Reaalianalyysi
Demo 1

1. Olkoon joukko X, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra X:ssä ja $A \subset X$. Osoita, että

$$\mathcal{M}|_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{M}\}$$

on σ-algebra A:ssa.

2. Olkoon joukko X, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra X:ssä ja $A \in \mathcal{M}$. Osoita, että

$$M_A = \{B \subset X : B \cap A \in \mathcal{M}\}$$

on σ-algebra X:ssä.

3. Olkoon $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ja

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ on } \sigma\text{-algebra } X\text{:ssä, } \mathcal{F} \subset \mathcal{M}\}.$$

Osoita, että $\sigma(\mathcal{F})$ on σ-algebra.

4. Olkoon $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mitta-avaruus ja $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$. Osoita, että
i) jos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, niin

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i);$$

ii) jos $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ja $\mu(A_1) < \infty$, niin

$$\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

5. Olkoon $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Anna esimerkki perheestä $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ sekä kahdesta todennäköisyysmitasta ν ja μ σ-algebrassa $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{P}(X)$ siten, että $\nu \neq \mu$, vaikka $\nu(A) = \mu(A)$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$.