

Funktionaalianalyysi

Demo 1

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Asetetaan

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1},$$

kun $x, y \in X$. Osoita, että

- i) d' on metriikka;
- ii) joukko $A \subset X$ on avoin metriikan d mielessä, jos ja vain jos A on avoin metriikan d' mielessä.

2. Olkoon $f_j(t) = t^j + 1$ kun $t \in [0, 1]$ ja $j \in \mathbb{N}$. Suppeneeko jono (f_j) jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0, 1), \|\cdot\|_\infty)$?

3. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Näytä, että kuvaukset $(x, y) \mapsto x + y : E \times E \rightarrow E$ ja $(\alpha, x) \mapsto \alpha x : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ ovat jatkuvia. [*Muistutus:* Riittää esimerkiksi näyttää että $x_j + y_j \rightarrow x + y$ kun $j \rightarrow \infty$ aina kun $x_j \rightarrow x$ ja $y_j \rightarrow y$ E :ssä, ja samoin toisessa tapauksessa.]

4. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ normeja vektoriavaruudessa E . Näytä, että $\|x\| = \max(\|x\|_1, \|x\|_2)$, $x \in E$, määrittelee normin avaruudessa E . Etsi lisäksi esimerkki sellaisista $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ tasossa \mathbb{R}^2 , että $\|x\|_0 = \min(\|x\|_1, \|x\|_2)$ ei ole normi tasossa.

5. Näytä, että $c_0 = \{(x_j) \in \ell^\infty : \lim_j x_j = 0\}$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektoriavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Osoita, lisäksi että c_0 on separoituva normiavaruus. [*Vihje:* Tarkista, että finiittisten jonojen joukko $c_{00} = \{(x_j) : x_j \neq 0 \text{ äärellisen monella } j\}$ on separoituva ja tiheä c_0 :ssa.]

6. Olkoon $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, $\varphi(t) = t/(1+t)$. Osoita, että φ on jatkuva, aidosti kasvava bijektio, jolle lisäksi $\varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$.

Osoita tämän avulla, että kun jonoille $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in s$, $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in s$ asetetaan

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|},$$

on d metriikka joukossa s .