikea$ ei tarkoita samaa kuin $oletus$:n alaisuudessa $vasen \equiv oikea$

- esim. $oletus \equiv \mathbf{U}$, $vasen \equiv \mathbf{F}$ ja $oikea \equiv \mathbf{T}$ on vastaesimerkki
 - ei oteta huomioon, kun oletuksen $oletus$ alaisuudessa tarkastetaan $vasen \equiv oikea$
 - $oletus \wedge vasen \equiv \mathbf{F} \neq \mathbf{U} \equiv oletus \wedge oikea$

Edellisistä pohdinnoista seuraa

Jos huolehditaan, että $oletus$ ei ole määrittelemätön kun ollaan oletuksien $muut_oletukset$ alaisuudessa, niin
 $vasen \equiv oikea$ oletuksien $oletus$ ja $muut_oletukset$ alaisuudessa jos ja vain jos
 $oletus \wedge vasen \equiv oletus \wedge oikea$ oletuksien $muut_oletukset$ alaisuudessa.

- oletukset kannattaa selvyyden vuoksi joka tapauksessa muotoilla aina määritellyiksi
- jos niin tehdään, niin etuna saadaan myös ym. päättelysääntö

Ruudun 73 esimerkin loput vaiheet

- ruudulla 88 näimme, että oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2$
 $\Rightarrow$ ruudun 90 mukaan oletuksesta luovuttua
 $y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2$
- ruudun 87 mukaan oletuksen $x = -2$ alaisuudessa $y = 1 - 3x \equiv y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7$
 $\Rightarrow$ ruudun 90 mukaan oletuksesta luovuttua $x = -2 \wedge y = 1 - 3x \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7$

Laskelma $y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7$ esitettiin ruudulla 66
oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisen $x = 2 - 4 = -2$ jatkeena

- oletuksen alaisuudessa $x = 2 - 4 = -2 \equiv x = 2 - 4 = -2 \wedge y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7$, koska
 - jos $x = -2$, niin oletuksen ansiosta $y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7$ $\Rightarrow$ molemmat puolet tuottavat **T**
 - muutoin $x \neq -2$, joten molemmat puolet tuottavat **F**
- oletuksen $y = 1 - 3x$ alaisuudessa saatu $5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7$ tuottaa oletuksesta luovuttaessa $y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow y = 1 - 3x \wedge x = -2 \wedge y = 7$
- $y = 1 - 3x \wedge x = -2 \wedge y = 7 \equiv x = -2 \wedge y = 7$ ilman oletustakin, koska
 - jos $x = -2$ ja $y = 7$, niin $y = 1 - 3x$, joten molemmat puolet tuottavat **T**
 - muutoin $x = -2 \equiv \mathbf{F}$ tai $y = 7 \equiv \mathbf{F}$, joten molemmat puolet tuottavat **F** $\Rightarrow$ saadaan $y = 1 - 3x \wedge 5x + 2y = 4 \Leftrightarrow x = -2 \wedge y = 7$

Esimerkki: ratkaistava $\frac{x+1}{x-2} < x-3$

- $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \equiv \mathbf{T} \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \equiv (x < 2 \vee x > 2 \vee x = 2) \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3$
 $\equiv x < 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \vee x > 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \vee x = 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3$
 - $x < 2 \vee x > 2 \vee x = 2 \equiv \mathbf{T}$ seuraa reaalitylukujen ominaisuuksista
 - osakaavan saa korvata yhtätodella, ruutu 74
 - osittelulaki, ruutu 56
- jos $x < 2$, niin $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x+1 > (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5$
 - ruudun 90 mukaan $x < 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x < 2 \wedge 1 < x < 5$
- jos $x > 2$, niin $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x+1 < (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5$
 - ruudun 90 mukaan $x > 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x > 2 \wedge (x < 1 \vee x > 5)$
- jos $x = 2$, niin $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow \mathbf{U}$
 - ruudun 90 mukaan $x = 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x = 2 \wedge \mathbf{U}$
- niinpä $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x < 2 \wedge 1 < x < 5 \vee x > 2 \wedge (x < 1 \vee x > 5) \vee x = 2 \wedge \mathbf{U}$
 $\Leftrightarrow 1 < x < 2 \vee x > 5$
 - ja_tai_kaava:n osakaavan saa korvata yhtäpitävällä, ruutu 77
- tentissä riittää esittää värilliset vaiheet (muut kuin mustat ja harmaat)

Päättelyimplikaatio " $\Rightarrow$ " (lukutapaehdotus: tuplanuoli)

vasen $\Rightarrow$ *oikea* tarkoittaa, että jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi.

- siis muuttujien arvojen yhdistelmä on vastaesimerkki, jos ja vain jos se toteuttaa voimassa olevat oletukset, ja vasen puoli on ja oikea puoli ei ole siinä tosi
- päteviä päättelyimplikaatioita
 - *sataa* $\wedge$ *tuulee* $\Rightarrow$ *sataa*
 - $x > 5 \Rightarrow x > 2$
- epäpäteviä päättelyimplikaatioita
 - *sataa* $\vee$ *tuulee* $\Rightarrow$ *sataa* vastaesimerkki: tuulee mutta ei sada
 - $x > 2 \Rightarrow x > 5$ vastaesimerkki: $x = 4$
 - $x^2 = 2x \Rightarrow \frac{x^2}{x} = \frac{2x}{x}$ vastaesimerkki: $x = 0$
- *oikea* sisältää enintään saman informaation mahdollisesta tilanteesta kuin *vasen*
 - esim. tiedetään, että *sataa* ja *tuulee*
vertaa tiedetään, että *sataa*, mutta ei tiedetä *tuuleeko*
- *vasen* $\Rightarrow$ *oikea*
 - *ei ole kaava*, vaan *vertaa kahta kaavaa*
 - *ei ole tosi, epätosi eikä määrittelemätön*, vaan *pätevä* tai *epäpätevä*

Symbolien $\Rightarrow$ ja $\rightarrow$ suhde ei ole ihan suoraviivainen

$\Rightarrow$	F	U	T
F	OK	OK	OK
U	OK	OK	OK
T	ei	ei	OK

$\rightarrow$	F	U	T
F	T	T	T
U	U	U	T
T	F	U	T

- Jos $\text{vasen} \rightarrow \text{oikea} \equiv \text{T}$, niin $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$.
- $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ jos ja vain jos $\text{vasen} \wedge \text{määr}(\text{vasen}) \rightarrow \text{oikea} \equiv \text{T}$.
- $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ jos ja vain jos $\text{vasen} \wedge \text{määr}(\text{vasen}) \rightarrow \text{oikea} \wedge \text{määr}(\text{oikea}) \equiv \text{T}$.
- kannattaa muistaa, että $\text{vasen} \rightarrow \text{oikea} \equiv \neg \text{vasen} \vee \text{oikea}$

vasen oikea	F	U	T	T
	T	F tai U	F	U
$\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$	OK	OK	OK	ei
$\text{vasen} \rightarrow \text{oikea}$	T	T	U	F
$\text{vasen} \wedge \text{määr}(\text{vasen}) \rightarrow \text{oikea}$	T	T	T	F
$\text{vasen} \wedge \text{määr}(\text{vasen}) \rightarrow \text{oikea} \wedge \text{määr}(\text{oikea})$	T	T	T	F

"Jos ... niin ..." tarkoittaa usein $\Rightarrow$ eikä $\rightarrow$

Esim. Jos hän on Jyväskylässä, niin hän on Kuopiossa;
tai jos hän on Kuopiossa, niin hän on Jyväskylässä.

- oletamme, että "hän on Jyväskylässä" ja "hän on Kuopiossa" ovat aina määritellyt
- tarkoitakoon J "hän on Jyväskylässä" ja K "hän on Kuopiossa"
- tulkinta $\rightarrow$: $(J \rightarrow K) \vee (K \rightarrow J)$ tuottaa aina **T**
 - jos $J \equiv \mathbf{T}$, niin $K \rightarrow J \equiv \mathbf{T}$
 - jos $J \equiv \mathbf{F}$, niin $J \rightarrow K \equiv \mathbf{T}$
- tulkinta $\Rightarrow$: "tai":n kumpikaan puoli ei ole pätevä
 - $J \Rightarrow K$ ei ole pätevä, vastaesimerkki: hän on Jyväskylässä mutta ei Kuopiossa
 - $K \Rightarrow J$ ei ole pätevä, vastaesimerkki: hän on Kuopiossa mutta ei Jyväskylässä

Päättyimplikaation sääntöjä

- $vasen \Leftarrow oikea$ tarkoittaa samaa kuin $oikea \Rightarrow vasen$
- $vasen \Leftrightarrow oikea$ pätee jos ja vain jos sekä $vasen \Rightarrow oikea$ että $oikea \Rightarrow vasen$ pätee
- tietenkin $kaava \Rightarrow kaava$
- $kaava_1 \Rightarrow kaava_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow kaava_n$ tarkoittaa, että $kaava_1 \Rightarrow kaava_2$ ja $kaava_2 \Rightarrow kaava_3$ ja $\dots$ ja $kaava_{n-1} \Rightarrow kaava_n$.
 - jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa $kaava_i$ on tosi, on jokainen $kaava_j$ tosi, jolle $j \geq i$
 - takaa $kaava_1 \Rightarrow kaava_n$

Jos päättyketjussa $kaava_1 \dots kaava_n$ esiintyy

vain $\equiv$ $\equiv \Leftrightarrow$ $\equiv \Leftrightarrow \Rightarrow$
niin $kaava_1 \equiv kaava_n$ $kaava_1 \Leftrightarrow kaava_n$ $kaava_1 \Rightarrow kaava_n$

$jokin \equiv \mathbf{T}$ on kätevä tapa ilmaista, että $jokin$ on jokaisessa mahdollisessa tilanteessa tosi

- samaa tarkoittavat myös $\mathbf{T} \equiv jokin$, $jokin \Leftrightarrow \mathbf{T}$, $\mathbf{T} \Leftrightarrow jokin$ ja $\mathbf{T} \Rightarrow jokin$
- $jokin \Rightarrow \mathbf{T}$ on aina pätevä, eikä niin ollen kerro mitään kaavasta $jokin$

Kontrapositio (contraposition)

$vasen \Rightarrow oikea$ jos ja vain jos
 $\neg oikea \vee \neg m\ddot{a}ar(oikea) \Rightarrow \neg vasen \vee \neg m\ddot{a}ar(vasen)$.

Perustelu

- ylärivin vastaesimerkkejä ovat tilanteet, joissa *vasen* on tosi ja *oikea* ei ole
- alarivin vastaesimerkkejä ovat tilanteet, joissa
 $\neg oikea \vee \neg m\ddot{a}ar(oikea)$ on tosi ja $\neg vasen \vee \neg m\ddot{a}ar(vasen)$ ei ole
 - eli joissa *oikea* on epätosi tai määrittelemätön, ja *vasen* on tosi

2-arvologiikassa pätee: $vasen \Rightarrow oikea$ jos ja vain jos $\neg oikea \Rightarrow \neg vasen$

- 3-arvologiikassa ei päde: $\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{F}$ mutta $\mathbf{T} \equiv \neg \mathbf{F} \not\Rightarrow \neg \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}$

Käytetään usein päättelyissä

- esim. jos kassakaappi olisi räjäytetty viimeistään kun vahtimestari lähti töistä, niin hän olisi kuullut räjähdysten
 - niinpä jos vahtimestari ei kuullut räjähdystä, niin kassakaappi räjäytettiin sen jälkeen kun hän lähti töistä
- Jos n on kokonaisluku ja n^2 on parillinen, niin n on parillinen.
 - jos n olisi pariton, niin olisi olemassa sellainen kokonaisluku k , että $n = 2k + 1$
 $\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2$ olisi pariton

Ristiriitatodistus jälleen (katso myös ruutu 39)

Jos $\neg kaava \vee \neg määr(kaava) \Rightarrow \mathbf{F}$, niin $\mathbf{T} \Rightarrow kaava$.

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- jos $kaava$ tuottaa siinä $\mathbf{F}$ tai $\mathbf{U}$, niin
 - $\neg kaava \vee \neg määr(kaava)$ tuottaa $\mathbf{T}$
- $\Rightarrow$ ” $\Rightarrow$ ”:n määritelmän mukaan oikean puolen tulisi tuottaa $\mathbf{T}$
- (tämä perustelu on oikeastaan kehäpäätelmä: vetoaa siihen, että ristiriitatodistuksen periaate on maalaisjärjen mukaan pätevä)

Esimerkki: lukua $\sqrt{2}$ ei voi esittää kahden luonnollisen luvun osamääränä

- oletetaan, että $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, missä n ja m ovat luonnollisia lukuja
 - jos on monta mahdollista n ja m , valitaan sellaiset, että n on mahdollisimman pieni
 - $n > 0$, koska muuten olisi $\sqrt{2} = \frac{0}{m} = 0$, joten $2 = (\sqrt{2})^2 = 0^2 = 0$
- $\Rightarrow (\frac{n}{m})^2 = 2 \Rightarrow n^2 = 2m^2 \Rightarrow n$ on parillinen (ruutu 98)
- merkitään $n = 2k \Rightarrow 0 < k < n \wedge n^2 = (2k)^2 = 2m^2 \Rightarrow 2k^2 = m^2 \Rightarrow m$ on parillinen
- $\Rightarrow$ merkitään $m = 2h \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{2k}{2h} = \frac{k}{h} \Rightarrow n$ ei olekaan mahdollisimman pieni 

Ehdon siirtäminen oletuksesta kaavaan ja päinvastoin

$\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ oletuksien oletus ja muut_oletukset alaisuudessa jos ja vain jos
 $\text{oletus} \wedge \text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ oletuksien muut_oletukset alaisuudessa.

Perustelu

- tilanne on ylärivin vastaesimerkki jos ja vain jos
 $\text{muut_oletukset} \equiv \text{T}$, $\text{oletus} \equiv \text{T}$, $\text{vasen} \equiv \text{T}$ ja $\text{oikea} \not\equiv \text{T}$
- tilanne on alarivin vastaesimerkki jos ja vain jos
 $\text{muut_oletukset} \equiv \text{T}$, $\text{oletus} \wedge \text{vasen} \equiv \text{T}$ ja $\text{oikea} \not\equiv \text{T}$

Osakaavan korvaaminen sen seurauksella

Jos $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$ ja X ei esiinny $\text{ja_tai_kaava}(X)$:ssä minkään muiden alaisuudessa kuin $\wedge$ ja $\vee$, niin $\text{ja_tai_kaava}(\text{vasen}) \Rightarrow \text{ja_tai_kaava}(\text{oikea})$.

- siis X :n mihinkään esiintymään vaikuttavat $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ ja $\exists$ on kielletty

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
 - alla $\equiv$ ja $\Rightarrow$ tarkastavat vain sen tilanteen
 - siinä $\text{vasen} \Rightarrow \text{oikea}$, eli joko $\text{vasen} \neq \mathbf{T}$ tai $\text{oikea} \equiv \mathbf{T}$
- siinä $\text{vasen} \wedge \text{kaava} \Rightarrow \text{oikea} \wedge \text{kaava}$, koska
 - jos siinä $\text{kaava} \equiv \mathbf{T}$, niin $\text{vasen} \wedge \text{kaava} \equiv \text{vasen} \Rightarrow \text{oikea} \equiv \text{oikea} \wedge \text{kaava}$
 - muussa tapauksessa $\text{kaava} \neq \mathbf{T}$, joten $\text{vasen} \wedge \text{kaava} \neq \mathbf{T}$
- siinä $\text{kaava} \wedge \text{vasen} \Rightarrow \text{kaava} \wedge \text{oikea}$, koska
$$\text{kaava} \wedge \text{vasen} \equiv \text{vasen} \wedge \text{kaava} \Rightarrow \text{oikea} \wedge \text{kaava} \equiv \text{kaava} \wedge \text{oikea}$$
- siinä $\text{vasen} \vee \text{kaava} \Rightarrow \text{oikea} \vee \text{kaava}$, koska
 - jos siinä $\text{kaava} \neq \mathbf{T}$, niin $\text{vasen} \vee \text{kaava} \Leftrightarrow \text{vasen} \Rightarrow \text{oikea} \Leftrightarrow \text{oikea} \vee \text{kaava}$
 - muussa tapauksessa $\text{kaava} \equiv \mathbf{T}$, joten $\text{oikea} \vee \text{kaava} \equiv \mathbf{T}$
- siinä $\text{kaava} \vee \text{vasen} \Rightarrow \text{kaava} \vee \text{oikea}$, koska
$$\text{kaava} \vee \text{vasen} \equiv \text{vasen} \vee \text{kaava} \Rightarrow \text{oikea} \vee \text{kaava} \equiv \text{kaava} \vee \text{oikea}$$

Lausekkeen korvaaminen muuten yhtäsuurella mutta enemmän määritellyllä

Jos $\text{määr}(\text{vasen}) \Rightarrow \text{vasen} = \text{oikea}$ ja X ei esiinny $\text{isompi_kaava}(X)$:ssä
minkään muiden alaisuudessa kuin $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$,
niin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \Rightarrow \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$.

- esim. $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x}$
 $\equiv (\sqrt{x^2 - 4})^2 = (\sqrt{3x})^2$ $\sqrt{x^2 - 4}$ tai $\sqrt{3x}$ on määrittelemätön
tai kumpikin on ei-negatiivinen
 $\Rightarrow x^2 - 4 = 3x$ tämän ruudun päättelysääntö kahdesti
 $\equiv x = -1 \vee x = 4$ 2. asteen yhtälön ratkaisu

tarkastus: $\sqrt{(-1)^2 - 4} = \sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} \equiv \mathbf{U}$, $\sqrt{4^2 - 4} = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} \equiv \mathbf{T}$

Perustelu

- ainoa aikaisemmasta poikkeava tapaus on että vasen ei ole ja oikea on määritelty
 - silloin $\text{relaatio}(\text{vasen}) \equiv \mathbf{U}$ ja $\text{relaatio}(\text{oikea}) \neq \mathbf{U}$
 - $\neg \mathbf{U}$ tuottaa $\mathbf{U}$
 - $\mathbf{U} \wedge \text{kaava}$ tuottaa $\mathbf{U}$ tai saman kuin kaava tuottaa, ja samoin symboleille $\vee, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
- $\Rightarrow \text{isompi_kaava}(\text{vasen})$
- joko tuottaa $\mathbf{U}$, jolloin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \Rightarrow \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$
 - tai ei riipu vasen :sta, jolloin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \equiv \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$

Älä sekoita " $\Rightarrow$ " (jos ... niin ...) ja " $\Leftrightarrow$ " (... jos ja vain jos ...) toisiinsa!

- älä sekoita niitä, vaikka näkisit muiden sekoittavan!
 - esim. matemaattisissa määritelmissä sanotaan toisinaan "jos ... niin ...", vaikka tarkoitetaan "... jos ja vain jos ..."
- *vasen* $\Rightarrow$ *oikea* on yksisuuntainen
 - sallii, että *vasen* ei ole totta mutta *oikea* on silti totta
 - *oikea* saattaa sisältää vähemmän informaatiota muuttujien arvoista kuin *vasen*
- esim. jos kaupungissa on yliopisto, niin siellä on rautatieasema:

	on yliopisto	on rautatieasema
Viitasaari	F	F
Jämsä	F	T
(ei esimerkkejä)	T	F
Jyväskylä	T	T

- esim. $3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ on puutteellinen yhtälön ratkaisu
 - lupaa, että muita juuria ei ole kuin 2
 - ei lupaa, että 2 on juuri
- *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* on kaksisuuntainen
 - $3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$ lupaa että 2 on juuri ja että muita juuria ei ole

Mahdottomasta seuraa mitä tahansa (principle of explosion)

Jos lähtökohdat ovat mahdottomat, on mikä tahansa johtopäätös pätevä.

- *vasen* $\Rightarrow$ *oikea* tarkoittaa: jokaisessa mahdollisessa tilanteessa, jossa *vasen* on tosi, myös *oikea* on tosi
- jos *vasen* on mahdoton, niin *vasen* ei ole tosi missään mahdollisessa tilanteessa
 $\Rightarrow$ *oikean* ei tarvitse olla tosi missään mahdollisessa tilanteessa
- vastaesimerkkien kautta ajateltuna:
 - ei ole mahdollista tilannetta, jossa *vasen* on tosi
 - $\Rightarrow$ ei ole mahdollista tilannetta, jossa *vasen* on tosi mutta *oikea* ei ole
 - $\Rightarrow$ ei ole vastaesimerkkiä päättelyaskeleelle *vasen* $\Rightarrow$ *oikea*
- esim. **jokainen Suomen kuninkaallinen on ainakin kolme metriä pitkä**
 - Suomella ei ole kuninkaallisia
 - $\Rightarrow$ Suomella ei ole alle kolme metriä pitkää kuninkaallista
 - $\Rightarrow$ ei ole vastaesimerkkiä
- tämän osoitti Guillaume de Soissons 1100-luvulla
- nykyisin se on laajalti hyväksytty
- jos et halua hyväksyä sitä, niin tutustu parakonsistenttiin logiikkaan

Päätely voi olla pätevä, vaikka lopputulos olisi mahdoton!

- esim. $x = x + 1 \Rightarrow 1 = 2$ on pätevä päätely
 - itse asiassa sen saa helposti tutuilla päätelysäännöillä!

$$\begin{aligned} & x = x + 1 \\ \Rightarrow & 0 = 1 && \text{vähennetään kummaltakin puolelta } x \\ \Rightarrow & 1 = 2 && \text{lisätään kummallekin puolelle 1} \end{aligned}$$

- myös $x = x + 1 \Rightarrow x = 7$ on pätevä päätely
 - $x = x + 1 \Rightarrow 0 = 1 \Rightarrow 0(x - 7) = 1(x - 7) \Rightarrow 0 = x - 7 \Rightarrow x = 7$

- onko $x = x + 1 \Leftarrow x = 7$ pätevä päätely?
 - missä kohdassa ja miksi seuraava on väärin?

$$x = x + 1 \Leftarrow 0 = 1 \Leftarrow 0(x - 7) = 1(x - 7) \Leftarrow 0 = x - 7 \Leftarrow x = 7$$

- myös $x^2 = -1 \Rightarrow x = 7$ on reaaliluvuilla pätevä päätely
 - reaaliluvuilla $x^2 \geq 0$, joten $-1 \geq 0$
 - tietenkin $-1 \leq 0$

– jos $a \geq b$ ja $a \leq b$, niin $a = b$

$$\Rightarrow -1 = 0 \Rightarrow -1(7 - x) = 0(7 - x) \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$$

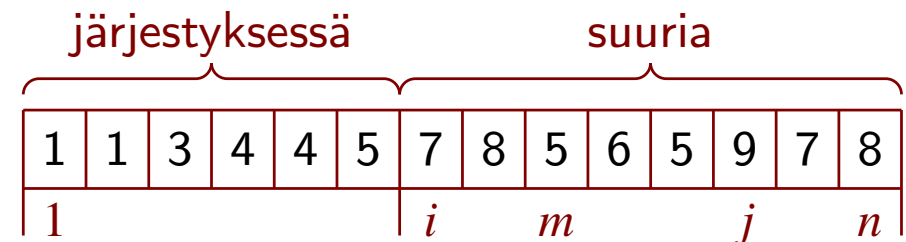
- olisi liian vaikeaa rakentaa päätelysäännöt sellaisiksi, että mahdottomuudesta ei seuraisi mitä tahansa
 - toisaalta tämä ilmiö ei tuota olemassa olevia asioita koskevia väriä johtopäätöksiä
- $\Rightarrow$ sen kanssa voi ja pitää elää!

Esimerkki: SELECTION-SORT

- järjestää taulukon $A[1 \dots n]$ kasvavaan suuruusjärjestykseen
- etsii taulukon ensimmäisen pienimmän ja vaihtaa sen ensimmäiseksi; etsii loppuosan ensimmäisen pienimmän ja vaihtaa sen loppuosan ensimmäiseksi jne.
 - "ensimmäisen pienimmän" eikä "pienimmän", koska yhtäsuuria voi olla monta

1. osuus $A[1 \dots i - 1]$ on aina rivin 1 alussa kasvavassa suuruusjärjestyksessä
2. jokainen osuuden $A[i \dots n]$ alkio on vähintään yhtä suuri kuin jokainen osuuden $A[1 \dots i - 1]$ alkio

```
1  for  $i := 1$  to  $n - 1$  do
2       $m := i$ 
3      for  $j := i + 1$  to  $n$  do
4          if  $A[j] < A[m]$  then  $m := j$ 
5       $x := A[i]; A[i] := A[m]; A[m] := x$ 
```



- alussa $i = 1$, joten järjestyksessä olevien osuus on tyhjä
 - onko se silloin kasvavassa suuruusjärjestyksessä, eli onko 1. silloin tosi?
- ihmiskunta voi itse päättää sanojen merkitykset, kunhan on niille johdonmukainen
- "tyhjä osuus on järjestyksessä" on kätevämpi kuin "... ei ole järjestyksessä" tai "ei ole määritetty, onko", koska alkutilanteesta ei tarvitse tehdä erikoistapausta 1.:ssä

- se täsmää periaatteeseen "tosi, jos ja vain jos ei vastaesimerkkejä"
 - vastaesimerkki järjestykselle olisi sellaiset $1 \leq k < \ell < i$, että $A[k] > A[\ell]$
 - kun $i = 0$, sellaisia ei voi olla
 - mikä on pienin osuuden koko, joka voi olla epäjärjestyksessä?
 - mikä on pienin sitä vastaava i ?

⇒ on valittu tulkinta "tyhjä osuus on järjestyksessä"

- tyhjän osuuden alkiot ovat myös enintään yhtäsuuria kuin osuuden $A[i \dots n]$ alkiot
 - ei ole olemassa liian suurta alkioita koska alkioita ei ole lainkaan

Käteviä propositiologiikan $\Rightarrow$ -lakeja

- propositiologiikan päättelyaskeleen pätevyyden voi aina tarkastaa kokeilemalla kaikki totuusarvojen yhdistelmät
- seuraavat ovat silti toisinaan näppäriä

$$vasen \wedge oikea \Rightarrow vasen$$

$$vasen \wedge oikea \Rightarrow oikea$$

Jos $kaava \Rightarrow vasen$ ja $kaava \Rightarrow oikea$ niin $kaava \Rightarrow vasen \wedge oikea$.

$$vasen \Rightarrow vasen \vee oikea$$

$$oikea \Rightarrow vasen \vee oikea$$

Jos $vasen \Rightarrow kaava$ ja $oikea \Rightarrow kaava$, niin $vasen \vee oikea \Rightarrow kaava$.

$$kaava \wedge \neg kaava \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

$$\mathbf{T} \Rightarrow kaava \vee \neg kaava \vee \neg määr(kaava)$$

$$kaava \Rightarrow määr(kaava)$$

$$määr(kaava) \equiv määr(\neg kaava)$$

5 Esimerkki: mikä tietorakenne?

Puheenaiheessa on kaksi joukkoa: Alkiot ja Sumpu

- nimen pieni alkukirjain osoittaa, että muuttuja sisältää tai toiminto tuottaa alkion
- nimen iso alkukirjain osoittaa, että muuttuja sisältää tai toiminto tuottaa sumpun

Yksi vakiosymboli ja kolme muuttujasymbolia

	toiminto	määriteltä, kun	tulos kuuluu joukkoon
v1	Tyhjä	(vakiot ovat aina määritellyt)	Sumpu
F1	$S.\text{Lisää}(a)$	$S \in \text{Sumpu} \wedge a \in \text{Alkiot}$	Sumpu
F2	$S.\text{Pois}$	$S \in \text{Sumpu} \wedge S \neq \text{Tyhjä}$	Sumpu
F3	$S.\text{eka}$	$S \in \text{Sumpu} \wedge S \neq \text{Tyhjä}$	Alkiot

- $\text{lauseke} \in \text{Sumpu}$ kertoo myös, että lauseke on määriteltä; samoin $\text{lauseke} \in \text{Alkiot}$

Neljä aksioomaa: ovat tosi jokaiselle $S \in \text{Sumpu}$ ja $a \in \text{Alkiot}$

- A1 $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(a).\text{Pois} = \text{Tyhjä}$
- A2 $S \neq \text{Tyhjä} \rightarrow S.\text{Lisää}(a).\text{Pois} = S.\text{Pois}.\text{Lisää}(a)$
- A3 $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(a).\text{eka} = a$
- A4 $S \neq \text{Tyhjä} \rightarrow S.\text{Lisää}(a).\text{eka} = S.\text{eka}$

Jokaiselle $n \geq 0$ ja $a_1 \in \text{Alkiot}, \dots, a_n \in \text{Alkiot}$ pätee

L1 Tyhjä.Lisää(a_1). $\dots$.Lisää(a_n) $\in$ Sumpu

Perustelu

- v1:n nojalla Tyhjä $\in$ Sumpu
 - oletuksen nojalla $a_1 \in \text{Alkiot}$
- $\Rightarrow$ F1:n nojalla Tyhjä.Lisää(a_1) $\in$ Sumpu
- oletuksen nojalla $a_2 \in \text{Alkiot}$
- $\Rightarrow$ F1:n nojalla Tyhjä.Lisää(a_1).Lisää(a_2) $\in$ Sumpu
- oletuksen nojalla $a_3 \in \text{Alkiot}$
- $\Rightarrow$ F1:n nojalla Tyhjä.Lisää(a_1).Lisää(a_2).Lisää(a_3) $\in$ Sumpu
- ja niin edelleen kaikkiaan n kertaa

Jokaiselle $a_1 \in \text{Alkiot}, \dots, a_n \in \text{Alkiot}$ pätee

L2 Jos $n > 0$, niin $\text{Tyhjä.Lisää}(a_1) \dots \text{Lisää}(a_n) \neq \text{Tyhjä}$.

Perustelu

- L1:n mukaan $\text{Tyhjä.Lisää}(a_1) \dots \text{Lisää}(a_{n-1})$ on määritelty
- $\Rightarrow$ sen saa asettaa muuttujan arvoksi: $S = \text{Tyhjä.Lisää}(a_1) \dots \text{Lisää}(a_{n-1})$
- jos $S = \text{Tyhjä}$, niin $S.\text{Lisää}(a_n).\text{Pois}$ on määritelty A1:n nojalla (ruutu 31)
 - muutoin $S.\text{Lisää}(a_n).\text{Pois}$ on määritelty A2:n nojalla (ruutu 31)
- $\Rightarrow S.\text{Lisää}(a_n).\text{Pois}$ on määritelty
- $\Rightarrow$ F2:n nojalla $S.\text{Lisää}(a_n) \neq \text{Tyhjä}$

Huomautus

- olemme tarkkoja, että emme kirjoita $\text{vasen} = \text{oikea}$ kun vasen tai oikea voi olla jossain mahdollisessa tilanteessa määrittelemätön
 - ruutu 31 velvoittaa siihen
- vastineeksi saamme luvan päätellä oikein johdetusta $\text{vasen} = \text{oikea}$, että vasen ja oikea ovat määritellyt jokaisessa mahdollisessa tilanteessa

Pikkutarkka esimerkki alkaa

- oletamme koko esimerkin ajan, että $a \in \text{Alkiot}$, $\dots$, $d \in \text{Alkiot}$

T

(katso ruutu 97)

$\Rightarrow \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b) \in \text{Sumpu} \wedge$

L1

$\text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b) \neq \text{Tyhjä}$

L2

$\Rightarrow \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Pois}$

$= \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Pois.Lisää}(c)$

A2

$= \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Pois.Lisää}(c)$

värejä vaihdettu

$= \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Pois.Lisää}(b).\text{Lisää}(c)$

L1, L2, A2, ruutu 84*

$= \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Pois.Lisää}(b).\text{Lisää}(c)$

värejä vaihdettu

$= \text{Tyhjä.Lisää}(b).\text{Lisää}(c)$

A1, ruutu 84

* ensimmäisen $=$ -merkin kohdalla varmistui,
että koko lauseke on määritelty

Jatketaan esimerkkiä

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Pois.Lisää}(d) \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Lisää}(d) && \text{L1, ruutu 84} \\ \Rightarrow & \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Pois.Lisää}(d).\text{Pois} \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Lisää}(d).\text{Pois} && \text{L1, L2, F2, ruutu 84} \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(c).\text{Lisää}(d) && \text{kuten edellä} \\ \Rightarrow & \text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Pois.Lisää}(d).\text{Pois.eka} \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(c).\text{Lisää}(d).\text{eka} && \text{L1, L2, F3, ruutu 84} \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(c).\text{Lisää}(d).\text{eka} && \text{värejä vaihdettu} \\ = & \text{Tyhjä.Lisää}(c).\text{eka} && \text{L1, L2, A4} \\ = & c && \text{A3} \end{aligned}$$

Olemme osoittaneet $\text{Tyhjä.Lisää}(a).\text{Lisää}(b).\text{Lisää}(c).\text{Pois.Lisää}(d).\text{Pois.eka} = c$

Yleistys

- tarkastellaan mitä tahansa Tyhjä. $O_1 \cdots O_n$, missä kukin $.O_i$ on .Pois tai .Lisää(a_i)
- jos $.O_1$ on .Pois, niin F2:n ja ruudun 30 vuoksi Tyhjä. $O_1 \cdots O_n$ ei ole määritelty
- jos $.O_1$ ei ole .Pois mutta jokin muu $.O_i$ on, voidaan ensimmäinen .Pois siirtää A2:lla vasemmalle kunnes se on $.O_2$ ja hävittää A1:llä kuten esimerkissä
 - samalla häviää .Lisää(a_1) (eikä muuta)
- tätä voidaan toistaa kunnes jono on muotoa Tyhjä.Lisää(a_1). $\cdots$.Lisää(a_m) tai osoittautuu määrittelemättömäksi
- Tyhjä.Lisää(a_1). $\cdots$.Lisää(a_m).eka
 - on määrittelemätön, jos $m = 0$ (F3)
 - $= a_1$, jos $m > 0$ ($m - 1$ kertaa A4 ja kerran A3, kuten edellä)

Havaitaan, että jos aloitetaan tyhjästä sumpusta ja tehdään lisäyksiä ja poistoja, niin

- jos tehtyjen poistojen määrä milloinkaan ylittää tehtyjen lisäysten määrän, niin sumppu on siitä alkaen määrittelemätön
- muussa tapauksessa jos tehtyjen poistojen määrä on sama kuin tehtyjen lisäysten määrä, niin sumppu on tyhjä
- muussa tapauksessa sumpussa on ekana kauimmin sumpussa ollut alkio, jota ei ole vielä poistettu, ja seuraava poisto poistaa sen

$\Rightarrow$ sumppu on jono

6 Kvanttorit

Kertaa predikaattilogiikan kaava ruudusta 21

On valittu jokin puheenaihe

- esimerkkejä: Suomen kaupungit, reaaliluvut, kokonaisluvut ja merkkijonot
- puheenaiheessa on oltava ainakin yksi alkio
- puheenaiheen alkioihin voidaan viitata (puheenaiheen) muuttujilla
- muuttujan arvo on aina määritelty, se on aina jokin puheenaiheen alkio
- propositiomuuttujan arvo on totuusarvo **F**, **U** tai **T**

Lausekkeet

- voivat sisältää vakiosymboleita, muuttujia ja funktiosymboleita
 - myös laskutoimitukset kuten "+" ovat funktiosymboleita
- lauseke tuottaa arvon puheenaiheen joukosta, tai ei tuota
 - lausekkeen arvo voi olla määrittelemätön, esim. $\frac{1}{0}$, $\sqrt{-1}$ ja tyhjän merkkijonon ensimmäinen merkki
 - jos ainakin yksi funktiosymbolin argumentti on määrittelemätön, niin myös tulos on määrittelemätön

Relaationsymbolit

- argumentteina lausekkeita
- tuottavat totuusarvoja **F**, **U** tai **T**
 - tulos on **U** jos ja vain jos ainakin yksi argumentti on määrittelemätön
- esimerkiksi $<$, $\geq$ ja $=$ ovat relaationsymboleita
 - $=$ ja $\neq$ ovat käytettävissä kaikissa puheenaiheissa
 - muilta osin käytettävissä olevat relaationsymbolit määräytyvät puheenaiheesta

Tyypilliset matematiikan kaavat ovat predikaattilogiikan, eivät propositiologiikan kaavoja

- esimerkkejä: $1 + 1 = 2$, $x = 4$, $3x - 5 = 7$, $x^2 + 2x - 15 = 0$, $x = -5 \vee x = 3$,
 $3x + y = 1 \wedge 5x + 2y = 4$, $x = -2 \wedge y = 7$, $\frac{x+1}{x-2} < x - 3$ ja $1 < x < 2 \vee x > 5$
- se, mikä logiikassa ilmaistaan kvanttoreilla, ilmaistaan matematiikassa tyypillisesti sanallisesti
 - aiheuttaa matematiikassa monimutkaisissa tilanteissa epäselvyyttä
 - saattaa vaikeuttaa kvanttoreiden oppimista

Kaikkikvanttori (universal quantifier)

$\forall x$: kaava tuottaa **T** jos ja vain jos kaava tuottaa **T** jokaisella x :n arvolla.

$\forall x$: kaava tuottaa **F** jos ja vain jos kaava tuottaa **F** ainakin yhdellä x :n arvolla.

Muussa tapauksessa $\forall x$: kaava tuottaa **U**.

puheenaihe	esimerkki	tuottaa	kvantifioitu kaava tuottaa		
			F , kun	U , kun	T , kun
reaaliluvut	$\forall x : x^2 \geq 0$	T			aina
reaaliluvut	$\forall x : x^2 > 0$	F	$x = 0$		$x \neq 0$
reaaliluvut	$\forall x : x^2 = -1$	F	aina		
reaaliluvut	$\forall a : \forall b : a + b = b + a$	T			aina
reaaliluvut	$\forall x : (x > 1 \rightarrow x \geq 2)$	F	$1 < x < 2$		$x \leq 1 \vee x \geq 2$
kokonaisluvut	$\forall x : (x > 1 \rightarrow x \geq 2)$	T			aina
reaaliluvut	$\forall x : (x = 1 \rightarrow x = 2)$	F	$x = 1$		$x \neq 1$
reaaliluvut	$\forall x : \frac{x}{x} = 1$	U		$x = 0$	$x \neq 0$
reaaliluvut	$\forall x : \frac{x}{x} = 2$	F	$x \neq 0$	$x = 0$	
reaaliluvut	$\forall x : \frac{x}{x} = x$	F	$x \neq 0 \wedge x \neq 1$	$x = 0$	$x = 1$
reaaliluvut	$\forall x : \frac{1}{(x-3)^2} \leq 0$	F	$x \neq 3$	$x = 3$	

Olemassaolokvanttori (existential quantifier)

$\exists x$: kaava tuottaa **T** jos ja vain jos kaava tuottaa **T** ainakin yhdellä x :n arvolla.

$\exists x$: kaava tuottaa **F** jos ja vain jos kaava tuottaa **F** jokaisella x :n arvolla.

Muussa tapauksessa $\exists x$: kaava tuottaa **U**.

puheenaihe	esimerkki	tuottaa	kvantifioitu kaava tuottaa		
			F , kun	U , kun	T , kun
reaaliluvut	$\exists x : x^2 \geq 0$	T			aina
reaaliluvut	$\exists x : x^2 > 0$	T	$x = 0$		$x \neq 0$
reaaliluvut	$\exists x : x^2 = -1$	F	aina		
reaaliluvut	$\exists a : \exists b : a + b = b + a$	T			aina
reaaliluvut	$\exists x : (x > 1 \rightarrow x \geq 2)$	T	$1 < x < 2$		$x \leq 1 \vee x \geq 2$
kokonaisluvut	$\exists x : (x > 1 \rightarrow x \geq 2)$	T			aina
reaaliluvut	$\exists x : (x = 1 \rightarrow x = 2)$	T	$x = 1$		$x \neq 1$
reaaliluvut	$\exists x : \frac{x}{x} = 1$	T		$x = 0$	$x \neq 0$
reaaliluvut	$\exists x : \frac{x}{x} = 2$	U	$x \neq 0$	$x = 0$	
reaaliluvut	$\exists x : \frac{x}{x} = x$	T	$x \neq 0 \wedge x \neq 1$	$x = 0$	$x = 1$
reaaliluvut	$\exists x : \frac{1}{(x-3)^2} \leq 0$	U	$x \neq 3$	$x = 3$	

Kvanttorien yhteydessä käytettävä välimerkki vaihtelee kirjallisuudessa

- ":" on tietojenkäsittelytieteessä melko yleinen
- matematiikassa ja logiikassa on tavallista, että välimerkkiä ei ole lainkaan
 - vastaavasti käytetään enemmän sulkeita, esim. $\forall a(1a = a)$ tai jopa $(\forall a)(1a = a)$

Laskujärjestys

- kirjallisuudessa on tavallista, että kvanttorit sitovat kuten $\neg$
 - $\Rightarrow$ laskettaisiin ennen kuin $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
 - esim. $\forall x : x < 0 \vee x \geq 0$ tarkoittaisi samaa kuin $(\forall x : x < 0) \vee x \geq 0$
 - se kuitenkin lisäisi merkittävästi sulkeiden tarvetta
- $\Rightarrow$ tällä kurssilla ja MathCheckissä kvanttorit sitovat heikommin kuin $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$
- esim. $\forall x : x < 0 \vee x \geq 0$ tarkoittaa samaa kuin $\forall x : (x < 0 \vee x \geq 0)$, ja on tosi
 - esim. $\forall x : x \geq 2 \rightarrow x \geq 5$ tarkoittaa samaa kuin $\forall x : (x \geq 2 \rightarrow x \geq 5)$, ja on epätosi
- silti kvanttorin vaikutusalue loppuu viimeistään kun vastaan tulee $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ tai $\equiv$
 - ne eivät ole loogisia operaattoreita, vaan päättelyoperaattoreita
- $\Rightarrow$ ne eivät esiinny kaavojen sisällä, vaan kaavojen välissä
- $\Rightarrow$ koko kaava loppuu niiden kohdalla
- esim. $\forall x : x \geq 2 \Rightarrow x \geq 5$ tarkoittaa samaa kuin $(\forall x : x \geq 2) \Rightarrow x \geq 5$; se on pätevä, koska $\forall x : x \geq 2$ on epätosi!

Tosia esimerkkejä eri puheenaiheista

- reaaliluvut: $\forall x : x \geq 0 \rightarrow \exists y : y^2 = x$
- reaaliluvut: $\forall x : x \geq 7 \rightarrow \exists y : y^2 = x$
- kokonaisluvut: $\forall n : \forall m : m > 0 \rightarrow \exists q : \exists r : n = qm + r \wedge 0 \leq r < m$
- merkkijonot: $\forall \alpha : \forall \beta : \text{takaperin}(\alpha\beta) = \text{takaperin}(\beta)\text{takaperin}(\alpha)$
 - $\text{takaperin}(\text{yli}) = \text{ily}$
 - $\text{takaperin}(\text{opisto}) = \text{otsipo}$
 - $\text{takaperin}(\text{yliopisto}) = \text{otsipoily} = \text{takaperin}(\text{opisto})\text{takaperin}(\text{yli})$
- merkkijonot: $\exists \alpha : \text{takaperin}(\alpha) = \alpha$
 - saippuakauppia
- taulukot $A[1 \dots n]$: $\forall i : 1 \leq i \leq n \rightarrow \exists j : 1 \leq j \leq n \wedge A[i] = A[j]$
 - valitaan j :ksi i

Tilanteesta riippuvia esimerkkejä eri puheenaiheista

- kokonaisluvut: $\exists k : n = 3k$
 - tosi, jos ja vain jos n on jaollinen kolmella
- merkkijonot: $\exists \beta : \alpha = \beta\beta$
 - tosi esim. kun $\alpha = \text{heihei}$ mutta epätosi esim. kun $\alpha = \text{heippa}$
- taulukot $A[1 \dots n]$: $\forall i : 1 \leq i < n \rightarrow A[i] \leq A[i+1]$
 - tosi, jos ja vain jos A on kasvavassa suuruusjärjestyksessä

Kertaa vapaa ja sidottu muuttujan esiintymä sekä avoin ja suljettu kaava ruudusta 25

- esim. $x = 0 \wedge (\exists x : x^2 = 2x) \vee x = 1$ sisältää kaksi vapaata ja kolme sidottua x :n esiintymää
- vapaana esiintyvä muuttuja tarkoittaa eri muuttujaa kuin sidottuna esiintyvä, vaikka sillä olisi sama nimi
- myös eri kvantifioinneilla luodut muuttujat kannattaa ajatella eri muuttujiksi
 - esim. seuraava sisältää neljä eri muuttujaa, joiden nimi on x :

$$(\exists x : (\forall x : x^2 \neq 2) \vee x^2 = 2) \vee x \neq 1 \wedge (\forall x : x^2 > 0 \vee x = 0) \vee x = 1$$

Jokainen seuraavista väittää eri asiaa:

- $\forall x : x > 5$ tuottaa **F**, koska $x > 5$ tuottaa **F** esim. kun $x = 2$
- $x > 5$ tuottaa **F** tai **T**, riippuen x :n arvosta
- $\exists x : x > 5$ tuottaa **T**, koska $x > 5$ tuottaa **T** esim. kun $x = 8$

Tärkeä ero

- x käy kaavoissa $\forall x : \text{kaava}$ ja $\exists x : \text{kaava}$ läpi puheenaiheen *kaikki* arvot, mutta päätelyaskelissa *vasen* $\Rightarrow$ *oikea*, *vasen* $\equiv$ *oikea* jne. vain arvot *mahdollisissa tilanteissa*
- esim. jos on oletettu $x > 5$, niin $2x \geq 7 \Leftrightarrow \mathbf{T}$ on pätevä mutta $\forall x : 2x \geq 7$ tuottaa $\mathbf{F}$
 - $x > 5 \Leftrightarrow 2x > 10 \Rightarrow 2x \geq 7$
 - kun $x = 3$, $2x \geq 7$ tuottaa $\mathbf{F}$
- kaavan
 - sidotut muuttujat saavat kaikki puheenaiheen arvot
 - vapaat muuttujat saavat vain voimassa olevien oletusten sallimat arvot
- esim. $\forall x : x^2 + y > 2$
 - tuottaa $\mathbf{F}$ tai $\mathbf{T}$ riippuen y :n arvosta
 - on yhtätosi kuin $y > 2$ $\Rightarrow$ jos on oletettu $y \geq 7$, niin $\forall x : x^2 + y > 2 \equiv \mathbf{T}$
- jos samanniminen muuttuja esiintyy sekä vapaana että sidottuna, niin
 - sen vapaat esiintymät ovat eri muuttuja kuin sen sidotut esiintymät $\Rightarrow$ voimassa olevat oletukset vaikuttavat sen vapaisiin mutta eivät sidottuihin esiintymiin
- esim. vaikka $1 \leq x < y \Rightarrow xy > 1$ ja vaikka $y = 0 \Rightarrow \neg \exists x : xy = 1$
 - oletuksen $1 \leq x < y$ alaisuudessa on $\exists x : xy = 1$ reaaliluvuilla tosi
 - $1 \leq x < y \rightarrow \exists x : xy = 1$ on reaaliluvuilla tosi

Symbolit $\forall$ ja $\exists$ saattavat vaihtaa sitä mitä muuttujaa jokin nimi tarkoittaa, jolloin välitulos voi muuttua niiden alaisuuteen siirryttäessä

- esim. kokonaisluvuilla

n on jaollinen kolmella	$\exists k : n = 3k$	oikein
$2i + 1$ on jaollinen kolmella	$\exists k : 2i + 1 = 3k$	oikein
k on jaollinen kolmella	$\exists k : k = 3k$	väärin, sanoo "jokin luku on 0"
$2k + 1$ on jaollinen kolmella	$\exists k : 2k + 1 = 3k$	väärin, sanoo "jokin luku on 1"

$\Rightarrow$ jos $\forall$ ja $\exists$ sallitaan, niin tarvitaan lisäehto varmistamaan, että virhettä ei tapahdu: mikään sijoitettavan lausekkeen muuttuja ei saa joutua sidotuksi sijoituksessa

- tarvittaessa $\forall$:lla ja $\exists$:lla luotujen muuttujien nimet voi vaihtaa

Jos y ei esiinny vapaana eikä sidottuna $kaava(x)$:ssä, niin
 $\forall x : kaava(x) \equiv \forall y : kaava(y)$ ja $\exists x : kaava(x) \equiv \exists y : kaava(y)$.

- esim.

k on jaollinen kolmella	$\exists h : k = 3h$	oikein
k on jaollinen kolmella	$\exists i : k = 3i$	oikein
$2k + 1$ on jaollinen kolmella	$\exists h : 2k + 1 = 3h$	oikein
- tähän palataan kun $\forall$ ja $\exists$ käsitellään kunnolla

Osakaavan korvaaminen yhtätodella

Jos

1. $\text{vasen} \equiv \text{oikea}$
2. X ei esiinny $\text{isompi_kaava}(X)$:ssä sellaisen $\forall x$ tai $\exists x$ alaisuudessa, jonka x esiintyy vapaana voimassa olevissa oletuksissa
niin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \equiv \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$.

Huomautuksia

- kohta näemme, että X :ään vaikuttavat $\forall x$ ja $\exists x$ saavat sitoa sellaisia kaavan vasen ja/tai oikea vapaita muuttujia, jotka eivät esiinny vapaina oletuksissa
 $\Rightarrow$ kiellettyä on vain, että samanaikaisesti
 - x esiintyy vapaana voimassa olevissa oletuksissa
 - x esiintyy vapaana kaavassa vasen tai oikea tai molemmissa
 - X esiintyy isompi_kaava :ssa jonkin $\forall x$ tai $\exists x$ alaisuudessa
- säännössä ei mainita, että x saa esiintyä vapaana oletuksissa jos se ei esiinny vapaana kaavassa vasen eikä oikea , koska se monimutkaistaisi sääntöä ilman vastaavaa hyötyä
 - kaavan merkitys ei muutu, jos x :n nimi vaihdetaan sellaiseen, joka ei esiinny vapaana niistä missään

Perustelu etenee *isompi_kaava*:n rakenteen mukaan

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- ehdon 1 vuoksi siinä tilanteessa *vasen* $\equiv$ *oikea*
 - ts. siinä tilanteessa *vasen* tuottaa saman totuusarvon kuin *oikea*
- siinä tilanteessa myös $\neg$ *vasen* $\equiv$ $\neg$ *oikea*, *vasen* $\wedge$ *kaava* $\equiv$ *oikea* $\wedge$ *kaava*,
kaava $\wedge$ *vasen* $\equiv$ *kaava* $\wedge$ *oikea* ja samoin symboleille $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$, koska tuotettu totuusarvo riippuu vain siitä, mitkä totuusarvot *vasen*, *oikea* ja *kaava* tuottavat
- siinä tilanteessa $\forall x : \textit{vasen}(x) \equiv \forall x : \textit{oikea}(x)$ ja $\exists x : \textit{vasen}(x) \equiv \exists x : \textit{oikea}(x)$, koska
 - ehdon 2 vuoksi *x* ei esiinny vapaana voimassa olevissa oletuksissa $\Rightarrow$ oletusten voimassaolo ei riipu *x*:n arvosta
 - esim. oletus $0 < y \leq z$: jos se pätee kun $x = 3$, niin se pätee myös kun $x = 4$ $\Rightarrow$ myös jokainen tilanne, joka saadaan tarkasteltavasta muuttamalla *x*:n arvoa on mahdollinen
- $\Rightarrow$ muiden muuttujien tarkasteltavan tilanteen mukaisilla arvoilla ja jokaisella *x*:n arvolla pätee *vasen*(*x*) $\equiv$ *oikea*(*x*)
- jos *x* ei esiinny vapaana *vasen*:ssa eikä *oikea*:ssa, niin $\forall x : \textit{vasen} \equiv \textit{vasen} \equiv \textit{oikea} \equiv \forall x : \textit{oikea}$ ja $\exists x : \textit{vasen} \equiv \textit{vasen} \equiv \textit{oikea} \equiv \exists x : \textit{oikea}$

Osakaavan korvaaminen yhtäpitävällä

Jos X ei esiinny $ja_tai_kaava(X)$:ssä minkään muiden alaisuudessa kuin $\wedge$, $\vee$ ja sellaiset $\forall x$ ja $\exists x$, joiden x ei esiinny vapaana voimassa olevissa oletuksissa, niin:

Jos $vasen \Rightarrow oikea$ niin $ja_tai_kaava(vasen) \Rightarrow ja_tai_kaava(oikea)$.

Jos $vasen \Leftrightarrow oikea$ niin $ja_tai_kaava(vasen) \Leftrightarrow ja_tai_kaava(oikea)$.

- siis
 - X :n mihinkään esiintymään vaikuttavat $\neg$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ on kielletty (koska $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$, voidaan X sallia myös $\rightarrow$:n oikeanpuoleisessa osakaavassa)
 - $\forall$ ja $\exists$ on sallittu, jos ne eivät vaikuta oletusten vapaisiin muuttujiin

Perustelu

- ruudun 101 käsittelyyn täytyy lisätä kvanttorien käsittely
- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- siinä tilanteessa $\forall x: vasen(x) \Rightarrow \forall x: oikea(x)$ ja $\exists x: vasen(x) \Rightarrow \exists x: oikea(x)$, koska
 - ehdon vuoksi x ei esiinny vapaana voimassa olevissa oletuksissa
 - $\Rightarrow$ myös jokainen tilanne, joka saadaan tarkasteltavasta muuttamalla x :n arvoa on mahdollinen
 - $\Rightarrow$ muiden muuttujien tarkasteltavan tilanteen mukaisilla arvoilla ja jokaisella x :n arvolla pätee $vasen(x) \Rightarrow oikea(x)$
- jos $vasen \Leftrightarrow oikea$ niin $vasen \Rightarrow oikea$ ja $oikea \Rightarrow vasen$, joten ...

Lausekkeen korvaaminen kaavassa yhtäsuurella yhtä aikaa määrittelemättömällä

Jos

1. jokaisessa mahdollisessa tilanteessa

$$\text{vasen} = \text{oikea} \vee (\neg \text{määr}(\text{vasen}) \wedge \neg \text{määr}(\text{oikea}))$$

2. X ei esiinny $\text{isompi_kaava}(X)$:ssä sellaisen $\forall x$ tai $\exists x$ alaisuudessa, jonka x esiintyy vapaana voimassa olevissa oletuksissa

niin $\text{isompi_kaava}(\text{vasen}) \equiv \text{isompi_kaava}(\text{oikea})$.

Perustelu

- jokaiselle isompi_kaava :n $\forall x$ ja $\exists x$ pätee
 - ehdon 2 vuoksi x ei esiinny vapaana voimassa olevissa oletuksissa $\Rightarrow$ jokainen tilanne, joka saadaan mahdollisesta tilanteesta muuttamalla x :n arvoa on mahdollinen
- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- jos siinä $\neg \text{määr}(\text{vasen}) \wedge \neg \text{määr}(\text{oikea})$, niin x :n tilalle tulee määrittelemätön sekä $\text{isompi_kaava}(\text{vasen})$:ssa että $\text{isompi_kaava}(\text{oikea})$:ssa
 - $\Rightarrow \text{isompi_kaava}(\text{vasen})$ tuottaa saman totuusarvon kuin $\text{isompi_kaava}(\text{oikea})$
- muussa tapauksessa x :n tilalle tulee sama arvo $\text{isompi_kaava}(\text{vasen})$:ssa kuin $\text{isompi_kaava}(\text{oikea})$:ssa
 - $\Rightarrow \text{isompi_kaava}(\text{vasen})$ tuottaa saman totuusarvon kuin $\text{isompi_kaava}(\text{oikea})$

????

Kaksiarvologiikassa, jos vapaat muuttujat ovat x ja y , niin $\text{vasen}(x,y) \equiv \text{oikea}(x,y)$ pätee jos ja vain jos $\forall x : \forall y : \text{oletukset}(x,y) \wedge \text{vasen}(x,y) \leftrightarrow \text{oletukset}(x,y) \wedge \text{oikea}(x,y)$ on tosi

- koska käytetään kaksiarvologiikkaa, kaavat eivät tuota **U**
- jos **yläriville** on vastaesimerkki (x,y) , niin sille
 - $\text{oletukset}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ ja $(\text{vasen}(x,y) \equiv \mathbf{F}$ ja $\text{oikea}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ tai toisinpäin) $\Rightarrow$ **alarivi** tuottaa **F**
- jos **alarivi** tuottaa **F**, niin on olemassa sellaiset x ja y , että
 - $\text{oletukset}(x,y) \wedge \text{vasen}(x,y) \equiv \mathbf{F}$ ja $\text{oletukset}(x,y) \wedge \text{oikea}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ tai toisinpäin $\Rightarrow \text{oletukset}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ ja $(\text{vasen}(x,y) \equiv \mathbf{F}$ ja $\text{oikea}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ tai toisinpäin)
- $\Rightarrow$ **yläriville** on vastaesimerkki

Kolmiarvologiikassa vastaava ei päde

- vastaesimerkki: $\text{oletukset}(x,y) \equiv \mathbf{T}$ ja $\text{vasen}(x,y) \equiv \text{oikea}(x,y) \equiv y = \sqrt{x}$

Muuttujan joutuminen sidotuksi

- muuttuja y joutuu sidotuksi kun $lauseke$ sijoitetaan x :n tilalle $kaava(x)$:ssä, jos ja vain jos
 - y esiintyy $lauseke$:ssa
 - ainakin yksi x :n esiintymä $kaava(x)$:ssä on jonkin $\forall y$ tai $\exists y$ alaisuudessa

Kaikkikvanttorin poistolaki

Jos $\forall x : kaava(x) \equiv \mathbf{T}$, määr($lauseke$) $\equiv \mathbf{T}$ ja mikään $lauseke$:n muuttuja ei joudu sidotuksi $kaava(lauseke)$:ssa, niin $kaava(lauseke) \equiv \mathbf{T}$.

Perustelu

- tarkastellaan mitä tahansa mahdollista tilannetta
- koska mikään $lauseke$:n muuttuja ei joudu sidotuksi, tuottaa $lauseke$ osana $kaava(lauseke)$:tta saman tuloksen kuin irrallaan
- koska määr($lauseke$) $\equiv \mathbf{T}$, tuottaa $lauseke$ arvon
- koska $kaava(x)$ pätee jokaisella x :n arvolla, se pätee myös ym. arvolla

7 Lopuksi