

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen (ellei toisin sanota). Useimmat mallivastaukset ovat korkeintaan kahden rivin pituisia, mutta osa on pitkiä.

Tarkoittakoon  $P$  että on pakkasta,  $L$  että on lunta ja  $H$  että voi hiihtää. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. On lunta ja pakkasta.
2. On pakkasta tai lumi puuttuu.
3. Jos ei ole lunta niin ei voi hiihtää.
4. Ei ole niin, että voi hiihtää jos ja vain jos on pakkasta.

Ratkaise seuraavat tehtävät kaksiarvologiikassa sijoittamalla valitsemaasi muuttujaan vuoronperään **F** ja **T** ja sieventämällä. Jokaisesta sijoituksesta näytä tulos heti sijoituksen jälkeen sekä sievennöksen lopputulos. Monimutkaisissa tapauksissa näytä myös ainakin yksi järkevä väli-vaihe.

5. Osoita, että " $\vee$ " on vaihdannainen.
6. Etsi mitkä tahansa sellaiset  $P$ ,  $Q$  ja  $R$ , että  $\neg(\neg P \vee Q) \vee R$  tuottaa eri totuusarvon kuin  $\neg Q \vee P \wedge R$ .
- 7&8. Muodosta mahdollisimman yksinkertainen kaava, joka on tosi täsmälleen silloin kun  $\neg(\neg P \vee Q) \vee R$  tuottaa eri totuusarvon kuin  $\neg Q \vee P \wedge R$ .

Sekalaisia kysymyksiä

9. Mitä eroa on symboleilla " $\Leftrightarrow$ " ja " $\Rightarrow$ "?
- 10&11. Miten mikä tahansa kaava voidaan muuttaa yhtätöteen (eli " $\equiv$ ") muotoon, jossa ei esiinny symboleita  $\rightarrow$  eikä  $\leftrightarrow$ ?
12. Miten mikä tahansa kaava voidaan muuttaa yhtätöteen muotoon, jossa ei esiinny symbolia  $\exists$ ?
- 13&14. Jos  $K_1$  ja  $K_2$  ovat mitkä tahansa kaavat, niin  $\exists x : (K_1 \vee K_2) \equiv (\exists x : K_1) \vee (\exists x : K_2)$ . Sitä hyväksi käyttäen todista, että jos  $L_1$  ja  $L_2$  ovat mitkä tahansa kaavat, niin  $\forall x : (L_1 \wedge L_2) \equiv (\forall x : L_1) \wedge (\forall x : L_2)$ .
- 15&16. Ratkaise epäyhtälö  $(x - 2)(x + 4) > 13 - 2x$ . Käytä symboleita  $\Leftrightarrow$ ,  $\Rightarrow$  ja/tai  $\Leftarrow$ .

Epäyhtälö  $\frac{x+1}{x-2} < x - 3$  kannattaa ratkaista jakamalla se tapauksiin. Tapauksista tulee kaavat *kaava1*, *kaava2* ja *kaava3*, joille pätee  $\frac{x+1}{x-2} < x - 3 \equiv \textit{kaava1} \vee \textit{kaava2} \vee \textit{kaava3}$ . Yksi tapauksista on hyvin yksinkertainen. Käytä symboleita  $\Leftrightarrow$ ,  $\Rightarrow$  ja/tai  $\Leftarrow$ . Saat käyttää alipäättelyitä.

17. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä  $x$ .
18. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä  $x$ .
19. Kirjoita *kaava3* ja ratkaise siitä  $x$ .
20. Ratkaise  $\frac{x+1}{x-2} < x - 3$ .

**käännä**

Esitä kaavana seuraavat taulukosta  $A[1 \dots n]$  puhuvat väitteet.

21. Taulukko on palindromi, eli sama luettuna etuperin ja takaperin. (Esimerkiksi  $[2, 0, 1, 2]$  ei ole palindromi, mutta  $[2, 0, 0, 2]$  on.)
22. Kohta  $k$  on laillinen, ja siinä oleva alkio esiintyy myös ensimmäisessä kohdassa.
23. Taulukko jakautuu alkuosaan ja loppuosaan siten, että alkuosan jokainen alkio on positiivinen ja loppuosan jokainen alkio on negatiivinen. (Osat saavat olla tyhjiä.)

Tarkastellaan oheista ohjelmaa. Oletetaan, että  $n \geq 1$  ja taulukot indeksoidaan  $0, \dots, n-1$ .

24. Kerro, mitä ohjelma tekee ja/tai minkä palvelun se tuottaa. Tässä vastauksessa ei ole pakko kirjoittaa kaavoja, mutta saat kirjoittaa jos haluat.

```

1  j := 0; B[0] := A[0]; i := 1
2  while i < n do
3    if A[i] ≠ B[j] then
4      j := j + 1; B[j] := A[i]
5    i := i + 1

```

25. Perustele, että aina rivin 2 alussa  $j < i$ .

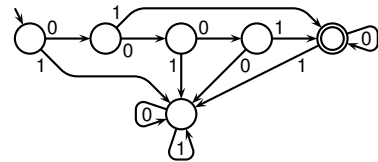
26. Anna sellaiset  $x$  ja  $y$ , että  $x$  on mahdollisimman pieni,  $y$  on mahdollisimman suuri ja aina rivin 2 alussa  $\forall k; x \leq k \leq y: B[k-1] \neq B[k]$ .

27. Perustele, että yllä mainituilla  $x$ :n ja  $y$ :n arvoilla aina rivin 2 alussa  $\forall k; x \leq k \leq y: B[k-1] \neq B[k]$ .

28. Kirjoita sellaiset *ehto1* ja *ehto2*, että ne eivät sisällä symboleita  $\forall, \exists, A$  eikä  $B$ ; aina rivin 2 alussa  $\forall k; \text{ehto1} : \exists h; \text{ehto2} : B[k] = A[h]$ ; ja niin saatu kaava kertoo ohjelman tilasta mahdollisimman paljon.

Kokonaislukujen logiikan DFA-toteutukseen liittyviä tehtäviä

29. Mitä kaavaa kuvan DFA esittää, jos muuttujien luettelo on  $x$ ?



30. Piirrä DFA, joka esittää kaavaa  $x > 0$ , jos muuttujien luettelo on  $x$ .

**loppu**