

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen (ellei toisin sanota). Useimmat mallivastaukset ovat korkeintaan yhden rivin pituisia, mutta osa on pitkiä.

Tarkoittakoon K että kesä on kiva vuodenaika, S että syksy on kiva vuodenaika ja T että talvi on kiva vuodenaika. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. Ainakin yksi näistä kolmesta vuodenaikasta on kiva. $K \vee S \vee T$
2. Kesä on mutta syksy ei ole kiva. $K \wedge \neg S$
3. Jos syksy on kiva, niin ei ole niin että sekä talvi että kesä on kiva. $S \rightarrow \neg(T \wedge K)$

Tarkastellaan kaavaa $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$.

4. Sijoita P :ksi epätosi ja sievennä. Näytä tulos heti sijoituksen jälkeen, ainakin yksi järkevä välivaihe sekä lopputulos.

$$(F \vee Q) \wedge (\neg F \vee R) \wedge \neg(F \wedge \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge T \wedge \neg F \Leftrightarrow Q$$

5. Sijoita P :ksi tosi ja sievennä kuten edellisessä tehtävässä.

$$(T \vee Q) \wedge (\neg T \vee R) \wedge \neg(T \wedge \neg Q) \Leftrightarrow T \wedge R \wedge \neg\neg Q \Leftrightarrow R \wedge Q$$

6. Käsittele $Q \wedge (\neg P \vee R)$ samalla tavalla. Todista kaksiarvologiikassa

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge (\neg P \vee R).$$

$$\text{Jos } P \Leftrightarrow F, \text{ niin } Q \wedge (\neg P \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge (\neg F \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge T \Leftrightarrow Q.$$

$$\text{Jos } P \Leftrightarrow T, \text{ niin } Q \wedge (\neg P \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge (\neg T \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge (F \vee R) \Leftrightarrow Q \wedge R.$$

$$\text{Jos } P \Leftrightarrow F, \text{ niin kumpikin puoli tuottaa } Q. \text{ Jos } P \Leftrightarrow T, \text{ niin kumpikin puoli tuottaa } Q \wedge R.$$

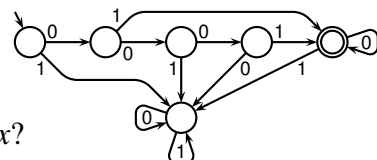
Kun yhtälöstä $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$ poistetaan itseisarvomerkkit kuten kurssilla opetettiin, saadaan *kaava1*, *kaava2* ja *kaava3*, joille pätee $2|x-1| + 3|x-5| = x+5 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2} \vee \text{kaava3}$.

7. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä x . $x < 1 \wedge -2(x-1) - 3(x-5) = x+5 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x = 2 \Leftrightarrow F$
8. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä x . $1 \leq x < 5 \wedge 2(x-1) - 3(x-5) = x+5 \Leftrightarrow x = 4$
9. Kirjoita *kaava3* ja ratkaise siitä x . $x \geq 5 \wedge 2(x-1) + 3(x-5) = x+5 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$
10. Ratkaise $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$. $x = 4 \vee x = 5\frac{1}{2}$
11. Mikä kohdista 7...9 ei tuottanut juurta yhtälölle $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$, ja miksi ei?
Kohdan 7 juuri olisi 2, mutta se ei toteuta $x < 1$.

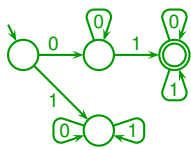
Sekalaisia kysymyksiä

12. Osoita vastaesimerkillä, että $\neg(P \wedge Q) \wedge R \not\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \wedge R$.
 $P \equiv Q \equiv R \equiv F$, vasen puoli tuottaa F ja oikea puoli tuottaa T .
13. Mitä lakia edellisessä kohdassa yritettiin käyttää ja minkälainen virhe sen käytössä tehtiin?
De Morganin lakia. Unohdettiin lisätä sulkeet tulokset $\neg P \vee \neg Q$ ympärille.

14. Mitä kaavaa kuvan DFA esittää, jos muuttujien luettelo on x ?
 $x = 1 \vee x = 4$



15. Piirrä DFA, joka esittää kaavaa $x > 0$, jos muuttujien luettelo on x .



Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1 \dots n]$ puhuvat väitteet.

16. A :n ensimmäinen alkio ei ole A :n pienin alkio.

$$\exists j; 2 \leq j \leq n : A[j] < A[1]$$

17. Kohdassa i (joka on laillinen) esiintyvä alkio on erisuuri kuin A :n viimeinen alkio.

$$1 \leq i \leq n \wedge A[i] \neq A[n]$$

18. Täsmälleen yksi A :n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.

$$\exists i; 1 < i \leq n : A[i] > A[i-1] \wedge \forall j; 1 < j \leq n \wedge i \neq j : A[j] \leq A[j-1]$$

Jos n ja m ovat kokonaislukuja, niin merkintä $m \mid n$ tarkoittaa samaa kuin $\exists k : n = mk$. Nollan kanssa erisuurten kokonaislukujen n ja m *pienin yhteinen jaettava* on pienin sellainen positiivinen kokonaisluku, että sekä m että n on sen tekijä.

19. Mitkä kokonaisluvut ovat 0 :n tekijöitä? Perustele. **Kaikki kokonaisluvut, koska $0 = m \cdot 0$.**

20. Olkoon p alkuluku. Luettele kaikki luvun p^2 tekijät suuruusjärjestyksessä.

$$-p^2, -p, -1, 1, p, p^2$$

21. Kirjoita kaava, joka sanoo, että y on n :n ja m :n pienin yhteinen jaettava. Kaavasi ei tarvitse toimia kun $n = 0 \vee m = 0$.

$$y > 0 \wedge n \mid y \wedge m \mid y \wedge \neg(\exists z : 0 < z < y \wedge n \mid z \wedge m \mid z)$$

22. Käyttäen symbolia $\gcd$ (suurin yhteinen tekijä), kirjoita lauseke, joka tuottaa n :n ja m :n pienimmän yhteisen jaettavan. Lausekkeesi ei tarvitse toimia kun $n = 0 \vee m = 0$. $\frac{nm}{\gcd(n,m)}$

Kummallekin seuraavista, todista se tai anna sille vastaesimerkki. Todistuksissa saat käyttää kaikkia kurssilla opetettuja lakeja ja keinoja. Kohdista tulee yhteensä enintään 3 pistettä.

23&24. $\exists x; \text{vasen}(x) \wedge \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x) \equiv (\exists x; \text{vasen}(x) : \text{kaava}(x)) \wedge (\exists x; \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x))$

Vastaesimerkki: $\text{vasen}(x) \equiv x = 1$, $\text{oikea}(x) \equiv x = 2$, $\text{kaava}(x) \equiv x > 0$.

$\text{vasen}(x) \wedge \text{kaava}(x)$ toteutuu valinnalla $x = 1$ ja $\text{oikea}(x) \wedge \text{kaava}(x)$ valinnalla $x = 2$, mutta $(\text{vasen}(x) \wedge \text{oikea}(x)) \wedge \text{kaava}(x)$ ei toteudu millään x .

24&25. $\exists x; \text{vasen}(x) \vee \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x) \equiv (\exists x; \text{vasen}(x) : \text{kaava}(x)) \vee (\exists x; \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x))$

$$\equiv \exists x; \text{vasen}(x) \vee \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x)$$

$$\equiv \exists x : (\text{vasen}(x) \vee \text{oikea}(x)) \wedge \text{kaava}(x)$$

$$\equiv \exists x : (\text{vasen}(x) \wedge \text{kaava}(x) \vee \text{oikea}(x) \wedge \text{kaava}(x))$$

$$\equiv (\exists x : \text{vasen}(x) \wedge \text{kaava}(x)) \vee (\exists x : \text{oikea}(x) \wedge \text{kaava}(x))$$

$$\equiv (\exists x; \text{vasen}(x) : \text{kaava}(x)) \vee (\exists x; \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x))$$

toinen tapa:

Jos on olemassa sellainen x , että $\text{vasen}(x)$ ja $\text{kaava}(x)$ ovat tosi, niin kumpikin puoli on tosi. Samoin käy, jos on olemassa sellainen x , että $\text{oikea}(x)$ ja $\text{kaava}(x)$ ovat tosi. Muussa tapauksessa, jos on olemassa sellainen x , että $\text{vasen}(x) \wedge \text{kaava}(x) \equiv \mathbf{U}$ tai $\text{oikea}(x) \wedge \text{kaava}(x) \equiv \mathbf{U}$, niin kumpikin puoli tuottaa $\mathbf{U}$. Muussa tapauksessa kumpikin puoli on epätosi.

Eräs tietorakenne noudattaa seuraavia on määritelty -kaavoja. Joukko $\mathbb{Z}$ on kokonaisluvut.

	toiminto	määriteltä, kun	tulos kuuluu joukkoon
M1	Tyhjä	(vakiot ovat aina määritellyt)	Kasat
M2	$K.Lisää(a)$	$K \in Kasat \wedge a \in \mathbb{Z}$	Kasat
M3	$K.Pois$	$K \in Kasat \wedge K \neq Tyhjä$	Kasat
M4	$K.eka$	$K \in Kasat \wedge K \neq Tyhjä$	$\mathbb{Z}$

Se noudattaa myös seuraavia jokaiselle $K \in Kasat$ ja $a \in \mathbb{Z}$.

- A1 $Tyhjä.Lisää(a).Pois = Tyhjä$
- A2 $K \neq Tyhjä \wedge a < K.eka \rightarrow K.Lisää(a).Pois = K$
- A3 $K \neq Tyhjä \wedge a \geq K.eka \rightarrow K.Lisää(a).Pois = K.Pois.Lisää(a)$
- A4 $Tyhjä.Lisää(a).eka = a$
- A5 $K \neq Tyhjä \wedge a < K.eka \rightarrow K.Lisää(a).eka = a$
- A6 $K \neq Tyhjä \wedge a \geq K.eka \rightarrow K.Lisää(a).eka = K.eka$

26. Perustele, että jos $K \in Kasat \wedge a \in \mathbb{Z}$, niin $K.Lisää(a).Pois$ on määriteltä. Riittää, että jaat perustelusi tapauksiin ja jokaiselle tapaukselle kerrot, mitä M1, ..., M4, A1, ..., A6 käytit.

$K = Tyhjä$: A1. $K \neq Tyhjä \wedge a < K.eka$: A2. $K \neq Tyhjä \wedge a \geq K.eka$: A3.

Niissä pätee $K.Lisää(a).Pois = \dots$, joten sekä $K.Lisää(a).Pois$ että $\dots$ on määriteltä.

27. Mitä ja millä perusteella voi päätellä siitä, että $K.Lisää(a).Pois$ on määriteltä?

$K.Lisää(a) \in Kasat \wedge K.Lisää(a) \neq Tyhjä$ M3:n nojalla.

28. Kirjoita mahdollisimman yksinkertainen sellainen *jotain*, että

$Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).Lisää(1).Lisää(0).jotain.eka = 5$. $.Pois.Pois.Pois.Lisää(5)$

- 29&30. Laske $Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).Lisää(1).Lisää(0).eka$. Voit olettaa, että kaikki tarvittava on määriteltä, mutta perustele vastauksesi muilta osin.

A4 tuottaa $Tyhjä.Lisää(3).eka = 3$.

Koska $8 \geq 3 = Tyhjä.Lisää(3).eka$, tuottaa A6 $Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).eka = 3$.

Koska $1 < 3 = Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).eka$, tuottaa A5

$Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).Lisää(1).eka = 1$.

Koska $0 < 1 = Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).Lisää(1).eka$, tuottaa A5

$Tyhjä.Lisää(3).Lisää(8).Lisää(1).Lisää(0).eka = 0$.

loppu