Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen (ellei toisin sanota). Useimmat mallivastaukset ovat korkeintaan kahden rivin pituisia, mutta osa on pitkiä.

Tarkoittakoon P että on pakkasta, L että on lunta ja H että voi hiihtää. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. On lunta ja pakkasta. $L \wedge P$
2. On pakkasta tai lumi puuttuu. $P \vee \neg L$
3. Jos ei ole lunta niin ei voi hiihtää. $\neg L \rightarrow \neg H$
4. Ei ole niin, että voi hiihtää jos ja vain jos on pakkasta. $\neg(H \leftrightarrow P)$

Ratkaise seuraavat tehtävät kaksiarvologiikassa sijoittamalla valitsemaasi muuttujaan vuoronperään F ja T ja sieventämällä. Jokaisesta sijoituksesta näytä tulos heti sijoituksen jälkeen sekä sievennöksen lopputulos. Monimutkaisissa tapauksissa näytä myös ainakin yksi järkevä välivaihe.

5. Osoita, että ”$\vee$” on vaihdannainen.
   Jos $P \equiv \mathsf{T}$, niin $P \vee Q$ tuottaa $\mathsf{T} \vee Q \equiv \mathsf{T}$ ja $Q \vee P$ tuottaa $Q \vee \mathsf{T} \equiv \mathsf{T}$, eli saman.
   Jos $P \equiv \mathsf{F}$, niin $P \vee Q$ tuottaa $\mathsf{F} \vee Q \equiv Q$ ja $Q \vee P$ tuottaa $Q \vee \mathsf{F} \equiv Q$, eli saman.

6. Etsi mitkä tahansa sellaiset P, Q ja R, että $\neg(\neg P \vee Q) \vee R$ tuottaa eri totuusarvon kuin $\neg Q \vee P \wedge R$.
   Jos $P \equiv \mathsf{F}$, niin vasen puoli tuottaa $\neg(\neg \mathsf{F} \vee Q) \vee R \equiv \neg(\mathsf{T} \vee Q) \vee R \equiv \neg \mathsf{T} \vee R \equiv R$ ja oikea puoli tuottaa $\neg Q \vee \mathsf{F} \wedge R \equiv \neg Q \vee \mathsf{F} \equiv \neg Q$. Vastaus: $P \equiv \mathsf{F}$, $Q \equiv \mathsf{T}$ ja $R \equiv \mathsf{T}$.

7&8. Muodosta mahdollisimman yksinkertainen kaava, joka on tosi täsmälleen silloin kun $\neg(\neg P \vee Q) \vee R$ tuottaa eri totuusarvon kuin $\neg Q \vee P \wedge R$.
   Jos $P \equiv \mathsf{T}$, niin vasen puoli tuottaa $\neg(\neg \mathsf{T} \vee Q) \vee R \equiv \neg(\mathsf{F} \vee Q) \vee R \equiv \neg Q \vee R$ ja oikea puoli tuottaa $\neg Q \vee \mathsf{T} \wedge R \equiv \neg Q \vee R$, eli saman. Tapaus $P \equiv \mathsf{F}$ käsiteltiin edellä. Vastaus: $\neg P \wedge (R \leftrightarrow Q)$.

Sekalaisia kysymyksiä

9. Mitä eroa on symboleilla ”$\Leftrightarrow$” ja ”$\Rightarrow$”?
   vasen $\Rightarrow$ *oikea* sallii mutta *vasen* $\Leftrightarrow$ *oikea* ei salli, että *oikea* $\equiv \mathsf{T}$ mutta *vasen* $\not\equiv \mathsf{T}$.

10&11. Miten mikä tahansa kaava voidaan muuttaa yhtätoteen (eli ”$\equiv$”) muotoon, jossa ei esiinny symboleita $\rightarrow$ eikä $\leftrightarrow$?
   Korvataan jokainen osakaava muotoa $\mathit{vasen} \leftrightarrow \mathit{oikea}$ kaavalla $\mathit{vasen} \wedge \mathit{oikea} \vee \neg \mathit{vasen} \wedge \neg \mathit{oikea}$, ja korvataan jokainen osakaava muotoa $\mathit{vasen} \rightarrow \mathit{oikea}$ kaavalla $\neg \mathit{vasen} \vee \mathit{oikea}$.

12. Miten mikä tahansa kaava voidaan muuttaa yhtätoteen muotoon, jossa ei esiinny symbolia $\exists$?
   Korvataan jokainen osakaava muotoa $\exists x : \mathit{kaava}$ kaavalla $\neg \forall x : \neg \mathit{kaava}$.

13&14. Jos K_1 ja K_2 ovat mitkä tahansa kaavat, niin $\exists x : (K_1 \vee K_2) \equiv (\exists x : K_1) \vee (\exists x : K_2)$. Sitä hyväksi käyttäen todista, että jos L_1 ja L_2 ovat mitkä tahansa kaavat, niin $\forall x : (L_1 \wedge L_2) \equiv (\forall x : L_1) \wedge (\forall x : L_2)$.
   Olkoot $K_1 \equiv \neg L_1$ ja $K_2 \equiv \neg L_2$. Tällöin $L_1 \equiv \neg K_1$ ja $L_2 \equiv \neg K_2$. Annetun lähtökohdan perusteella ja De Morganin laeilla saadaan $\forall x : (L_1 \wedge L_2) \equiv \forall x : (\neg K_1 \wedge \neg K_2) \equiv \forall x : \neg(K_1 \vee K_2) \equiv \neg \exists x : (K_1 \vee K_2) \equiv \neg((\exists x : K_1) \vee (\exists x : K_2)) \equiv \neg(\exists x : K_1) \wedge \neg(\exists x : K_2) \equiv (\forall x : \neg K_1) \wedge (\forall x : \neg K_2) \equiv (\forall x : L_1) \wedge (\forall x : L_2)$.

15&16. Ratkaise epäyhtälö $(x-2)(x+4) > 13-2x$. Käytä symboleita $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja/tai $\Leftarrow$.
$(x-2)(x+4) > 13-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8 > 13-2x \Leftrightarrow x^2+4x-21 > 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-3) > 0$
$\Leftrightarrow x < -7 \vee x > 3$

Epäyhtälö $\frac{x+1}{x-2} < x-3$ kannattaa ratkaista jakamalla se tapauksiin. Tapauksista tulee kaavat *kaava*1, *kaava*2 ja *kaava*3, joille pätee $\frac{x+1}{x-2} < x-3 \equiv kaava1 \vee kaava2 \vee kaava3$. Yksi tapauksista on hyvin yksinkertainen. Käytä symboleita $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ja/tai $\Leftarrow$. Saat käyttää alipäättelyitä.

17. Kirjoita *kaava*1 ja ratkaise siitä x. $x = 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow \mathsf{F}$

18. Kirjoita *kaava*2 ja ratkaise siitä x.
$x < 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x < 2 \wedge x+1 > (x-2)(x-3)$
Pätee $x+1 > (x-2)(x-3) \Leftrightarrow x+1 > x^2-5x+6 \Leftrightarrow x^2-6x+5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0$
$\Leftrightarrow 1 < x < 5$.
Siksi $x < 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x < 2 \wedge 1 < x < 5 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

19. Kirjoita *kaava*3 ja ratkaise siitä x.
$x > 2 \wedge \frac{x+1}{x-2} < x-3 \Leftrightarrow x > 2 \wedge x+1 < (x-2)(x-3) \Leftrightarrow x > 2 \wedge (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow$
$x > 2 \wedge (x < 1 \vee x > 5) \Leftrightarrow x > 5$

20. Ratkaise $\frac{x+1}{x-2} < x-3$. $1 < x < 2 \vee x > 5$

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1\ldots n]$ puhuvat väitteet.

21. Taulukko on palindromi, eli sama luettuna etuperin ja takaperin. (Esimerkiksi $[2,0,1,2]$ ei ole palindromi, mutta $[2,0,0,2]$ on.) $\forall i\,; 1 \le i \le n : A[i] = A[n-i+1]$

22. Kohta k on laillinen, ja siinä oleva alkio esiintyy myös ensimmäisessä kohdassa.
$2 \le k \le n \wedge A[k] = A[1]$

23. Taulukko jakautuu alkuosaan ja loppuosaan siten, että alkuosan jokainen alkio on positiivinen ja loppuosan jokainen alkio on negatiivinen. (Osat saavat olla tyhjiä.)
$\exists i\,; 0 \le i \le n : (\forall j\,; 1 \le j \le i : A[j] > 0) \wedge (\forall k\,; i < k \le n : A[k] < 0)$

Tarkastellaan oheista ohjelmaa. Oletetaan, että $n \ge 1$ ja taulukot indeksoidaan $0,\ldots,n-1$.

```
1  j := 0;  B[0] := A[0];  i := 1
2  while i < n do
3     if A[i] ≠ B[j] then
4        j := j + 1;  B[j] := A[i]
5     i := i + 1
```

24. Kerro, mitä ohjelma tekee ja/tai minkä palvelun se tuottaa. Tässä vastauksessa ei ole pakko kirjoittaa kaavoja, mutta saat kirjoittaa jos haluat.
Kopioi A:n sisällön B:hen siten, että peräkkäisistä yhtäsuurista kopioidaan vain ensimmäinen.

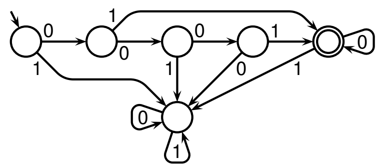
25. Perustele, että aina rivin 2 alussa $j < i$.
Riviltä 1 tultaessa $j = 0$ ja $i = 1$. Sen jälkeen joka kierroksella i kasvaa yhdellä ja j kasvaa yhdellä tai ei muutu.

26. Anna sellaiset x ja y, että x on mahdollisimman pieni, y on mahdollisimman suuri ja aina rivin 2 alussa $\forall k\,; x \le k \le y : B[k-1] \ne B[k]$. $x = 1 \wedge y = j$

27. Perustele, että yllä mainituilla x:n ja y:n arvoilla aina rivin 2 alussa
$\forall k\,; x \leq k \leq y : B[k-1] \neq B[k]$.
Edellisen tehtävän mukaan kaava on $\forall k\,; 1 \leq k \leq j : B[k-1] \neq B[k]$. Riviltä 1 tultaessa $j = 0$, joten kaava on tosi koska väli $1 \leq k \leq j$ on tyhjä. Jos silmukan kierroksella $A[i] = B[j]$, niin mikään kaavaan vaikuttava ei muutu. Muussa tapauksessa j kasvaa yhdellä. Uudella j:n arvolla pätee rivien 4 ja 3 vuoksi $B[j] = A[i] \neq B[j-1]$, ja osataulukon $B[0 \ldots j-1]$ kannalta mikään ei ole muuttunut.

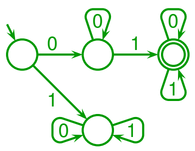
28. Kirjoita sellaiset *ehto*1 ja *ehto*2, että ne eivät sisällä symboleita $\forall$, $\exists$, A eikä B; aina rivin 2 alussa $\forall k\,; \mathit{ehto}1 : \exists h\,; \mathit{ehto}2 : B[k] = A[h]$; ja niin saatu kaava kertoo ohjelman tilasta mahdollisimman paljon.
$\mathit{ehto}1 \;\equiv\; 0 \leq k \leq j$ ja $\mathit{ehto}2 \;\equiv\; 0 \leq h < i \land h \geq k$

Kokonaislukujen logiikan DFA-toteutukseen liittyviä tehtäviä



29. Mitä kaavaa kuvan DFA esittää,
jos muuttujien luettelo on x?
$x = 1 \lor x = 4$

30. Piirrä DFA, joka esittää kaavaa $x > 0$, jos muuttujien luettelo on x.



loppu