Funktionaalianalyysi
Demo 9

1. Määritellään kuvaus $T : C(0,1) \to \ell^\infty$ kaavalla

$$Tf = (f(1/k))_{k\in\mathbb{N}} = (f(1), f(1/2), f(1/3), \ldots), \quad f \in C(0,1).$$

Näytä, että T on rajoitettu lineaarikuvaus $C(0,1) \to \ell^\infty$ (sup-normi molemmissa), ja määrää sen normi $\| T \|$. Onko T injektio? Entä surjektio?

2. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Etsi sellainen jatkuva lineaarinen injektio $S : \ell^p \to \ell^p$, että sen kuva $\mathrm{Im}(S) = \{Sx : x \in \ell^p\}$ ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p. [*Vihje.* Riittää etsiä esimerkki diagonaalioperaattoreiden $(x_k) \mapsto (a_k x_k)$ joukosta, missä (a_k) on sopiva rajoitettu skalaarijono.]

3. Olkoon $V : C(0,1) \to C(0,1)$ *Volterra operaattori*

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(s)\, ds, \quad t \in [0,1], f \in C(0,1).$$

(i) Osoita induktiolla, että

$$\| V^n \| \leq \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Banachin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella V^2 on (yksikäsitteinen) kiintopiste $f \in C(0,1)$. Mikä funktio f on?

4. (*Heisenbergin epämääräisyysperiaate lineaarikuvauksille*) Olkoot A ja B lineaarikuvauksia $\ell^2 \to \ell^2$, joille $AB - BA = I_{\ell^2}$ (missä I_{ℓ^2} on identtinen kuvaus). Todista, että silloin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [*Idea.* Verifioi induktiolla, että

$$AB^n - B^n A = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .]$$