

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen (ellei toisin sanota). Useimmat mallivastaukset ovat korkeintaan yhden rivin pituisia, mutta osa on pitkiä.

Tarkoittakoon K että kesä on kiva vuodenaika, S että syksy on kiva vuodenaika ja T että talvi on kiva vuodenaika. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

1. Ainakin yksi näistä kolmesta vuodenaikasta on kiva.
2. Kesä on mutta syksy ei ole kiva.
3. Jos syksy on kiva, niin ei ole niin että sekä talvi että kesä on kiva.

Tarkastellaan kaavaa $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q)$.

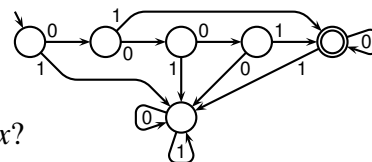
4. Sijoita P :ksi epätosi ja sievennä. Näytä tulos heti sijoituksen jälkeen, ainakin yksi järkevä välivaihe sekä lopputulos.
5. Sijoita P :ksi tosi ja sievennä kuten edellisessä tehtävässä.
6. Käsittele $Q \wedge (\neg P \vee R)$ samalla tavalla. Todista kaksiarvologiikassa $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge \neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow Q \wedge (\neg P \vee R)$.

Kun yhtälöstä $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$ poistetaan itseisarvomerkit kuten kurssilla opetettiin, saadaan *kaava1*, *kaava2* ja *kaava3*, joille pätee $2|x-1| + 3|x-5| = x+5 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2} \vee \text{kaava3}$.

7. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä x .
8. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä x .
9. Kirjoita *kaava3* ja ratkaise siitä x .
10. Ratkaise $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$.
11. Mikä kohdista 7...9 ei tuottanut juurta yhtälölle $2|x-1| + 3|x-5| = x+5$, ja miksi ei?

Sekalaisia kysymyksiä

12. Osoita vastaesimerkillä, että $\neg(P \wedge Q) \wedge R \not\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \wedge R$.
13. Mitä lakia edellisessä kohdassa yritettiin käyttää ja minkälainen virhe sen käytössä tehtiin?



14. Mitä kaavaa kuvan DFA esittää, jos muuttujien luettelo on x ?
15. Piirrä DFA, joka esittää kaavaa $x > 0$, jos muuttujien luettelo on x .

Esitä kaavana seuraavat taulukosta $A[1 \dots n]$ puhuvat väitteet.

16. A :n ensimmäinen alkio ei ole A :n pienin alkio.
17. Kohdassa i (joka on laillinen) esiintyvä alkio on erisuuri kuin A :n viimeinen alkio.
18. Täsmälleen yksi A :n alkioista on suurempi kuin edellinen alkio.

käännä

Jos n ja m ovat kokonaislukuja, niin merkintä $m \mid n$ tarkoittaa samaa kuin $\exists k : n = mk$. Nollan kanssa erisuurten kokonaislukujen n ja m *pienin yhteinen jaettava* on pienin sellainen positiivinen kokonaisluku, että sekä m että n on sen tekijä.

19. Mitkä kokonaisluvut ovat 0:n tekijöitä? Perustele.
20. Olkoon p alkuluku. Luettele kaikki luvun p^2 tekijät suuruusjärjestyksessä.
21. Kirjoita kaava, joka sanoo, että y on n :n ja m :n pienin yhteinen jaettava. Kaavasi ei tarvitse toimia kun $n = 0 \vee m = 0$.
22. Käyttäen symbolia $\gcd$ (suurin yhteinen tekijä), kirjoita lauseke, joka tuottaa n :n ja m :n pienimmän yhteisen jaettavan. Lausekkeesi ei tarvitse toimia kun $n = 0 \vee m = 0$.

Kummallekin seuraavista, todista se tai anna sille vastaesimerkki. Todistuksissa saat käyttää kaikkia kurssilla opetettuja lakeja ja keinoja. Kohdista tulee yhteensä enintään 3 pistettä.

$$23\&24. \exists x; \text{vasen}(x) \wedge \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x) \equiv (\exists x; \text{vasen}(x) : \text{kaava}(x)) \wedge (\exists x; \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x))$$

$$24\&25. \exists x; \text{vasen}(x) \vee \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x) \equiv (\exists x; \text{vasen}(x) : \text{kaava}(x)) \vee (\exists x; \text{oikea}(x) : \text{kaava}(x))$$

Eräs tietorakenne noudattaa seuraavia on määritelty -kaavoja. Joukko $\mathbb{Z}$ on kokonaisluvut.

	toiminto	määritelty, kun	tulos kuuluu joukkoon
M1	Tyhjä	(vakiot ovat aina määritellyt)	Kasat
M2	$K.\text{Lisää}(a)$	$K \in \text{Kasat} \wedge a \in \mathbb{Z}$	Kasat
M3	$K.\text{Pois}$	$K \in \text{Kasat} \wedge K \neq \text{Tyhjä}$	Kasat
M4	$K.\text{eka}$	$K \in \text{Kasat} \wedge K \neq \text{Tyhjä}$	$\mathbb{Z}$

Se noudattaa myös seuraavia jokaiselle $K \in \text{Kasat}$ ja $a \in \mathbb{Z}$.

- A1 $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(a).\text{Pois} = \text{Tyhjä}$
- A2 $K \neq \text{Tyhjä} \wedge a < K.\text{eka} \rightarrow K.\text{Lisää}(a).\text{Pois} = K$
- A3 $K \neq \text{Tyhjä} \wedge a \geq K.\text{eka} \rightarrow K.\text{Lisää}(a).\text{Pois} = K.\text{Pois}.\text{Lisää}(a)$
- A4 $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(a).\text{eka} = a$
- A5 $K \neq \text{Tyhjä} \wedge a < K.\text{eka} \rightarrow K.\text{Lisää}(a).\text{eka} = a$
- A6 $K \neq \text{Tyhjä} \wedge a \geq K.\text{eka} \rightarrow K.\text{Lisää}(a).\text{eka} = K.\text{eka}$

26. Perustele, että jos $K \in \text{Kasat} \wedge a \in \mathbb{Z}$, niin $K.\text{Lisää}(a).\text{Pois}$ on määritelty. Riittää, että jaat perustelusi tapauksiin ja jokaiselle tapaukselle kerrot, mitä M1, ..., M4, A1, ..., A6 käytit.

27. Mitä ja millä perusteella voi päätellä siitä, että $K.\text{Lisää}(a).\text{Pois}$ on määritelty?

28. Kirjoita mahdollisimman yksinkertainen sellainen *jotain*, että $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(3).\text{Lisää}(8).\text{Lisää}(1).\text{Lisää}(0).\text{jotain}.\text{eka} = 5$.

- 29&30. Laske $\text{Tyhjä}.\text{Lisää}(3).\text{Lisää}(8).\text{Lisää}(1).\text{Lisää}(0).\text{eka}$. Voit olettaa, että kaikki tarvittava on määritelty, mutta perustele vastauksesi muilta osin.

loppu