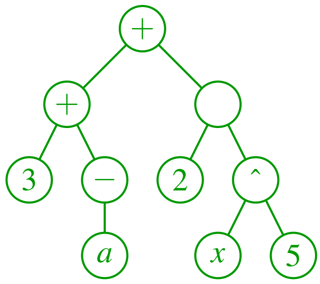
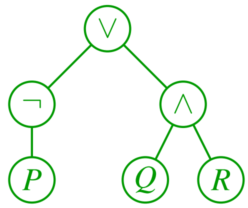
TIEP1020 Diskreetit rakenteet Antti Valmari Tentti 14.3.2025

Nimesi: ____ Syntymäaikasi: ______________

Kirjoja, laskinta tms. ei saa olla tentissä. Maksimipistemäärä on 30. Kukin kohta on 1 tai 2 pisteen arvoinen. Vastaukselta ei vaadita enempää kuin mihin vastaustila riittää.

1&2. Piirrä alla olevaan tilaan vasemmalle lausekkeen $3 + -a + 2x^5$ lausekepuu.





3. Piirrä yllä olevaan tilaan oikealle lausekkeen $\neg P \vee Q \wedge R$ lausekepuu.

Tarkoittakoon J että Jyväskylä on hyvä kaupunki, K että Kuopio on hyvä kaupunki ja V että Vaasa on hyvä kaupunki. Esitä seuraavat väittämät propositiologiikan kaavoina.

4. Jyväskylä, Vaasa ja Kuopio ovat hyviä kaupunkeja. $J \wedge V \wedge K$ ____________________

5. Ainakin yksi näistä kolmesta kaupungista on hyvä. $J \vee V \vee K$ ____________________

6. Jos Kuopio on huono, niin Jyväskylä ei ole huono. $\neg K \rightarrow J$ ____________________

7. Kuopio ja Vaasa ovat samanarvoisia (ts.
   molemmat hyviä tai molemmat huonoja). $K \leftrightarrow V$ ____________________

Kohdissa 8…10 täydennä kaava, joka tarkoittaa samaa kuin $2|x+2| + |x-1| = 9$ ja jossa ei ole itseisarvomerkkejä. Kaavan pitää olla se joka saadaan kuten kurssilla on neuvottu.

8. $x < -2 \;\wedge\; -2(x+2) - (x-1) = 9$ ____________________

9. $\vee\;\; -2 \leq x < 1 \;\wedge\; 2(x+2) - (x-1) = 9$ ____________________

10. $\vee\;\; 1 \leq x \;\wedge\; 2(x+2) + (x-1) = 9$ ____________________

11. Ratkaise $2|x+2| + |x-1| = 9$. $x = -4 \vee x = 2$ ____________________

12. Mikä kohdista 8…10 ei tuottanut juurta yhtälölle $2|x+2| + |x-1| = 9$, ja miksi ei?
    Keskimmäisen juuri olisi 4, mutta se ei toteuta $-2 \leq x < 1$. ____________________

Polynomin $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ arvo annetulla x:n arvolla voidaan laskea ilman potenssiin korotuksia seuraavasti: $((\ldots((a_n x) + a_{n-1})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0$.

13. Esitä polynomi $7x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 11$
    edellä kuvatussa muodossa. $(((7x-5)x+1)x-8)x+11$ ____________________

14&15. Kertoimet a_i on annettu taulukossa $A[0\ldots n]$, missä $n \geq 0$. Tee ohjelma, joka laskee edellä kuvatulla tavalla polynomin arvon annetulla x:n arvolla ilman potenssilaskuja.

```
tulos = A[n];
for( int i = n-1; i >= 0; --i; ){
  tulos *= x; tulos += A[i];
}
```

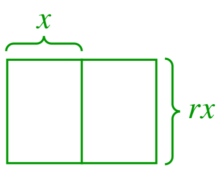
käännä

Esitä seuraavat taulukosta $A[1\dots n]$ puhuvat väitteet kaavoina.

16. A:n sisältö on palindromi, eli sama etu- ja takaperin. $\forall i\,;\, 1 \leq i \leq n : A[i] = A[n-i+1]$
17. Taulukon viimeinen alkio on jonkin muun kanssa yhtäsuuri. $\exists i\,;\, 1 \leq i < n : A[i] = A[n]$
18. Kohdassa i oleva alkio on muita suurempi. $1 \leq i \leq n \wedge \forall j\,;\, 1 \leq j \leq n \wedge i \neq j : A[i] > A[j]$

A0-paperin pinta-ala on 1 m^2. Olkoon r A0-paperin pitkän ja lyhyen sivun pituuksien suhde; tällöin myös A1-paperin, A2-paperin jne. pitkän ja lyhyen sivun pituuksien suhde on r. Leikkaamalla Ai-paperi pitkän sivun puolivälistä vastakkaisen pitkän sivun puoliväliin saadaan kaksi A$(i+1)$-paperia. Ilmoita vastaukset tarkkoina lausekkeina (siis ei likiarvoina).

19. Mikä on A4-paperin pinta-ala? $\frac{1}{16}$ m^2
20. Piirrä kuva, jossa A0-paperi on muodostettu kahdesta A1-paperista, A1-paperin lyhyen sivun pituus on merkitty x:llä ja A0-paperin lyhyen sivun pituus on merkitty x:n ja r:n avulla.



21. Kirjoita yhtälö tai yhtälöpari, josta r voidaan ratkaista. $r^2x = 2x$
22. Ratkaise r. $\sqrt{2}$
23. Kirjoita yhtälö, josta x voidaan ratkaista, ja ratkaise x. $2x\sqrt{2}x = 1\ \mathrm{m}^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ m
24. Mitkä ovat A4-paperin lyhyen ja pitkän sivun pituudet? $\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$ m ja $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ m

Kummallekin seuraavista anna vastaesimerkki tai lyhyt perustelu.

25. $x^{(y^z)} = x^{(z^y)}$ $2^{(1^2)} = 2 \neq 2^{(2^1)} = 4$
26. $(x^y)^z = (x^z)^y$ $(x^y)^z = x^{yz} = x^{zy} = (x^z)^y$

Sekalaisia kysymyksiä

27. Vokaalit ovat A, E, I, O, U, Y, Ä ja Ö. Pöydällä on neljä korttia. Yhden ylöspäin näkyvällä puolella lukee M, toisen A, kolmannen 2 ja neljännen 5. Halutaan tarkastaa, noudattaako jokainen näistä neljästä kortista seuraavaa sääntöä: Jos kortin toisella puolella on vokaali, niin toisella puolella on parillinen luku. Halutaan kääntää mahdollisimman vähän kortteja. Mitkä kortit on käännettävä? A ja 5

28&29. Paljonko on 1403^{2025} mod 10 ? Perustele.

$1403 \bmod 10 = 3$ ja $3^4 \bmod 10 = 81 \bmod 10 = 1$, joten

$1403^{2025} \bmod 10 = 3^{2025} \bmod 10 = 3^{1+4\cdot 506} \bmod 10 = (3 \cdot 1^{506}) \bmod 10 = 3.$

30. Olkoot n ja m kokonaislukuja, ja $m > 0$. Tee yhteen- ja/tai vähennyslaskuihin perustuva ohjelma, joka laskee $n \bmod m$. Kertolaskuja, jakolaskuja, div, mod jne. ei saa käyttää.

```
vastaus = n;
while( vastaus < 0 ){ vastaus += m; }
while( vastaus >= m ){ vastaus -= m; }
```

loppu