

Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Mikään mallivastaus ei ole pitempi kuin 3 riviä.

Tarkoittakoot A ”aurinko paistaa”, H ”minua hymyilyttää” ja S ”minulla on suklaata”. Ilmaise seuraavat väittämät kaavoina.

1. Aurinko paistaa tai minulla on suklaata (tai sekä että). $A \vee S$
2. Minua hymyilyttää, vaikka minulla ei ole suklaata. $H \wedge \neg S$
3. Minua ei hymyilytä ellei aurinko paista. $\neg H \vee A$

Tarkastellaan kaavaa $(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee \neg P)$.

4. Sijoita P :ksi epätosi ja sievennä. Näytä tulos heti sijoituksen jälkeen, ainakin yksi järkevä välivaihe sekä lopputulos. $(\mathbf{F} \vee Q) \wedge \neg(R \vee \neg \mathbf{F}) \Leftrightarrow Q \wedge \neg \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
5. Sijoita P :ksi tosi ja sievennä kuten edellisessä tehtävässä. $(\mathbf{T} \vee Q) \wedge \neg(R \vee \neg \mathbf{T}) \Leftrightarrow \mathbf{T} \wedge \neg R \Leftrightarrow \neg R$
6. Todista $(P \vee Q) \wedge \neg(R \vee \neg P) \Leftrightarrow \neg R \wedge P$.
Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{F}$, niin kumpikin puoli tuottaa $\mathbf{F}$. Jos $P \Leftrightarrow \mathbf{T}$, niin kumpikin puoli tuottaa $\neg R$.

7&8. Olkoot ϕ , ψ ja $\chi(X)$ kaavoja. Valitse seuraavista kaksi epäpätevää ja anna niille vastaesimerkit:

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\phi \Rightarrow \phi \vee \psi$ | (c) $\neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$ | (e) Jos $\phi \Rightarrow \psi$, niin $\chi(\phi) \Rightarrow \chi(\psi)$. |
| (b) $\phi \vee \psi \Rightarrow \phi \wedge \psi$ | (d) $\phi \wedge \neg\phi \Rightarrow \psi$ | (f) Jos $\phi \Rightarrow \neg\phi$, niin $\neg\phi$. |
- (b): ϕ on $\mathbf{T}$ ja ψ on $\mathbf{F}$. (e): ϕ on $\mathbf{F}$, ψ on $\mathbf{T}$ ja $\chi(X)$ on $\neg X$.

Digitaalisen matkamittarin näyttämä luku on mittariin kaiken kaikkiaan kertynyt matka pyöristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun.

9. Erään matkan alkaessa mittari näytti 5 ja lopussa 12. Oleta, että sisäisesti mittari mittaa matkaa täydellisen tarkasti. Kuinka pitkä matka kuljettiin? Merkitse sitä x :llä. $6 < x < 8$
10. Muuten sama kysymys kuin edellä, mutta nyt sisäisesti mittari mittaa kunkin matkan ainakin todellisen pituisena ja korkeintaan kaksinkertaisena. $3 < x < 8$
11. Muuten sama kysymys kuin edellä, mutta nyt sisäisesti mittari mittaa kunkin matkan ainakin todellisen pituisena ja korkeintaan 20 % liian pitkänä. $5 < x < 8$

Kun yhtälöstä $2|x+2| + |x-1| = 9$ poistetaan itseisarvomerkki kuten kurssilla opetettiin, saadaan *kaava1*, *kaava2* ja *kaava3*, joille pätee $2|x+2| + |x-1| = 9 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2} \vee \text{kaava3}$.

12. Kirjoita *kaava1* ja ratkaise siitä x . $x < -2 \wedge -2(x+2) - (x-1) = 9 \Leftrightarrow x = -4$
13. Kirjoita *kaava2* ja ratkaise siitä x . $-2 \leq x < 1 \wedge 2(x+2) - (x-1) = 9 \Leftrightarrow$
 $-2 \leq x < 1 \wedge x = 4 \Leftrightarrow \mathbf{F}$
14. Kirjoita *kaava3* ja ratkaise siitä x . $1 \leq x \wedge 2(x+2) + (x-1) = 9 \Leftrightarrow x = 2$
15. Ratkaise $2|x+2| + |x-1| = 9$. $x = -4 \vee x = 2$
16. Mikä kohdista 12...14 ei tuottanut juurta yhtälölle $2|x+2| + |x-1| = 9$, ja miksi ei?
Keskimmäisen juuri olisi 4, mutta se ei toteuta $-2 \leq x < 1$.

käännä

Ilmaise kaavoina seuraavat taulukosta $A[0 \dots n-1]$ puhuvat väitteet.

17. Siinä esiintyy 3 tai 5. $\exists i; 0 \leq i < n : A[i] = 3 \vee A[i] = 5$
18. Siinä ei esiinny sekä 3 että 5. $(\forall i; 0 \leq i < n : A[i] \neq 3) \vee \forall i; 0 \leq i < n : A[i] \neq 5$
19. Sen pienimmän alkion arvo on 3. (Siinä saa, mutta ei ole pakko, olla muitakin kolmosia.)
 $(\exists i; 0 \leq i < n : A[i] = 3) \wedge \forall i; 0 \leq i < n : A[i] \geq 3$
20. Sen viimeinen alkio on yhtäsuuri kuin kohdassa i sijaitseva alkio.
 $0 \leq i < n \wedge A[n-1] = A[i]$

Lineaarisessa aikalogiikassa $\Box$ kaava tarkoittaa, että kaava pätee jokaisena ajanhetkenä tästä hetkestä alkaen, ja $\Diamond$ kaava tarkoittaa, että kaava pätee nyt tai jonain ajanhetkenä tulevaisuudessa. Jos kaava pätee jokaisena ajanhetkenä tästä hetkestä alkaen, niin se pätee myös tällä hetkellä. Siksi $\Box$ kaava $\Rightarrow$ kaava. Jos kaava pätee jokaisena ajanhetkenä tästä hetkestä alkaen, niin myös jokaisena tulevana ajanhetkenä kaava pätee jokaisena ajanhetkenä siitä hetkestä alkaen. Siksi $\Box$ kaava $\Rightarrow \Box\Box$ kaava. Tarkoittakoot A ”aurinko paistaa” ja S ”minulla on suklaata”.

21. Ilmaise $\neg\Box A$ siten, että et käytä symbolia $\Box$. Saat käyttää $\Diamond$. $\Diamond\neg A$
22. Päteekö $\Box\Box A \Leftrightarrow \Box A$? Perustele vastauksesi.
 Kyllä. Edellä perustellusta $\Box$ kaava $\Rightarrow$ kaava seuraa $\Box\Box A \Rightarrow \Box A$. Väite seuraa siitä ja edellä perustellusta $\Box$ kaava $\Rightarrow \Box\Box$ kaava.
23. Päteekö $\Box\Diamond A \Leftrightarrow \Diamond\Box A$? Perustele vastauksesi.
 Ei, koska voi olla vuorotellen A ja $\neg A$. Sille $\Box\Diamond A$ on tosi mutta $\Diamond\Box A$ ei ole.
24. Päteekö $\Diamond(A \wedge S) \Leftrightarrow (\Diamond A) \wedge (\Diamond S)$? Perustele vastauksesi.
 Ei, koska voi olla ensin $A \wedge \neg S$ ja sitten loputtomasti $S \wedge \neg A$. Sille oikea puoli on tosi mutta vasen puoli ei ole.
25. Päteekö $\Diamond(A \vee S) \Leftrightarrow (\Diamond A) \vee (\Diamond S)$? Perustele vastauksesi.
 Kyllä. Jos nyt tai joskus myöhemmin A , niin molemmat puolet ovat tosi. Jos nyt tai joskus myöhemmin S , niin molemmat puolet ovat tosi. Muutoin kumpikaan puoli ei ole tosi.

Polynomin $A[n]x^n + A[n-1]x^{n-1} + \dots + A[1]x + A[0]$ arvo annetulla x :n arvolla voidaan laskea ilman potenssiin korotuksia seuraavasti: $((\dots((A[n]x) + A[n-1])x + \dots + A[2])x + A[1])x + A[0]$.

26. Esitä polynomi $7x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 11$ edellä kuvatussa muodossa.
 $((((7x-5)x+1)x-8)x+11)$
27. Olkoon $s_i = A[0] + A[1]x + \dots + A[i]x^i$. Kuinka paljon on s_1 ? Entä s_{-1} ?
 $s_1 = A[0] + A[1]x$ ja $s_{-1} = 0$.
28. Oheisen ohjelman silmukkainvariantti on $s_n = yx^i + s_{i-1}$. Perustele, että se on voimassa kun riville 2 tullaan ensimmäisen kerran.
 Silloin $y = A[n]$ ja $i = n$, joten $yx^i + s_{i-1} = A[n]x^n + s_{n-1} = s_n$.
29. Kirjoita silmukkainvarianttia vastaava kaava, joka on voimassa rivin 3 lopussa. Tee sama rivien 4 ja 5 lopuille.
 rivi 3: $s_n = yx^{i+1} + s_i$ rivi 4: $s_n = yx^i + s_i$ rivi 5: $s_n = yx^i + s_{i-1}$
30. Perustele, että ohjelman lopputulos on polynomin arvo annetulla x :n arvolla.
 Lopussa $i = 0$, joten $s_n = yx^0 + s_{-1} = y$.

```

1  y := A[n]; i := n
2  while i > 0 do
3      i := i - 1
4      y := yx
5      y := y + A[i]
```

loppu