Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Muiden kuin koodaa tai piirrä -tehtävien mallivastaukset ovat melko lyhyet, tyypillisesti korkeintaan 2 riviä.

Erään algoritmin ajan kulutus on $1+V\log_2(E+1)$, missä V on risteysten ja E niiden välisten tienpätkien määrä. Kunnes toisin sanotaan, kysytään tarkkaa arvoa eikä esim. $O(\ldots)$-vastausta.

1. Eräässä kylässä $V=5$ ja $E=15$. Paljonko algoritmi kuluttaa aikaa?
   $1+5\log_2 16=21$

2. Eräässä kaupungissa $E=4V-1$. Sievennä ajan kulutus muotoon, jossa E ei esiinny.
   $1+V\log_2((4V-1)+1)=1+V\log_2 4V=1+V(\log_2 4+\log_2 V)=1+2V+V\log_2 V$

3. Toisessa kaupungissa $E\le(V+1)^2-1$. Ilmoita algoritmin ajan kulutukselle mahdollisimman hyvä yläraja, jossa E ei esiinny.
   $1+V\log_2(E+1)\le 1+V\log_2((V+1)^2)=1+2V\log_2(V+1)$

4. Ilmoita algoritmin ajan kulutus $O(\ldots)$-merkinnällä, jossa esiintyy sekä V että E. Ilmoita se myös niin, että $E\le(V+1)^2-1$ ja vain V esiintyy. Isoilla x pätee $\log_2(x+1)\approx\log_2 x+\frac{1{,}44}{x}$. Tarpeettoman monimutkaisesta vastauksesta vähennetään pisteitä.
   $O(V\log E)$ ja $O(V\log V)$

Polynomin arvon laskeminen suoraviivaisesti

5. Ilmoita algoritmin POLYNOMI1 ajan kulutus Θ-merkinnällä.
   $\Theta(n^2)$

```
POLYNOMI1(A,x)
y := 0
for i := 0 to n do
    y := y + A[i] · POTENSSI(x,i)
```

```
POTENSSI(x,n)
y := 1
for i := 1 to n do y := y · x
return y
```

Polynomin arvo annetulla x:n arvolla voidaan laskea myös seuraavasti:
$((\ldots((A[n]x)+A[n-1])x+\ldots+A[2])x+A[1])x+A[0]$.

6. Esitä polynomi $7x^5-5x^4+x^2-8x+11$ edellä kuvatussa muodossa.
   $((((7x-5)x+0)x+1)x-8)x+11$

7. Olkoon $s_i=A[0]+A[1]x+\ldots+A[i]x^i$. Kuinka paljon on s_1? Entä s_{-1}?
   $s_1=A[0]+A[1]x$ ja $s_{-1}=0$.

8. Oheisen algoritmin silmukkainvariantti on $s_n=yx^i+s_{i-1}$. Perustele, että se on voimassa kun riville 2 tullaan ensimmäisen kerran.
   Silloin $y=A[n]$ ja $i=n$, joten $yx^i+s_{i-1}=A[n]x^n+s_{n-1}=s_n$.

9. Kirjoita silmukkainvarianttia vastaava kaava, joka on voimassa rivin 3 lopussa. Tee sama rivien 4 ja 5 lopuille.
   rivi 3: $s_n=yx^{i+1}+s_i$ rivi 4: $s_n=yx^i+s_i$ rivi 5: $s_n=yx^i+s_{i-1}$

```
1  y := A[n] ; i := n
2  while i > 0 do
3      i := i − 1
4      y := y · x
5      y := y + A[i]
```

10. Perustele, että algoritmin lopputulos on polynomin arvo annetulla x:n arvolla.
    Lopussa $i=0$, joten $s_n=yx^0+s_{-1}=y$.

11. Ilmoita algoritmin ajan kulutus Θ-merkinnällä.
    $\Theta(n)$

Keko ja koodinlukutaito

12. Etsi ohjelmointivirhe oheisesta aliohjelmasta.

    Rivillä 5 pitäisi lukea >= (tai >) eikä <=.

13. Kun keon kaikki alkiot ovat yhtäsuuret, on aliohjelma erityisen nopea. Minkä yksityiskohdan ansiota tämä on, ja kuinka nopea aliohjelma on silloin?

    Rivillä 6 lukee <= eikä <. $\Theta(1)$

```
1  void poista_keosta_suurin(){
2    if( keko.size() < 1 ){ return; }
3    unsigned h = keko.size() - 1, i = 0, j = 1;
4    while( true ){
5      if( j+1 < h && keko[j+1] <= keko[j] ){ ++j; }
6      if( j >= h || keko[j] <= keko[h] ){ break; }
7      keko[i] = keko[j]; i = j; j = 2*i + 1;
8    }
9    keko[i] = keko[h]; keko.resize(h);
10 }
```

Graafiaalgoritmi- ja hajautustaulukysymyksiä

14. Mikä etu Dijkstran algoritmilla on A*-algoritmiin verrattuna?

    Löytää reitit lähtösolmusta jokaiseen solmuun.

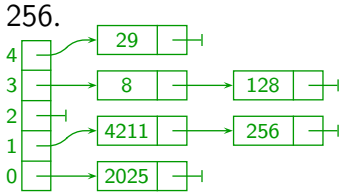
15. Mikä etu A*-algoritmilla on Dijkstran algoritmiin verrattuna?

    Nopeutuu suosimalla solmuja, jotka ovat oikeassa suunnassa.

16. Mikä etu Bellman–Ford-algoritmilla on kurssin muihin reitinetsintäalgoritmeihin verrattuna?

    Se sallii silmukat, joiden kokonaispaino on negatiivinen.

17. Hajautusfunktiona on n mod 5. Piirrä hajautustaulu, jossa on 4211, 29, 8, 2025, 128 ja 256.



18. Hajautustaulun kantataulukon koko on k ja alkioita on n. Kuinka monta osoitinta siinä on?

    $n+k$

Lanttilassa käytettävien kolikoiden arvot ovat kokonaislukuja. Ne on kerrottu aidosti kasvavassa järjestyksessä taulukossa `arvot`, ja `arvot[0] == 1`.

19. Kirjoita ahne ohjelmanpätkä, jolle annetaan muodostettava rahasumma muuttujassa `tavoite` ja joka kertoo mukaan otettavat kolikot! Saat luottaa, että `tavoite >= 0`. Vastaus talletetaan taulukkoon `maarat`, jota indeksoidaan kolikon arvolla ja joka on alustettu tarpeeksi suureksi ja täyteen nollaa.

```
for( int i = arvot.size()-1; i >= 0; --i ){
  maarat[i] = tavoite / arvot[i]; tavoite %= arvot[i];
}
```

20. Osoita esimerkillä, että ahne algoritmi ei välttämättä johda pienimpään määrään kolikoita!

    Jos `arvot` on `[1,3,4]` ja `tavoite` on `6`, niin ahne algoritmi valitsee `[2,0,1]`, vaikka `[0,2,0]` olisi parempi.

21. Kirjoita rekursiivinen aliohjelma, joka selvittää, mikä on pienin määrä kolikoita, jolla `tavoite` voidaan muodostaa. Se saa olla hyvin hidas. Sen ei tarvitse täyttää taulukkoa `maarat` (se lisätään seuraavassa kohdassa).

```
int rekur( int tavoite ){
  if( tavoite < 1 ){ return 0; }
  int paras = tavoite;
  for( int i = 0; i < arvot.size(); ++i ){
    if( arvot[i] > tavoite ){ break; }
    int uusi = rekur( tavoite - arvot[i] );
    if( uusi < paras ){ paras = uusi; }
  }
  return paras + 1;
}
```

22. Lisää edellisen kohdan vastaukseen taulukon `maarat` täyttäminen!

    Pääohjelmassa luodaan taulukko `paras_i`, jonka koko on `tavoite + 1`. Lauseen `paras = uusi;` perään lisätään `paras_i[ tavoite ] = i;` ja uloimman rekursiokutsun perään lisätään `int t = tavoite;`
    `while( t > 0 ){ int i = paras_i[t]; ++maarat[i]; t -= arvot[i]; }`

23. Edellinen ohjelma on hidas jo pienehköilläkin tavoitteilla, kuten 100. Nopeuden parantamiseksi lisää siihen jo laskettujen vastausten tallettaminen!

    Pääohjelmassa luodaan taulukko `paras`, jonka koko on `tavoite + 1`. Se alustetaan täyteen nollaa. Aliohjelma muutetaan seuraavanlaiseksi:

```
int rekur( int tavoite ){
  if( tavoite < 1 ){ return 0; }
  if( paras[ tavoite ] == 0 ){
    paras[ tavoite ] = tavoite;
    for( int i = 0; i < arvot.size(); ++i ){
      if( arvot[i] > tavoite ){ break; }
      int uusi = rekur( tavoite - arvot[i] );
      if( uusi < paras[ tavoite ] ){
        paras[ tavoite ] = uusi; paras_i[ tavoite ] = i;
      }
    }
  }
  return paras[ tavoite ] + 1;
}
```

Binäärihakupuun solmussa on kentät `vasen`, `oikea`, `avain` ja (solmusta alkavan alipuun) `koko`. Aluksi `ss` osoittaa juurta. Jos seuraavissa tehtävissä mainittua solmua ei ole olemassa, niin algoritmin jälkeen `ss`:n pitää osoittaa ei minnekään.

24. Kirjoita algoritmi, jonka jälkeen `ss` osoittaa puun viimeistä solmua.

```
if( ss ){
  while( ss->oikea ){ ss = ss->oikea; }
}
```

25. Kirjoita algoritmi, jonka jälkeen `ss` osoittaa solmua, jonka avain on `x`.

```
while( ss && ss->avain != x ){
  if( ss->avain > x ){ ss = ss->vasen; }else{ ss = ss->oikea; }
}
```

26&27. Kirjoita algoritmi, jonka jälkeen `ss` osoittaa solmua, jonka edellä puussa on `ii` solmua.

```
while( ss ){
  unsigned mm = 0;
  if( ss->vasen ){ mm = ss->vasen->koko; }
  if( ii == mm ){ break; }
  if( ii < mm ){ ss = ss->vasen; }
  else{ ii -= mm+1; ss = ss->oikea; }
}
```

Syötteessä on n alkiota, joista pitää löytää k pienintä. Luku k on suuri ja n on sitäkin paljon suurempi.

28&29. Kuvaile nopea algoritmi, ja kerro sen ajan kulutus. Muistia on käytettävissä paljon. (Ei tarvitse kirjoittaa pseudokoodia tms.) Mitä nopeampi algoritmi, sen enemmän pisteitä.

Tähän on useita mahdollisuuksia:

A. Nopean mediaanin etsinnän periaatteella eli vain yhdellä osataulukolla jatkavalla Quicksortilla järjestetään taulukkoa niin kauan, että k:s alkio on löytynyt. Tällöin sitä pienemmät (ja mahdollisesti yhtäsuuret) ovat sen vasemmalla puolen. Keskimäärin $\Theta(n)$, hitaimmillaan $\Theta(n^2)$.

B. Tehdään taulukosta keko pienin ylinnä ajassa $\Theta(n)$. Otetaan k alkiota pois ajassa $O(k \log n)$. Ajan kulutus $O(n + k \log n)$.

C. Ylläpidetään k pienintä alkiota keossa suurin ylinnä. Ajan kulutus $O(n \log k)$.

D. Järjestetään taulukko hyvällä algoritmilla ja poimitaan k ensimmäistä. Ajan kulutus $O(n \log n)$.

E. Käydään aineisto läpi ja ylläpidetään k pienintä järjestetyssä taulukossa. Ajan kulutus $O(nk)$.

Pisteytys: Algoritmeista A … C enintään $+\frac{3}{2}$, D enintään $+1$, E enintään $+\frac{1}{2}$. Ajan kulutus enintään $+\frac{1}{2}$. Asiavirheistä miinusta.

30. Kuten edellinen, mutta nyt muistia on käytettävissä vain $\Theta(k)$. Data tulee syötteessä alkio kerrallaan, eikä muisti riitä kaiken sen tallettamiseen yhtäaikaa.

Nyt käytettävissä ovat vain C (1 piste) ja E ($\frac{1}{2}$ pistettä).

loppu