Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Useimmat mallivastaukset ovat korkeintaan kahden rivin pituisia, mutta osa on pitkiä.

A tarkoittaa, että aurinko paistaa. L tarkoittaa, että luen tenttiin. K tarkoittaa, että lähden kävelylle. Ilmaise seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. Aurinko paistaa mutta en lähde kävelylle. $A \wedge \neg K$
2. Lähden kävelylle tai luen tenttiin (tai sekä että). $K \vee L$
3. Lähden kävelylle tai luen tenttiin, mutta ei sekä että. $(K \vee L) \wedge \neg(K \wedge L)$

Mitkä seuraavista kokonaislukuja koskevista päättelyaskelista ovat päteviä? Anna epäpäteville vastaesimerkki ja päteville lyhyt perustelu.

4. $nm > 0 \;\Rightarrow\; n > 0$ Ei, koska jos $n = m = -1$, niin $nm = 1 > 0$ mutta ei $n > 0$.
5. $n < m \leq n+1 \;\Rightarrow\; m = n+1$
   On, koska lukua n suuremmat kokonaisluvut ovat $n+1$, $n+2$, ..., ja niistä vain $n+1$ toteuttaa ehdon $m \leq n+1$.
6. $n^2 < 0 \;\Rightarrow\; 0n = 3$ On, koska vasen puoli on aina epätosi.

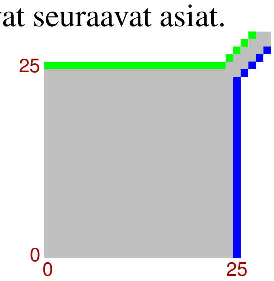
Merkintä $\lfloor a \rfloor$ tarkoittaa suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtäsuuri kuin a. Merkintä $\lceil a \rceil$ tarkoittaa pienintä kokonaislukua, joka on suurempi tai yhtäsuuri kuin a.

7. Olkoon $p = a - \lfloor a \rfloor$. Ilmaise epäyhtälönä, kuinka suuri p on vähintään ja enintään.
   $0 \leq p < 1$

Kullekin seuraavista väitteistä anna vastaesimerkki tai perustelu. Saat hyödyntää sitä, että jos k on kokonaisluku, niin pätee $\lfloor a+k \rfloor = \lfloor a \rfloor + k$ sekä $\lceil a+k \rceil = \lceil a \rceil + k$. Saat hyödyntää sitä, että $a = \lfloor a \rfloor + p$.

8. $\lfloor a \rfloor + \lceil a \rceil = 2a$
   Jos $a = \frac{1}{3}$, niin $\lfloor a \rfloor + \lceil a \rceil = \lfloor \frac{1}{3} \rfloor + \lceil \frac{1}{3} \rceil = 0 + 1 = 1$ mutta $2a = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 1$.
9. Jos a on kokonaisluku, niin $-\lceil a \rceil = \lfloor -a \rfloor$.
   Koska a on kokonaisluku, on myös $-a$ kokonaisluku, joten $-\lceil a \rceil = -a$ ja $\lfloor -a \rfloor = -a$.
10. Jos a ei ole kokonaisluku, niin $-\lceil a \rceil = \lfloor -a \rfloor$.
    $-\lceil a \rceil = -\lceil \lfloor a \rfloor + p \rceil = -(\lfloor a \rfloor + \lceil p \rceil) = -(\lfloor a \rfloor + 1) = -\lfloor a \rfloor - 1$ ja
    $\lfloor -a \rfloor = \lfloor -(\lfloor a \rfloor + p) \rfloor = \lfloor -\lfloor a \rfloor - p \rfloor = -\lfloor a \rfloor + \lfloor -p \rfloor = -\lfloor a \rfloor - 1$

Merkitään Suomen joukkueen pisteiden määrää s:llä ja Ruotsin joukkueen pisteiden määrää r:llä. Pisteet kertyvät yksi kerrallaan. Voittoon vaaditaan vähintään 25 pistettä ja vähintään 2 pistettä enemmän kuin vastapuolella. Saat luottaa siihen, että s ja r ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja, eli ei tarvitse sanoa $s \geq 0$ ja $r \geq 0$. Kirjoita kaavat, jotka sanovat seuraavat asiat.



11. Toisella joukkueella on kaksi pistettä enemmän kuin vastapuolella.
    $|s - r| = 2$
12. Suomi voitti. $s \geq 25 \wedge s \geq r+2$
13. Ottelu on kesken. $(s < 25 \vee s < r+2) \wedge (r < 25 \vee r < s+2)$

Seuraavissa tehtävissä muista käyttää merkkejä $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ja $\equiv$ oikein.

14&15. Pätee $P \leftrightarrow \mathsf{F} \Leftrightarrow \neg P$ ja $P \leftrightarrow \mathsf{T} \Leftrightarrow P$. Selvitä sijoittamalla johonkin propositiomuuttujaan F ja T, päteekö $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg Q$. Näytä välivaiheet!
Jos $Q \equiv \mathsf{F}$, niin $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow \mathsf{F}) \Leftrightarrow \neg\neg P \Leftrightarrow P$ ja $P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg \mathsf{F} \Leftrightarrow P \leftrightarrow \mathsf{T} \Leftrightarrow P$, eli sama tuli. Jos $Q \equiv \mathsf{T}$, niin $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow \mathsf{T}) \Leftrightarrow \neg P$ ja $P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P \leftrightarrow \neg \mathsf{T} \Leftrightarrow P \leftrightarrow \mathsf{F} \Leftrightarrow \neg P$, eli sama tuli.

16&17. Sievennä $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b)$. Lopputuloksen näppärään esittämiseen käytettävä symboli on matematiikassa kenties harvinainen, mutta saattaa olla ohjelmoinnista tuttu. Ainakin on helppo ymmärtää mistä on kyse ja keksiä sille itse vaikka suomenkielinen symboli.
Jos $a < b$, niin $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \frac{1}{2}(-(a-b)+a+b) = \frac{1}{2}(-a+b+a+b) = \frac{1}{2}(2b) = b$.
Jos $a \geq b$, niin $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \frac{1}{2}((a-b)+a+b) = \frac{1}{2}(2a) = a$.
Niinpä $\frac{1}{2}(|a-b|+a+b) = \max(a,b)$.
Laskelmasta puuttuu ”jos $a < b$” tms. ja ”jos $a \geq b$” tms. $-1/2$ p. Lopputulos ”a tai b” tms. $-1/2$ p.

Tarkastellaan yrityksiä sanoa kaavana ”Taulukossa $A[0\ldots n-1]$ on pelkästään nollia tai pelkästään ykkösiä”.

18. Perustele, miksi tämä on väärin: $\forall i\,; 0 \leq i < n : A[i] = 0 \vee A[i] = 1$
Sille kelpaa taulukko, jossa on sekä nollia että ykkösiä (mutta ei muuta).

19. Perustele, miksi tämä on väärin: $(A[0] = 0 \vee A[0] = 1) \wedge \forall i\,; 1 \leq i < n : A[i] = A[0]$
Se tuottaa tyhjällä taulukolla määrittelemättömän.

Esitä seuraavat taulukosta $A[0\ldots n-1]$ puhuvat väitteet kaavoina.

20. A on vähenevässä suuruusjärjestyksessä. $\forall i\,; 0 \leq i < n-1 : A[i] \geq A[i+1]$
Kukin indeksointivirhe $-1/4$ p. Vaadittu aito vähenevyys $-1/4$ p. Vertailu väärin päin $-1/4$ p. ”`AA`” eikä $\forall$ tms. $-1/4$ p.

21. Kohdassa i oleva alkio on erisuuri kuin viimeinen alkio. Jos kohtaa i ei ole, täytyy kaavasi tuottaa epätosi. $0 \leq i < n \wedge A[i] \neq A[n-1]$
Jos tässä oli ”$\exists$” tai ”$\forall$”, niin $-1/2$ p. On tärkeää oppia erottamaan sidotut eli ilmauksen sisäiset muuttujat vapaista eli sellaisista muuttujista, jotka välittävät tietoa ilmauksen ja ulkomaailman välillä. Siksi tätä asiaa korostettiin kurssilla.

22&23. Taulukossa on ainakin yksi ykkönen, ja viimeisen ykkösen jälkeen on vain kakkosia.
$\exists i\,; 0 \leq i < n : A[i] = 1 \wedge \forall j\,; i < j < n : A[j] = 2$

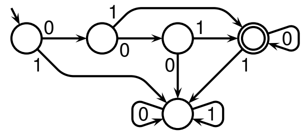
Sekalaisia kysymyksiä

24&25. Tarkastellaan väitettä ”Taulukossa $A[0 \ldots n-1]$ on ainakin yksi ykkönen, ja viimeisen ykkösen jälkeen on vain kakkosia”. Kirjoita pseudokoodilla tai jollakin ohjelmointikielellä ohjelmanpätkä, joka palauttaa `true` eli **T** jos väite pätee, ja `false` eli **F** jos se ei päde. Jos ohjelmanpätkäsi on kovin hidas, niin pisteitä voidaan vähentää.

```
for( int i = n; i-- > 0; ){
  if( A[i] == 1 ){ return true; }
  if( A[i] != 2 ){ return false; }
}
return false;
```

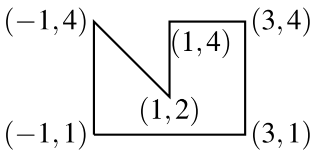
26. Mikä on lausekkeen ja kaavan tärkein ero?
Lauseke tuottaa luvun ja kaava tuottaa totuusarvon.

27. Sievennä kaava $\neg(2 < x \leq 6)$ muotoon, jossa $\neg$ ei esiinny.
$x \leq 2 \vee x > 6$



28. Mitä kaavaa kuvan DFA esittää, kun ainoa muuttuja on x?
$x = 1 \vee x = 2$

29&30. Kirjoita kaava, jonka toteuttavat täsmälleen ne x ja y, joille piste (x,y) on kuvassa olevan viivan sisäpuolella. Kuvassa on annettu kärkipisteet muodossa (x,y). Niitten väliset osuudet ovat suoria.
$-1 < x < 3 \wedge 1 < y < 4 \wedge (x + y < 3 \vee x > 1)$



loppu