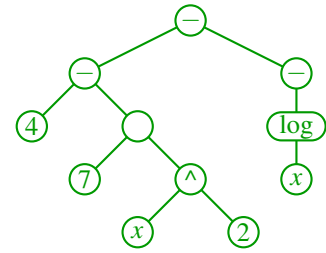


Vastaa tentin järjestäjän antamalle paperille (ei kysymyspaperille). Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Kukin tehtävä on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Suurin osa mallivastauksista on korkeintaan 2 riviä pitkiä.



1&2. Piirrä lausekkeen $4 - 7x^2 - -\log x$ lausekepuu.

Tarkoittakoot A ”aurinko paistaa”, H ”minua hymyilyttää” ja S ”minulla on suklaata”. Ilmaise seuraavat väittämät kaavoina.

- 3. Aurinko paistaa tai minulla on suklaata (tai sekä että). $A \vee S$
- 4. Minua hymyilyttää, vaikka minulla ei ole suklaata. $H \wedge \neg S$
- 5. Minua ei hymyilytä ellei aurinko paista. $\neg H \vee A$

Tehtävissä 6, ..., 8 näytä kaava sekä heti sijoittamisen jälkeen että sieventämisen jälkeen. Saat näyttää myös välivaiheita.

- 6. Sijoita **F** eli ”epätosi” P :n paikalle kaavaan $\neg(Q \vee \neg P)$ ja sievennä.
 $\neg(Q \vee \neg \mathbf{F}) \Leftrightarrow \neg(Q \vee \mathbf{T}) \Leftrightarrow \neg \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
- 7. Sijoita **T** eli ”tosi” P :n paikalle kaavaan $\neg(Q \vee \neg P)$ ja sievennä.
 $\neg(Q \vee \neg \mathbf{T}) \Leftrightarrow \neg(Q \vee \mathbf{F}) \Leftrightarrow \neg Q$
- 8. Tee samat kaavalle $P \wedge \neg Q$. $\mathbf{F} \wedge \neg Q \Leftrightarrow \mathbf{F}$ ja $\mathbf{T} \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg Q$
- 9. Päättele edellisten vastausten avulla, päteekö $\neg(Q \vee \neg P) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$.
 Kun P oli **F**, tuotti $\neg(Q \vee \neg P)$ saman kuin $P \wedge \neg Q$ (nimittäin **F**). Kun P oli **T**, tuotti $\neg(Q \vee \neg P)$ saman kuin $P \wedge \neg Q$ (nimittäin $\neg Q$). Niinpä $\neg(Q \vee \neg P)$ tuottaa aina saman kuin $P \wedge \neg Q$, joten $\neg(Q \vee \neg P) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$ pätee.

Sekalaisia tehtäviä

- 10. Olkoon q osamäärä ja r jakojäännös, kun luonnollinen luku n jaetaan positiivisella kokonaisluvulla m . Kirjoita jakoyhtälö ja siihen liittyvä jakojäännöstä koskeva kaava.
 $n = qm + r \wedge 0 \leq r < m$.
- 11&12. Olkoot ϕ , ψ ja $\chi(X)$ kaavoja. Valitse seuraavista kaksi epäpätevää ja anna niille vastaesimerkit:
 - (a) $\phi \Rightarrow \phi \vee \psi$
 - (b) $\phi \vee \psi \Rightarrow \phi \wedge \psi$
 - (c) $\neg(\phi \vee \psi) \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\psi$
 - (d) $\phi \wedge \neg\phi \Rightarrow \psi$
 - (e) Jos $\phi \Rightarrow \psi$, niin $\chi(\phi) \Rightarrow \chi(\psi)$.
 - (f) Jos $\phi \Rightarrow \neg\phi$, niin $\neg\phi$.
 (b): ϕ on **T** ja ψ on **F**. (e): ϕ on **F**, ψ on **T** ja $\chi(X)$ on $\neg X$.

Alla oleva ohjelmanpätke saa tentin pisterajat taulukossa rajat ja opiskelijan saaman pistemäärän muuttujassa pist, ja laskee opiskelijan arvosanan.

```
int arvosana = 0;
while( arvosana < 5 && pist >= rajat[ arvosana ] ){ ++arvosana; }
```

13. Mitkä ovat taulukon rajat lailliset indeksit? 0, 1, 2, 3 ja 4
14. Kirjoita kaava, joka on tosi täsmälleen silloin, kun arvosanan kuuluu olla 3. Muuttuja arvosana ei saa esiintyä siinä. rajat[2] ≤ pist < rajat[3]
15. Esimerkiksi pisterajat [12, 9, 15, 6, 9] eivät ole mielekkäät. Mikä ehto pisterajojen täytyy täyttää? Sanallinen vastaus riittää.
Niiden täytyy olla kasvavassa suuruusjärjestyksessä.

Digitaalisen matkamittarin näyttämä luku on mittariin kaiken kaikkiaan kertynyt matka pyöristettynä alaspäin lähimpään kokonaislukuun. Oleta, että sisäisesti mittari mittaa matkaa täydellisen tarkasti. Anna seuraaviin kohtiin vastaukseksi epäyhtälö.

16. Eräällä hetkellä mittari näytti 24. Mikä oli kaiken kaikkiaan kertynyt matka? Merkitse sitä a :lla. $24 \leq a < 25$
17. Vähän myöhemmin mittari näytti 29. Mikä oli silloin kaiken kaikkiaan kertynyt matka? Merkitse sitä b :llä. $29 \leq b < 30$
18. Kuinka pitkä matka kuljettiin näiden kahden hetken välillä?
 $29 - 25 < b - a < 30 - 24 \Leftrightarrow 4 < b - a < 6$

Kun yhtälöstä $2|x - 5| + 3 = x + 4$ poistetaan itseisarvomerkki kuten kurssilla opetettiin, saadaan kaava1 ja kaava2, joille pätee $2|x - 5| + 3 = x + 4 \Leftrightarrow \text{kaava1} \vee \text{kaava2}$.

19. Kirjoita kaava1 ja ratkaise siitä x .
 $x - 5 < 0 \wedge -2(x - 5) + 3 = x + 4 \Leftrightarrow -2x + 10 = x + 1 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$
20. Kirjoita kaava2 ja ratkaise siitä x .
 $x - 5 \geq 0 \wedge 2(x - 5) + 3 = x + 4 \Leftrightarrow 2x - 10 = x + 1 \Leftrightarrow x = 11$
21. Ratkaise $2|x - 5| + 3 = x + 4$. $x = 3 \vee x = 11$

Erään algoritmin ajan kulutus on $1 + V \log_2(E + 1)$, missä V on risteysten ja E niiden välisten tienpätkien määrä.

22. Eräässä kylässä $V = 5$ ja $E = 15$. Paljonko algoritmi kuluttaa aikaa? $1 + 5 \log_2 16 = 21$
23. Eräässä kaupungissa $E = 4V - 1$. Sievennä ajan kulutus muotoon, jossa E ei esiinny.
 $1 + V \log_2((4V - 1) + 1) = 1 + V \log_2 4V = 1 + V(\log_2 4 + \log_2 V) = 1 + 2V + V \log_2 V$
24. Toisessa kaupungissa $E \leq (V + 1)^2 - 1$. Ilmoita algoritmin ajan kulutukselle mahdollisimman hyvä yläraja, jossa E ei esiinny.
 $1 + V \log_2(E + 1) \leq 1 + V \log_2(V + 1)^2 = 1 + 2V \log_2(V + 1)$

Ilmaise kaavoina seuraavat taulukosta $A[0 \dots n - 1]$ puhuvat väitteet.

25. Sen kaikki alkio ovat vähintään kakkosen suuruisia. $\forall i; 0 \leq i < n : A[i] \geq 2$
26. Siinä on ainakin yksi kakkonen tai viitonen. $\exists i; 0 \leq i < n : A[i] = 2 \vee A[i] = 5$
27. Sen viimeinen alkio on yhtäsuuri kuin kohdassa i sijaitseva alkio.
 $0 \leq i < n \wedge A[n - 1] = A[i]$

Taulukko on kasvava, jos ja vain jos sen jokainen alkio on ainakin yhtä suuri kuin edellinen alkio. Taulukko on aidosti kasvava, jos ja vain jos se on kasvava ja mikään alkio ei toistu.

28. Kirjoita kaava, joka sanoo että $A[0 \dots n - 1]$ on kasvava mutta ei aidosti kasvava.

$$(\forall i; 1 \leq i < n : A[i - 1] \leq A[i]) \wedge \exists i; 1 \leq i < n : A[i - 1] = A[i]$$

29&30. Kirjoita ohjelmanpätkä, joka palauttaa tuloksenaan 2, jos $A[0 \dots n - 1]$ on aidosti kasvava; 0, jos A ei ole kasvava; ja 1 muussa tapauksessa.

tulos := 2

for $i := 1$ **to** $n - 1$ **do**

if $A[i] < A[i - 1]$ **then return** 0

if $A[i] = A[i - 1]$ **then** *tulos* := 1

return *tulos*

Loppu