Funktionaalianalyysi
Demo 12

1. Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \to F$ avoin lineaarikuvaus. Näytä, että T on surjektio.

2. Olkoon E Banachin avaruus, ja $T \in \mathcal{L}(E, E)$ operaattori, jolle $\| T \| < 1$. Etsi Neumannin sarjan avulla arvio

$$\| (I + T)^{-1} - I + T \| \leq \frac{\| T \|^2}{1 - \| T \|}.$$

3. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $S \in \mathcal{L}(H, H)$ sellainen lineaarikuvaus, että

$$|(S(x), x)| \geq c \| x \|^2, \quad x \in H,$$

missä vakio $c > 0$. Näytä, että S on Kääntyvä operaattori, ja $\| S^{-1} \| \leq 1/c$. [*Muistutus.* Surjektiivisuutta varten voi tutkia vektoreita $x \in Im(S)^{\perp}$.]

4. Olkoon $(a_k) \subset \mathbb{R}$ sellainen jono, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ suppenee kaikilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että $(a_k) \in \ell^1$. [*Vihje.* Banach-Steihausin lause.]

5. (*Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate*, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0, 1)$ jono jatkuvia funktioita $[0, 1] \to \mathbb{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0, 1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a, b) \subset [0, 1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja $n \in \mathbb{N}$. [*Vihje.* Imitoi Banach-Steihausin lauseen todistusta.]