

Luku 3

Taloustieteiden tärkeimpiä suureita

Mitään yleistä ja yksikäsitteistä perussuurejärjestelmää taloustieteissä ei ole, koska sellaista ei ole fysiikassakaan. Kulloistakin teoriaamme tai malliamme varten kiinnitämme jotkin suureet perussuureiksi ja muut esiintyvät suureet ovat niistä johdettuja. Riittää, että suureen mittaluku toteuttaa Bridgmanin aksiooman. Tuollaisen mittaluvun olemassaolo voidaan perustella olettamalla sopiva järjestysrelaatio: jos on olemassa ideaalinen orsivaaka, jolla voidaan järjestää massakappaleet, niin sitten on olemassa Bridgmanin aksiooman toteuttava massan mittalukukin¹

Oletukset järjestysrelaatiosta ovat kuitenkin riittäviä, eivät välttämättömiä ehtoja. Teoriassamme tai mallissamme saa esiintyä suureita, joita emme periaatteessakaan voi mitata suoraan, koska sellaista esiintyy myös fysiikan teorioissa (vektoripotentiaali, aaltofunktio...) ja on myös muistettava Duhemin-Quinen teesi, jonka mukaan ainoatakaan fysiikan teoriaa ei voida suoraan testata empiirisesti, vaan aina testi kohdistuu koeteltavan teorian ja koejärjestelyä koskevien teorioiden ja alkuehtojen kompleksiin.

3.1 Määräsuureet

Määräsuureina käytetään kaikkia fysikaalisia määräsuureita: tilavuus, massa, pinta-ala, pituus... Rahan tai osakkeiden määrät ovat myös määräsuureita. Joskus on hyödyllistä panna esimerkiksi maidon ja bensiinin määrät dimensioltaan erisuuriksi: ne ovat molemmat nesteitä ja kelpaavat polttoaineeksi, mutta edellinen ihmisille, jälkimmäinen bensiinimoottoreille eikä niitä voi korvata toisillaan.

3.2 Arvosuureet

Taloustieteissä tavallisin arvosuure on vastaavan määräsuureen yksikköhinta. Maidon yksikköhinnan mittayksikkö on mk/l, hamppuköyden mk/m, metsätalousmaan mk/m², Olvi Oyj:n osakkeen mk/kpl...

Ihmiset voivat tunnistaa useampaa lajia samaa rahaa (omaa, ansaittua, vierasta, perittyä) ja kohdella samoja markkoja eri lailla. Tällöin heidän käyttäytymisensä kuvaamisessa on paikallaan jakaa rahan määrä vastaavasti eridimensioisiksi suureiksi. Arvosuureina on myös pidettävä kauneuden tai pyhyiden

¹ Ks. Niiniluoto, Ilkka: *Approksimaatio ja idealisaatio teorianmuodostuksessa*. Arkhimedes 1A/1986, ss. A38-A48. Aiheesta myös: Krantz, David H.; Luce, R. Duncan; Suppes, Patrick; Tversky, Amos: "Foundations of measurement. Vol. 1: Additive and polynomial representations". Academic Press, New York & Lontoo, 1971. Vrt. janamitan yksikäsitteisyys geometrian kurssilla.

määriä. Molemmilla voisi olla käyttöä, jos kuvaisimme vaikkapa kynttilöiden ja ikoninkuvien menekkiä krasnodarilaisen kirkon eteisessä.

3.3 Nopeussuureet

Huomattava osa taloudellisista ilmiöistä on dynaamisia: maata kyllä omistetaan siitä siirtelemättä, mutta päivittäistavaroita ostetaan ja myydään joka päivä. Tärkeitä suureita ovat siksi kulutus-, tuotanto-, investointinopeudet. Niiden yksikkö on vastaavan määräsuureen yksikkö jaettuna aikayksiköllä. Jos aika on jatkuva, niin nopeussuureen $q(t)$ yleinen määritelmä on vastaavan määräsuureen $Q(t)$ derivaatta ajan suhteen:

$$q(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(t+h) - Q(t)}{h}.$$

Jos taas aika on diskreetti, käytämme määräsuureita tai erotusosamäärällä

$$q(t_i) = \frac{Q(t_i) - Q(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

määriteltä nopeussuuretta.

Tavallisia yksiköitä tuotanto- tai kulutusnopeudelle ovat m/kk, l/s, kpl/d. Investointinopeuden yksikkönä voi olla mk/d. Myös tuotantokustannukset aikayksikössä ja myyntitulot aikayksikössä ovat nopeussuureita. Niiden yksikkö voi olla myös mk/d. Huomaa, että korko on sikäli nopeussuure, että sen yksikkö on 1/d, dimensio T^{-1} , ja korko $\times$ pääoma on selvästi nopeussuure.

3.4 Kertymäsuureet

Jos q on nopeussuure ja aika on diskreetti eli $T' = \{\tau_i \in \mathbb{R} \mid i = 1, 2, \dots, b\}$, missä $b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, niin summa

$$\sum_{i=1}^b q(\tau_i)(\tau_i - \tau_{i-1})$$

kertoo aikana T' kertyneen määrän. Jos aika on jatkuva ja $[t_1, t_2] \subset T'$, niin silloin integraali

$$\int_{t_1}^{t_2} q(t) dt$$

kertoo ajanhetkien t_1 ja t_2 välillä kertyneen määrän.

Jos siis tuotteen tuotantonopeus on $q(t) = \alpha t^2$, $\alpha > 0$ on vakio, niin ajanhetkien $t = 0$ ja $t = 3d$ välillä tuotettu tavaramäärä on

$$Q = \int_0^{3d} \alpha t^2 dt = \int_0^{3d} \frac{\alpha}{3} t^3 = 9\alpha d^3.$$

Huomaa, että integraalilaskennan peruslauseen mukaan kertymäsuureen derivaatta ajan suhteen on vastaava nopeussuure.

Tyypillinen taloudellinen kertymäsuure on päivittäin korkoa antavan pankkitilin korkotulot. Jos $r(t)$ on korko ja $y(t)$ on tilin saldo hetkellä t , niin ajanjaksolla $[0, t]$ kertyneet korkotulot ovat

$$\int_0^t r(\tau)y(\tau) d\tau$$

Jos korko maksetaan päivittäin tilille, pätee kasvuyhtälö

$$y'(t) = r(t)y(t), \quad t > 0.$$

3.4.1 Diracin δ -funktio

Fysiikassa tarvitaan funktiota δ , jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $\delta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$.
2. $\delta(x) = 0$ kaikilla $x \neq 0$.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x) dx = f(0)$ kaikilla origossa jatkuvilla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Tätä oliota sanotaan *Diracin δ -funktioksi*.

Olkoon $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *Heavisiden askelfunktio eli*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Sen derivaatta on Diracin δ -funktio, sillä jokaiselle funktiolle $f \in C_0^1(\mathbb{R})$ pätee osittaisintegroitukaavan mukaan

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H'(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)H(x) dx = \\ &= - \int_0^{\infty} f'(x) dx = f(0). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Näin siis $\delta(x) = H'(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkiksi pisteessä $a = (a_1, a_2, a_3)$ olevan elektronin varausjakaumaa esittää

$$\rho(y) = -e\delta_3(y - a) = -e\delta(y_1 - a_1)\delta(y_2 - a_2)\delta(y_3 - a_3),$$

missä δ_3 on kolmiulotteinen Diracin δ -funktio ja $e = 1,602 \cdot 10^{-16} Q$ on alkeisvaraus. Tällöin elektronin kokonaisvaraus on

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -e\delta(y_1 - a_1)\delta(y_2 - a_2)\delta(y_3 - a_3) dy_3 dy_2 dy_1 = -e.$$

Matemaattisesti Diracin δ -funktio ei ole funktio ja yllä oleva lasku Heavisiden askelfunktion derivaatasta on hölynpölyä. Seikka synnytti kiihkeän selkkauksen teoreettisten fyysikkojen ja matemaatikkojen välille. Tästä dialektisesta ristiriidasta syntyi synteesi, *distribuutioteoria*, joka on matemaattisesti korrekti ja merkittävä ala modernia matematiikkaa (distributionaalinen derivaatta, Sobolevin avaruudet...). Oikeasti Diracin δ -funktio ei ole funktio, vaan olio $\delta(x) dx$ on *mitta*. Osittainintegroitukaava (3.1) *määrittelee* funktion (distributionaalisen) derivaatan.

Osakkeiden osinko R (mk/osake) maksetaan tavallisesti kerran vuodessa tietynä täsmäyshetkenä t_1 omistettujen osakkeiden määrän $y(t_1)$ mukaan, joten osinkojen kertymä hetkellä t on

$$O(t) = \begin{cases} Ry(t_1), & \text{jos } t \geq t_1, \\ 0, & \text{jos } t < t_1. \end{cases}$$

Diracin δ -funktion avulla voidaan ilmaista osinkotulot samannäköisellä integraalilausekkeella kuin jatkuvat korkotulot:

$$\int_0^t R\delta(\tau - t_1)y(\tau) d\tau = \int_{-t_1}^{t-t_1} R\delta(\sigma)y(\sigma + t_1) d\sigma = \begin{cases} Ry(t_1), & \text{jos } t > t_1, \\ 0, & \text{jos } t < t_1. \end{cases}$$

Täten hetkellistä korkoa vastaava hetkellinen osinko on $R\delta(t - t_1)$ ja vastaava differentiaaliyhtälö on

$$y'(t) = R\delta(t - t_1)y(t), \quad t > 0.$$

3.5 Rajasuureet

Suureita voidaan yrittää derivoida muidenkin muuttujiensa kuin ajan suhteen. Tuloverot Suomessa riippuu vuotuisista tuloista. Henkilön vuodessa maksettava tulovero on $V(q)$, missä q on hänen tulonsa vuodessa. Sekä $V(q)$ että q ovat nopeussuureita. Funktio $q \mapsto V(q)$, $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ on paloittain affiini ja jatkuva. *Rajaveroasteeksi* sanotaan derivaattaa $V'(q)$.

Kuluttajan mielihyvä P voi olla funktio hänen kulutusnopeudestaan q ja massastaan m . Tällöin siis $P = P(m, q)$ eli mielihyvä on kahden muuttujan funktio. Nyt voidaan tutkia, onko sillä osittaisderivaatat noiden muuttujiensa suhteen. Jos on, niin niitä sanotaan *rajamielihyväksi* kulutusnopeuden ja massan suhteen, ja ne kertovat, miten kuluttajan mielihyvä muuttuu, jos täsmälleen toista noista muuttujista muutetaan. Yksi uskottava lauseke² kuluttajan mielihyvälle on

$$P(m, q) = \frac{\gamma m}{\alpha^2 + m^2} \ln \frac{q}{\beta},$$

missä $\gamma > 0$ on vakio, $\alpha = 100$ kg ja $\beta = 100$ g/d. Huomaamme, että rajamielihyvät

$$\frac{\partial P}{\partial m} = \gamma \frac{\alpha^2 - m^2}{(\alpha^2 + m^2)^2} \ln \frac{q}{\beta}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\gamma m}{\alpha^2 + m^2} \frac{1}{q},$$

käyttäytyvät eri lailla kun m ja q kasvavat. Kun m ylittää vakion α ja $q > \beta$, tulee rajamielihyvä $\partial P / \partial m$ negatiiviseksi ja siten massan lisäys vähentää kuluttajan mielihyvää. Kun taas kulutusnopeus kasvaa, lisääntyy mielihyvä alati. Mutta mitä suurempi q on, sitä pienemmäksi tulee rajamielihyvä $\partial P / \partial q$ ja niin sitä vähemmän mielihyvä kasvaa. Tätä ilmiötä sanotaan *alenevan rajamielihyvän laiksi* (jos mielihyvän sijasta tarkastelisimme hyötyä, nimitys olisi alenevan rajahyödyn laki). Ensimmäiset leipäpalat ovat nälkäiselle mieluisimmat³.

Olkoon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, missä $\emptyset \neq A \subset V$ ja V on vektoriavaruus. Sanotaan, että kuvaus f on *kupera*, jos kaikilla $x, y \in A$ ja $\lambda \in [0, 1]$ pätee

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \text{ ja } f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Jos $-f$ on kupera, niin kuvausta f sanotaan *koveraksi*. Olkoon $P: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ funktio joka ilmoittaa n :ää eri hyödykettä nopeuksilla $q_1, \dots, q_n$ kuluttavan kuluttajan mielihyvän aikayksikössä. Alenevan rajahyödyn laki toteutuu, kun kuvaus P on kovera, sillä silloin kaikki osittaisderivaatat ovat väheneviä vastaavan muuttujan kasvaessa. Sanomme mielihyvän P gradienttia

$$h(q_1, \dots, q_n) = \left(\frac{\partial P}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q_n} \right)$$

kuluttajan *maksuhalukkuudeksi*; sen i :s komponentti kertoo, paljonko kuluttaja on halukas maksamaan i :nnestä tuotteesta noilla kulutusnopeuksillaan. Alenevan rajamielihyvän lain mukaan maksuhalukkuus vähenee kulutuksen kasvaessa⁴. Klassisen potentiaaliteorian termein maksuhalukkuus on skalaaripotentiaalin P *vektorikenttä*⁵.

²Seuraavat raja-arvo-ominaisuudet ainakin toteutuvat:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0+} P(m, q) &= 0, & \lim_{m \rightarrow \infty} P(m, q) &= 0, \\ \lim_{q \rightarrow 0+} P(m, q) &= -\infty, & \lim_{q \rightarrow \infty} P(m, q) &= \infty. \end{aligned}$$

³Aleneva rajamielihyvän laki on poliittista dynamiittia: tulonsiirrot pienituloisimmille liisäävät väestön kokonaismielihyvää.

⁴Jos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja kahdesti derivoituva, niin f on kupera täsmälleen silloin kun $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

⁵Kuten klassisessa mekaniikassa gravitaatiokenttä tai sähköstatiikassa sähkökenttä. Huomaa kuitenkin, että mielihyvän muuttujat ovat nopeussuureita ja gradientti lasketaan niiden suhteen; gravitaatiokenttä ja staattinen sähkökenttä saadaan laskemalla vastaavan potentiaalilin gradientti paikkamuuttujien suhteen; paikkamuuttujat ovat määräsuureita.

Maksuhalukkuuden mittaaminen on yksinkertaista kyselytutkimuksin; toisaalta fysiikassa yleensäkin skalaaripotentiali on vain apusuure vektorikentän laskemiseksi. Siksi pidämme maksuhalukkuutta perustavampana suureena kuin mielihyvää⁶. Aivan kuten pyörteiset fysikaaliset vektorikentät voi maksuhalukkuus olla sellainen, että se ei ole skalaaripotentialin gradientti⁷.

Kuluttajan *hyöty* $U(p, q)$ aikayksikössä kulutusnopeudella q on erotus⁸

$$U(p, q) = P(q) - p \cdot q = P(q_1, \dots, q_n) - \sum_{i=1}^n p_i q_i,$$

missä p_i on tuotteen i yksikköhinta ja q_i sen kulutusnopeus, $i = 1, 2, \dots, n$. Hyöty on siis mielihyvä pois kustannukset.

Tuottajalle mielihyvää ja hyötyä vastaavat suureet ovat tuotantokustannukset ja voitto. Tuottakoon tuottaja n :ää eri tuotetta nopeuksilla $q_1, \dots, q_n$. Merkitään *tuotantokustannusta* aikayksikössä $C(q)$. Varsin usein $q \mapsto C(q)$ on kupera kuvaus, jolloin rajatuotantokustannukset ovat kasvavia. Tuotannon lisäämiseksi on laajennettava tuotantolaitosta, mistä tulee kuluja raaka-aine- ja työvoimakulujen lisäksi. Tuottajan *voitto* aikayksikössä on tulot aikayksikössä pois tuotantokustannus aikayksikössä. Jos tuottaja saa kaikki tuotteensa myytyä ja kunkin yksikköhinta on p_i , niin hänen voittonsa aikayksikössä on

$$\Pi(p, q) = p \cdot q - C(q) = \sum_{i=1}^n p_i q_i - C(q_1, \dots, q_n).$$

Tuotantokustannuksen kuperuudesta seuraa tällöin, että rajavoitot ovat vähenviä.

3.6 Rajoitteet

Taloudelliselle toiminnalle on ominaista sopeutuminen lukuisiin rajoitteisiin: käytettävissä olevien rahojen niukkuus rajoittaa kuluttamista budjettirajoittein, jotka ovat muotoa

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^n p_i q_i \leq M,$$

missä p_i on i :nnen tuotteen yksikköhinta ja q_i sen kulutusnopeus. Negatiivinen tuotanto- tai kulutusnopeus ei ehkä olekaan mahdollinen, tuotannon kasvattaminen yli tietyn rajan voi olla kilpailunedistämislainsäädännön vastaista tai tuotannon laajentamiseen tarvittavia tehdaskiinteistöjä ei ole saatavissa.

3.7 Informaatio

Praktisessa syllogismissa oleellinen tekijä on toimijan otaksumat vaikutusmahdollisuuksistaan, siis hänen *informaationsa*⁹ toimintaympäristöstään ja sen kehittämisestä. Ajan myötä tekijän informaatio muuttuu ja hän korjaa käyttäytymistään uusien otaksumiensa mukaiseksi.

⁶Mielihyvän käsitteen käyttöä vastaan on huomautettu, että se olisi muka huonosti määritelty, koska mikä hyvänsä funktio $f(P(q))$, missä f on aidosti kasvava, kertoisi samat ihmisen preferenssit, ja siten ihmisjoukon kokonaismielihyvä olisi sekin mielivaltainen käsite. Samalla perusteella ihmisen massa ja ihmisjoukon yhteismassa olisivat kelvottomia käsitteitä.

⁷Tällöin voidaan yhä puhua mielihyvästä, sillä klassisen potentiaaliteorian mukaan jokainen vektorikenttä on summa skalaaripotentialin gradientista ja vektoripotentialin roottorista.

⁸Tällöin oletetaan, että mielihyvän dimensio on sama kuin rahan määrän dimensio.

⁹Informaatio sinänsä ei ole tietoa, sillä tieto on totta tai ainakin "esiintyy totuuden vaatimuksin".

3.7.1 Esimerkki: osakesijoittaja

Tarkastellaan osakesijoittajaa, joka ostaa ja myy Olvi Oyj:n osakkeita. Hänen tilansa ajanhetkellä t on pari $(y_1(t), y_2(t)) = y(t)$, missä $y_1(t)$ on hänen asiakastilinsä saldo (mk) ja $y_2(t)$ on hänen arvo-osuustililleen kirjattujen Olvi Oyj:n osakkeiden määrä. Hetkellä t_0 hänellä on tillillä rahaa määrä y_0 ja osakkeita ei lainkaan. Hän haluaa toimia niin, että hänen varallisuutensa hetkellä $t_1 > t_0$

$$W(y, t_1) = y_1(t_1) + p(t_1)y_2(t_1)$$

on mahdollisimman suuri; tässä $p(t)$ on osakkeen yksikköhinta hetkellä t . Jos käytämme jatkuvaa aikaa ja jos sijoittajan asiakastilin korko maksetaan tillille heti, niin hänen asiakastilinsä saldo hetkellä $t \in [t_0, t_1]$ on

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t r_1(s)y_1(s) ds + \sum_{i=1}^{N_t} r_2(\tau_i)y_2(\tau_i) - \int_{t_0}^t p(s)y_2'(s) ds, \quad (3.2)$$

missä $r_1(s)$ on pankkitilin korko hetkellä s ja $r_2(\tau_i)$ osakkeista hetkellä τ_i omistettujen osakkeiden perusteella maksettava osinko; $N_t \in \mathbb{N}$ siten, että $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_t} \leq t$ ja $\tau_{N_t+1} > t$. Toinen termi on korkotulot: lauseke $r_1(s)y_1(s)ds$ on infinitesimaalisella¹⁰ aikavälillä ds kertynyt korkotulo, jolloin integraali yli koko välin $[t_0, t_1]$ antaa kaikki korkotulot. Tavallisesti korko maksetaan päivittäisen saldon mukaan ja siten toinen termi on tarkkojen korkotulojen likiarvo¹¹. Summan korvaaminen integraalilla (ja erotusosamäärän derivaatalla) mahdollistaa vuosisatoja kehittyneen matemaattisen analyysin¹² ja sen vahvojen menetelmien soveltamisen. Kolmas termi antaa osinkotulot: $\tau_1, \dots, \tau_{N_t} \in [t_0, t_1]$ ovat ajanhetket, joina omistettujen osakkeiden määrän perusteella jaetaan tuon tilivuoden osinko $r_2(\tau_i)$. Neljäs termi on myyntitulot osakkeista: jos $-dy_2 = y_2'(s)ds$ osaketta myydään infinitesimalisessa ajassa ds , niin niistä saadaan rahaa määrä $-p(s)y_2'(s)ds$. Rajoitteet ovat

$$y_1(t) \geq 0, \quad y_2(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t \in [t_0, t_1], \quad (3.3)$$

$$y_1(t_0) = y_0, \quad y_2(t_0) = 0. \quad (3.4)$$

Epäyhtälöt $y_1(t) \geq 0$ ja $y_2(t) \geq 0$ saadaan siitä, että tileillä ei ole luottoa. Viimeiset kaksi yhtälöä kertovat alkutilan.

Tulevaa korkoa, osinkoja eikä osakekurssia sijoittaja ei tiedä. Aina kun hänen informaationsa eli käsityksensä niiden tulevista arvoista muuttuu, on hänen haettava uudestaan ne funktiot y_1 ja y_2 , joilla hänen varallisuudestaan tulee suurin. Hänen on siis haettava ne derivoituvat *funktiot* $y_1, y_2: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, jotka toteuttavat (3.2)–(3.4) ja joilla *funktionaali*¹³ $(y_1, y_2) \mapsto W(y, t_1)$ on suurin. Osakesijoittajamme ääriarvotehtävän osasia nimitetään toisinaan, etenkin *sääntöteoriassa*¹⁴, seuraavasti: $y \mapsto W(y, t_1)$ on voittofunktio, (3.2) on tilayhtälö, (3.3) on rajoitteet ja (3.4) on alkuehdot.

Yllä rajoituttiin derivoituihin funktioihin y_1 ja y_2 . Maksimoitava funktionaali on lineaarinen ja se ei ole identtisesti nolla, joten jos ääriarvokohta on olemassa, niin ainakin toinen rajoite-epäyhtälöistä (3.3) toteutuu yhtälönä. Näinhän käy myös maksimoitaessa lineaarikuvausta $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jossakin tason joukossa. Tällöin derivoituvuuden oletaminen funktioista y_1 ja y_2 on liian paljon. Paloittain jatkuvuuden on riitettävä, sillä selvästi näemme erikoistapauksia (sopivat $p(t)$, $r_1(t)$ ja $r_2(t)$), joissa sijoittajan käyttäytyminen on ns. bang-bang-toimintaa¹⁵:

¹⁰Fyysikkojen kieltä, “äärettömän pieni”. Palaamme vielä infinitesimaalisiin tarkasteluihin perusteellisemmin.

¹¹Nykyään pankkien olisi teknisesti helppoa laskea korko vaikkapa sekunneittain.

¹²Se matematiikka, joka perustuu raja-arvon käsitteeseen. Siis differentiaali- ja integraalilaskenta, differentiaaliyhtälöt yms.

¹³Ts. reaaliarvoinen funktio, jonka muuttuja on funktio.

¹⁴Engl. (optimal) control theory.

¹⁵Sääntöteorian termi, tarkoittaa menettelyä, jossa resursseja vuorotellen käytetään täydellä teholla ja ei lainkaan.

jos sijoittaja uskoo osakekurssien nousevan huomiseksi kaksinkertaiseksi ja laskevan takaisin ylihuomiseksi, niin hänen on ostettava tänään osakkeita kaikilla varoillaan ja myytävä ne kaikki huomenna. Integraaliyhtälöstä (3.2) saadaan integroimalla viimeinen termi osittain ja soveltamalla alkuehtoja (3.4), että

$$y_1(t) - \int_{t_0}^t r_1(s)y_1(s) ds = y_0 + \sum_{i=1}^{N_t} r_2(\tau_i)y_2(\tau_i) - y_2(t)p(t) + \int_{t_0}^t y_2(s)p'(s) ds \text{ kaikilla } t \in [t_0, t_1] \quad (3.5)$$

Tämä yhtälö ei vaadi funktioilta y_1 ja y_2 kuin integroituvuuden¹⁶, johon riittää paloittain jatkuvuus. Edelleen yhtälöstä (3.5) voidaan ratkaista vakion varioimiskeinolla y_1 y_2 :n funktiona. Lauseke on affini¹⁷ y_2 :n suhteen. Korvaamme yhtälön (3.2) yhtälöllä (3.5), joilloin voimme eliminoida loppuvarallisuuden lausekkeesta funktion y_1 pois ja saamme yhden tuntemattoman funktion ääriarvotehtävän rajoittein (3.3).

3.8 Harjoitustehtäviä

1. Tarkastellaan palkansaajan käyttötilin saldoa $y(t)$ hetkellä t vuoden aikana. Hän saa jokaisen kuukauden viimeinen päivä tililleen palkkaa 8000 mk, 30.6 lisäksi lomarahaa 5000 mk, jokaisen kuukauden 15. päivä hän maksaa vuokraa asunnostaan 2000 mk. Käyttötililtään hän nostaa pankkikorttiostoksina joka päivä 100 mk. Käyttötilin korko on 2 %/vuosi, se lasketaan päivittäisestä saldosta ja maksetaan käyttötilille 30.11. Käytä jatkuvaa aikaa ja oletta, että vuodessa on tasan 12 kpl 30-päiväistä kuukautta. Laske $y(t)$ jokaiselle $0 \leq t \leq 360$ vrk, kun $y(0) = 8000$ mk.
2. Jatketaan edellistä tehtävää. Laske $y'(t)$ ja lausu se Diracin δ -funktion avulla. Tarkasta tuloksesi laskemalla $\int_0^{361 \text{ vrk}} y'(t) dt$.
3. Poliittisessa propagandassa esitetään toisinaan yleispätevänä tosiasiana väite, että yrityksen optimaalinen työvoiman kysyntä vähenee, jos palkkoja korotetaan ja korkotaso laskee. Siten palkkojen korottaminen heikentäisi työllisyyttä. Tutki väitteen todenperäisyyttä seuraavan yrityksen avulla. Sen voiton aikayksikössä hetkellä t lausuu funktio

$$\Pi: [0, \infty]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \Pi(K, L) = \alpha K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}} - rK - wL,$$

missä K on tuotantolaitteisiin sijoitetun pääoman määrä (mk) ja L on käytetyn työvoiman määrä aikayksikössä (miestyötunti/tunti). Ensimmäinen termi antaa tuotteen myyntitulot; vakio $\alpha > 0$ sisältää tuotteen yksikköhinnan, joka on vakio, ja edelleen tuotantonopeus on kertovaa vakioita vaille $K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}$. Toinen termi esittää työvoimakustannuksia aikayksikössä ja kolmas pääomakustannuksia aikayksikössä (r on korko, joka joudutaan maksamaan laitteiden hankkimislainasta). Osoita, että Π saavuttaa suurimman arvonsa yksikäsitteisessä pisteessä $(K_*, L_*) \in (0, \infty)^2$ ja ilmoita se parametrien α , r ja w avulla. Valitse edelleen $w = w_0(1 + a)$ ja $r = r_0(1 - a)$, $-1 < a < 1$, $w_0, r_0 > 0$, jolloin $L_* = L_*(a)$. Mitä tapahtuu kun a kasvaa? (Muista, että $\alpha\beta \leq \epsilon\alpha^2 + \frac{1}{4\epsilon}\beta^2$ kaikilla $\alpha, \beta \geq 0$ ja $\epsilon > 0$ ja että kompaktissa joukossa jatkuva kuvaus saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa.)

4. Poliitikko Piia-Noora Kaupin mielestä¹⁸ olisi oikeudenmukaista jakaa miljoonan markan perintö rutiköyhän ja upporikkaan veljeksien välillä siten,

¹⁶Riemann-integroituvuuden tai Lebesgue-integroituvuuden.

¹⁷Affini kuvaus on lineaarikuvaus ynnä vakio.

¹⁸NYT, 7/2000, s. 10.

että köyhimys saa 100 000 mk ja pohatta 900 000 mk, *koska* sellainen jako olisi molemmille suhteellisesti sama.

Oletetaan, että kummakin veljeksien mielihyvä U riippuu hänen varallisuudestaan r (1000 mk) ja elävien sukulaistensa määrästä s (1 kpl) lausekkeen $U(r, s) = \sqrt{r + 1000s}$ mukaisesti. Olkoon alkutilanne $(r_0, s_0) = (0, 2)$ ja $(\tilde{r}_0, \tilde{s}_0) = (16000, 2)$. Sukulaisen kuoleman ja perinnönjaon jälkeen tilanne on $(r_1, s_1) = (x, 1)$ ja $(\tilde{r}_1, \tilde{s}_1) = (17000 - x, 1)$, missä x on siis köyhimyksen osa perinnönjaossa. Totea ensiksi, että rajamielihyvä on positiivinen ja vähenevä niin varallisuuden kuin sukulaisten määrän kasvaessa eli kyseessä on aivan tavallinen mielihyväfunktio. Määrää x Kaupin ehdosta

$$\frac{U(r_1, s_1) - U(r_0, s_0)}{U(r_0, s_0)} = \frac{U(\tilde{r}_1, \tilde{s}_1) - U(\tilde{r}_0, \tilde{s}_0)}{U(\tilde{r}_0, \tilde{s}_0)}. \quad (3.6)$$

Laske vielä, mitä ehtoa (3.6) noudattavan tuomarin tulisi päättää, jos perintö onkin vain 1000 mk.

Luku 4

Kaksi numeerisen matematiikan menetelmää

Tarkastelemme tässä luvussa kahta numeerisen matematiikan menetelmää, jotka ovat perustavia taloudellisten mallien ja taloustieteiden kannalta. Nämä menetelmät ovat *iterointi* yhtälön ratkaisemiseksi ja *gradienttimenetelmä* funktion ääriarvon löytämiseksi.

4.1 Iterointi

4.1.1 Keplerin yhtälön ratkaiseminen

Keplerin ensimmäinen laki sanoo, että planeetat kiertävät ellipsinmuotoisia ratoja, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko on. Keplerin toisen lain mukaan Aurinko-planeetta-yhdysjanan ja ellipsin isoakselin rajaama pinta-ala kasvaa vakionopeudella (eli pintaanopeus on vakio¹). Keplerin kolmannen lain mukaan planeetan radan isoakselin kuutio on suoraan verrannollinen planeetan kiertoaajan neliöön. Nämä lait mahdollistavat planeetan paikan laskemisen, kunhan kuusi kullekin planeetalle ominaista vakiota, ns. rataelementtiä, tiedetään². Tämän laskun vaikein askel on seuraavan *Keplerin yhtälön*

$$E - e \sin E = M \quad (4.1)$$

ratkaiseminen; M on planeetan *keskianomalia*,

$$M = 2\pi \frac{t - T}{P},$$

missä T on aika, jolloin planeetta on perihelissä³, ja P on planeetan kiertoaika;

$$0 \leq e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 \quad (4.2)$$

on planeetan radan *eksentrisyys* (a ja b ovat radan iso- ja pikkuakselin puolikaat). Tuntematon suure E on planeetan *eksentrisen anomalia* eli kulma, jonka sivuilla planeetta ja periheli ovat ja jonka kärkenä on radan keskipiste.

¹Pintaanopeus $A(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t)$, missä $\times$ on vektoritulo, jolloin keskeisvoimakentässä $2A'(t) = \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}''(t) = 0$.

²Ks. Heikki Oja, Taivaanmekaniikka, Limes ry, Helsinki 1977, ss. 10-17, tai Hannu Karttunen, Johdatus taivaanmekaniikkaan, Limes ry, Helsinki 1980, ss. 26-35.

³Kiertolaisen radan piste, joka on lähinnä keskuskappaletta. Jupiterin kuilla vastaavan pisteen nimi on perijovium, Kuulla perigeum.

Yhtälön (4.1) tarkka ratkaiseminen onnistuu⁴ helposti vain joissakin erikoistapauksissa (esim. jos $M = 0$), joten yritetään seuraavaa menettelyä. Yhtälöstä (4.1) saamme

$$E = M + e \sin E, \quad (4.3)$$

joten määrittelemme induktiivisesti lukujonon (E_n) :

$$E_0 = 0, \quad E_{n+1} = M + e \sin E_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Osoitetaan, että Keplerin yhtälön ratkaisu on yksikäsitteinen. Olkoot E ja $\tilde{E}$ kaksi sen ratkaisua siten, että $E \neq \tilde{E}$. Silloin väliarvolauseen nojalla on niiden välissä luku ξ siten, että

$$\begin{aligned} |E - \tilde{E}| &= e |\sin E - \sin \tilde{E}| = e |\cos \xi| \cdot |E - \tilde{E}| \\ &\leq e |E - \tilde{E}| < |E - \tilde{E}|, \end{aligned}$$

mikä on mahdotonta. Siten $E = \tilde{E}$.

Jono (E_n) on rajoitettu, sillä $|E_n| \leq |M| + e$. Siten sillä on osajono, joka suppenee kohti jotakin lukua E . Sinin jatkuvuuden perusteella tuo E on Keplerin yhtälön ratkaisu. Jos jono (E_n) ei suppenisi kohti lukua E , niin jonolla (E_n) olisi osajono, jonka kaikki alkiot olisivat kauempana kuin jokin kiinteä $\epsilon > 0$ luvusta E . Kuitenkin tuolla osajonolla on suppeneva osajono, joka suppenisi kohti Keplerin yhtälön ratkaisua. Koska ratkaisu on yksikäsitteinen, saadaan ristiriitaa. Siten koko jono (E_n) suppenee. Tarvitsemme kuitenkin myös virhearvion termille E_n . Haemme siksi toisenlaista todistusta ratkaisun olemassaololle.

Olkoot $n, p \in \mathbb{N}$. Huomaamme ensin — kuten ratkaisun yksikäsitteisyyden todistuksessa —, että

$$|E_{n+1} - E_n| = e |\sin E_n - \sin E_{n-1}| \leq e |E_n - E_{n-1}| \leq \dots \leq e^n |E_1 - E_0| = e^n |M|.$$

Kolmioepäyhtälön nojalla edelleen

$$\begin{aligned} |E_{n+p} - E_n| &\leq |E_{n+p} - E_{n+p-1}| + |E_{n+p-1} - E_{n+p-2}| + \dots + \\ &\quad + |E_{n+1} - E_n| \leq e^{n+p-1} |M| + e^{n+p-2} |M| + \dots + e^n |M| = \\ &= e^n |M| (1 + e + \dots + e^{p-1}) \leq e^n \frac{|M|}{1 - e}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Täten $|E_n - E_m| \rightarrow 0$, kun $n, m \rightarrow \infty$, eli (E_n) on Cauchyn jono. Koska jokainen lukusuoran Cauchyn jono suppenee, on olemassa $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$. Tällöin (4.5) antaa virhearvion

$$|E - E_n| \leq e^n \frac{|M|}{1 - e}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Suppeminen on nopeaa, sillä esimerkiksi Marsille $e = 0,093$.

4.1.2 Banachin kiintopistelause

Yleistämme edellisessä jaksossa löytämämme ongelman ja sen ratkaisumenetelmän. Olkoon V epätyhjä joukko ja $d: V \times V \rightarrow [0, \infty)$ kuvaus, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa.

1. $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in V$. (Symmetrisyys).

⁴Jos kuvauksella $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$, $a < b$, $c < d$, on käänteisfunktio $f^{-1} = g$, jonka pisteessä c kehitetty Taylorin sarja suppenee välillä $[c, d]$, niin yhtälön $f(x) = y$, $y \in [c, d]$, ratkaisu on

$$x = g(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(c)}{j!} (y - c)^j.$$

Derivaatat $g^{(j)}(c)$ voidaan laskea ketjusäännön avulla ja Taylorin kaava antaa arvion sarjan katkaisemisesta syntyvälle virheelle.

2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in V$. (Kolmioepäyhtälö).
3. $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$. (Definiittisyys).

Sanomme paria (V, d) *metriseksi avaruudeksi* ja kuvausta d sen *metriikaksi*. Jono (x_n) metrisen avaruuden (V, d) alkioita on *Cauchyn jono*, jos

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0, \text{ kun } m, n \rightarrow \infty.$$

Metrisen avaruus (V, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono (x_n) *suppenee* eli on olemassa $x \in V$ siten, että $d(x_n, x) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$.

Olkoon (V, d) metrisen avaruus ja $F: V \rightarrow V$. Pistettä $x \in V$, joka toteuttaa yhtälön $F(x) = x$, sanomme kuvauksen F *kiintopisteeksi*. Kuvausta F sanomme *vahvaksi kutistuskuvaukseksi*, jos on olemassa $\alpha \in [0, 1)$ siten että

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in V. \quad (4.7)$$

Jos (4.7) toteutuu luvulla $\alpha = 1$, sanomme kuvausta F *kutistuskuvaukseksi*. Lukua α sanomme kuvauksen F *suurennussuhteeksi*.

Lause 4.1.1 (*Banachin kiintopistelause*). *Olkoon (V, d) täydellinen metrisen avaruus, $x_0 \in V$, $F: V \rightarrow V$ vahva kutistuskuvauksena ja α sen suurennussuhde. Silloin kuvauksella F on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in V$. Lisäksi jono (x_n) , $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, toteuttaa epäyhtälön*

$$d(x, x_n) \leq \alpha^n \frac{d(x_0, F(x_0))}{1 - \alpha}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Todistus. Olkoot $n, p \in \mathbb{N}$. Koska F on vahva kutistuskuvauksena,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Kolmioepäyhtälön nojalla edelleen

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots \\ &\quad \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+p-1} + \alpha^{n+p-2} + \dots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots) d(x_1, x_0) \leq \alpha^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Täten $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, kun $n, m \rightarrow \infty$, eli (x_n) on Cauchyn jono. Koska (V, d) on täydellinen, (x_n) suppenee kohti jotakin $x \in V$. Kolmioepäyhtälön nojalla nyt

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x, x_{n+p}) + \alpha^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \alpha},$$

mistä (4.8) seuraa, kun $p \rightarrow \infty$. Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} d(x, F(x)) &\leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(x)) \\ &= d(x, x_{n+1}) + d(F(x_n), F(x)) \leq \\ &\leq d(x, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x) \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Metriikan deniitiittisyyden nojalla $x = F(x)$ eli x on kuvauksen F kiintopiste.

Osoitetaan vielä kiintopisteen yksikäsitteisyys. Olkoot x ja $\tilde{x}$ kiintopisteitä. Silloin

$$d(x, \tilde{x}) = d(F(x), F(\tilde{x})) \leq \alpha d(x, \tilde{x}) < d(x, \tilde{x}),$$

josta $d(x, \tilde{x}) = 0$ eli $x = \tilde{x}$.

m.o.t.

Banachin kiintopistelause sisältää myös numeerisen menetelmän virhearvioineen kiintopisteen laskemiseksi. Tätä menetelmää sanotaan *iteroimiseksi* yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisemiseksi. Ensin muokkaamme alkuperäisestä yhtälöstä $f(x) = 0$ lausekkeen $x = F(x)$. Kuvaus F ei luonnollisestikaan määräydy yksikäsitteisesti, joten pyrimme valitsemaan sellaisen F , joka on vahva kutistuskuvauksena ja vielä kohtuullisen pienellä suurennussuhteella α , sillä silloin iterointi suppenee nopeasti.

4.1.3 Diskreetit dynaamiset järjestelmät

Kiintopistelauseet ovat sovellutustensa kannalta tärkeä osa matematiikkaa: differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ratkeavuus voidaan usein palauttaa kysymykseksi sopivan apufunktion kiintopisteen olemassaolosta. Esimerkiksi Banachin kiintopistelauseella näytetään, että alkuarvotehtävällä

$$y'(t) + Ly(t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0,$$

on yksikäsitteinen jatkuvasti differentioituva ratkaisu $y: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \dots$, kunhan $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ on Lipschitz-jatkuva.

Tarkastellaan seuraavaa differentiaaliyhtälöä alkuehdon kera

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad (4.9)$$

missä $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \dots$. Yksinkertainen numeerinen menetelmä tämän ratkaisemiseksi perustuu derivaatan korvaamiseen erotusosamäärällä. Silloin saamme *differenssiyhtälön*

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = f(y(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

alkuehdolla $y(t_0) = y_0$; tässä $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Merkitsemme

$$x_n = y(t_n), \quad F_n(x) = x + (t_{n+1} - t_n)f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Silloin differenssiyhtälöstä (4.7) tulee iterointikaava

$$x_{n+1} = F_n(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

Tähän samaan kaavaan päädyttyään, kun taloudellisen järjestelmän aika on *diskreetti*. Näin on esimerkiksi silloin, kun yrittäjä päättää illalla suljettuaan liikkeensä ja laskettuaan päivän ostot ja myynnit, miten hän seuraavana päivänä käyttäytyy. Ajan askelpituus on tällöin yksi päivä. Kun aika on diskreetti, ei iterointikaava (4.12) ole approksimaatio vaan tarkka.

Olkoon aika diskreetti ja sen askelpituus vakio. Silloin $F_n = F$ kaavassa (4.11) ja Banachin kiintopistelause antaa oitis riittävän ehdon sille, että dynaaminen järjestelmä (4.12) kehittyy kohti stationaarista tilaa, kun $n \rightarrow \infty$. Riittää, että kuvaus F on vahva kutistuskuvaus, mikä toteutuu, jos $F(x) = x - \beta x$ ja $\beta \in (0, 2)$. Itse asiassa

$$x_n = (1 - \beta)^n x_0 = \begin{cases} \rightarrow 0, & \text{jos } 0 < \beta < 2, \\ = x_0, & \text{jos } \beta = 0 \text{ tai } x_0 = 0, \\ \rightarrow \infty, & \text{jos } \beta < 0 \text{ ja } x_0 > 0, \\ \rightarrow -\infty, & \text{jos } \beta < 0 \text{ ja } x_0 < 0, \\ \nrightarrow & \text{muulloin.} \end{cases}$$

4.2 Gradienttimenetelmä

Olkoon⁵ $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, differentioituva. Sen differentiaali $df = (\nabla f(x) | \cdot)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ approksimoi funktion f muutosta tuossa pisteessä⁶:

$$f(x+h) - f(x) = (\nabla f(x) | h) + \epsilon_x(h) \|h\|,$$

⁵Tämän jakson yksityiskohdista tarkemmin esim. Kaisa Miettinen, Optimointi, Jyväskylän yliopisto, matematiikan laitos, luentomoniste 33, 1995, ss. 33-39.

⁶Merkitään

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2} \text{ ja } (x|y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^m.$$

missä $h \in \mathbb{R}^m$ ja $\epsilon_x(v) \rightarrow 0$ kun $\|v\| \rightarrow 0$. Tästä saadaan edelleen, että funktion f suunnattu derivaatta $D_h f(x)$ pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ suuntaan $h \in \mathbb{R}^m$, $\|h\| = 1$, on funktion muutosnopeus tuohon suuntaan ja

$$D_h f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \delta h) - f(x)}{\delta} = (\nabla f(x)|h).$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö sanoo, että

$$- \|a\| \|b\| \leq (a|b) \leq \|a\| \|b\|,$$

missä jälkimmäisessä pätee yhtäsuuruus vain jos vektorit $a \neq 0$ ja $b \neq 0$ ovat samansuuntaisia eli $a = \lambda b$, $\lambda > 0$. Näin funktio f kasvaa pisteessä $x \in \mathbb{R}^m$ nopeiten suuntaan⁷ $\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$. Tähän huomioon perustuu *gradienttimenetelmä* eli jyrkimmän nousun menetelmä funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ (lokaalin) maksimin⁸ löytämiseksi. Sen algoritmi on seuraava:

1. Valitse lopetusparametri $\epsilon > 0$ ja alkupiste $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Aseta $n = 0$.
2. Laske $d_n := \nabla f(x_n)$. Jos $\|d_n\| < \epsilon$, lopeta.
3. Ratkaise yksiulotteinen maksimointitehtävä

$$\max\{f(x_n + \lambda d_n) \mid \lambda \geq 0\}$$

ja merkitse sen ratkaisua λ_n .

4. Aseta $x_{n+1} := x_n + \lambda_n d_n$ ja $n := n + 1$. Jatka kohdasta 2.

Lopetusehto $\|d_n\| < \epsilon$ korvataan toisinaan jollakin seuraavista ehdoista:

$$\max_{i=1,\dots,m} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \right\} < \epsilon, \quad \|\nabla f\| < \epsilon, \quad |f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \epsilon, \quad \|x_{n+1} - x_n\| < \epsilon.$$

Funktion f gradientti lasketaan tavallisesti numeerisesti kaavasta

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x + \delta e_i) - f(x)}{\delta},$$

missä $\delta \approx 0$ ja e_i on i :nnen koordinaatiakselin suuntainen yksikkövektori.

Yksinkertaistetussa gradienttimenetelmässä algoritmin toisen askeleen maksimointitehtävä jätetään pois: valitaan joko λ_n kiinteäksi positiiviseksi parametrikseksi tai sitten sitä muutellaan algoritmin edetessä. Tällainen yksinkertaistettu gradienttimenetelmä on taloustieteen ja taloudellisen mallintamisen kannalta muutakin kuin näppärä numeerisen matematiikan keino. Voittoaan tai hyötyään maksimoiva puuttellisesti informoitu yrittäjä tai kuluttaja käyttäytyy kuin yksinkertaistettu gradienttimenetelmä. He laskevat voittonsa tai hyötynsä gradientin kullakin ajan hetkellä ja muuttavat käyttäytymistään siihen suuntaan, mihin voitto tai hyöty näyttää kasvavan nopeiten.

Gradienttimenetelmää ilman yksinkertaistuksia käyttävä yrittäjä voisi tehdä tai teettää markkinatutkimuksia, mutta ne olisivat niin kalliita tai vaikeita, että voittofunktion lauseke on kohtuullisin vaivoin ja kustannuksin saatavissa vain yhteen suuntaan.

Numeerisia menetelmiä maksimin löytämiseksi on muitakin ja ne soveltuvat myös mallintamiseen samoin suoraan: gradienttimenetelmää parempi menetelmä on *Newtonin menetelmä*⁹, jonka algoritmi on seuraava:

⁷Suunnattu derivaatta on kasvunopeus, jos suunnan normi on 1. Muuten kelpaisi pelkkä $\nabla f(x)$.

⁸Jos täytyisi hakea funktion f minimiä, käytettäisiin hyväksi sitä, että suuntaan $-\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ funktio f pienenee nopeiten. Silloin algoritmin toista askelta muutetaan seuraavasti: $d_n := -\nabla f(x_n)$. Menetelmän nimi on tällöin jyrkimmän laskun menetelmä.

⁹Newtonin menetelmä vaatii enemmän säännöllisyyttä maksimoitavalta funktioltä ja siinä mielessä se on huonompi kuin gradienttimenetelmä. Toisaalta Newtonin menetelmä suppenee nopeammin etenkin ääriarvokohdan lähellä.

1. Valitse lopetusparametri $\epsilon > 0$ ja alkupiste $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Aseta $n = 0$.
2. Laske $d_n := -H(x_n)^{-1} \nabla f(x_n)$ missä $H(x_n)$ on funktion f Hessen matriisi¹⁰ pisteessä $x_n \in \mathbb{R}^m$. Jos $\|d_n\| < \epsilon$, lopeta.
3. Aseta $x_{n+1} := x_n + d_n$ ja $n := n + 1$. Jatka kohdasta 2.

Newtonin menetelmä perustuu siihen, että maksimoitavaa kuvausta approksimoidaan pisteessä x_n sen toisen asteen Taylorin polynomilla ja pisteeksi x_{n+1} valitaan approksimaatin maksimikohta¹¹. Täten Newtonin menetelmä ratkaisee samalla yhtälöä $\nabla f(x) = 0$. Newtoninkaan menetelmä ei vaadi sitä soveltavaa yrittäjää tietämään tulevaisuutta, vaan laskemaan toteutuneista myynneistään ja kuluistaan ensimmäisen ja toisen kertaluvun osittaisderivaatat.

4.2.1 Vapaa markkinatalous vs. suunnitelmatalous

Niin gradienttimenetelmä kuin Newtonin menetelmä soveltuvat lokaalien ääriarvokohtien hakemiseen. On helppo muodostaa kuvauksia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, joiden globaaleja ääriarvoja kumpikaan niistä ei löydy (tämän havainnollistaminen käy parhaiten piirtämällä korkeuskäyriä sopivasta maastosta tai muovaamalla lumesta pinta, jolla lumipallo saa hakea alinta kohtaa). Edelleen tästä huomiosta seuraa, että voittoa tai hyötyä maksimoivien taloudellisten toimijoiden yhteisö ei välttämättä osaa hakeutua tilaan, jossa sen enempää kokonaisvoiton ja -hyödyn summa tai edes yksittäisten toimijoiden voitto tai hyöty olisi mahdollisimman suuri. Voi jopa käydä niin, että yksilöiden voitontavoittelu tuhoaa koko yhteisön. Tavallinen historiallinen esimerkki talouden ohjaamisesta väkisin kohti suurempia voittoja ja hyötyjä on sähköistämisen tai rautateiden rakentamisen kaltaiset suurinvestoinnit: Euroopassa ne on toteuttanut valtio.

Tarkastellaan taloutta, jossa tuotetaan ja kulutetaan vain yhtä tuotetta, joka on nopeasti pilaantuva ja jonka yksikköhinta hetkellä t on $p(t)$. Sen tuotantonopeus hetkellä t on $q_s(t)$ ja kysyntänopeus on $q_d(t)$. Tuottajat voivat päättää vapaasti tuotantonopeutensa ja kuluttajat kysyntänopeutensa. Tuottajien voitto aikayksikössä hetkellä t on

$$\Pi(t) = \min\{q_d(t), q_s(t)\} - C(q_d(t)),$$

missä $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esittää tuotantokustannuksia aikayksikössä hetkellä t . Nyt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = \begin{cases} p - C'(q_s), & \text{jos } q_s \leq q_d, \\ -C'(q_s), & \text{jos } q_s \geq q_d, \end{cases} = H(q_d - q_s)p - C'(q_s),$$

missä H on Heavisiden askelfunktio. Kuluttajien hyöty aikayksikössä hetkellä t on

$$U(t) = P(q_d(t)) - p(t)q_d(t),$$

missä $P(q_d(t))$ esittää heidän mielihyväänsä aikayksikössä. Nyt

$$\frac{\partial U}{\partial q_d} = h(q_d) - p,$$

missä $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esittää kuluttajien maksuhalukkuutta. Yksinkertaistetun gradienttimenetelmän mukaisesti

$$q_d'(t) = \alpha \left(h(q_d(t)) - p(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.13)$$

$$q_s'(t) = \beta \left(p(t)H(q_d(t) - q_s(t)) - C'(q_s(t)) \right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

¹⁰Kuvauksen $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ toisen kertaluvun differentiaali $h \mapsto d^2 f(x; h)$ on neliömuoto $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m) H(x) (h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m)^T$.

¹¹Jotta Newtonin menetelmän algoritmi olisi kaikille $x_0 \in \mathbb{R}^m$ hyvin määritelty, on toisen kertaluvun differentiaalin $h \mapsto d^2 f(x; h)$ oltava kaikilla $x \in \mathbb{R}^m$ olemassa ja definiitti. Jos se on positiivisesti definiitti kaikkialla, ei funktiolla ole maksimeita.

missä α ja β ovat positiivisia vakioita.

Markkinataloudessa tuotteen yksikkohinta määräytyy kysynnän ja tarjonnan lain mukaan. Paul Samuelson¹² ilmaisi sen differentiaaliyhtälöllä

$$p'(t) = \gamma(q_d(t) - q_s(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

missä $\gamma > 0$ on vakio. Differentiaaliyhtälöt (4.13)-(4.15) kuvaavat yksinkertaista vapaata markkinataloutta: tuottajat tavoittelevat suurinta mahdollista voittoa, kuluttajat suurinta mahdollista hyötyään ja tuotteen hinta määräytyy markkinoilla. Yhtälöistä (4.13)-(4.15) voidaan muodostaa myös diskreetit versiot, joko itse malliksi tai sitten jatkuvan mallin numeeriseksi ratkaisemiseksi. Joka tapauksessa voimme nyt konstruoida esimerkkejä, joissa vapaa markkinatalous hakeutuu tai ei hakeudu ilman ulkopuolista ohjausta kohti tilaa, joka antaisi tuottajille suurimman voiton ja kuluttajille suurimman hyödyn (erikseen tai minä hyvänsä painotettuna summana).

4.3 Harjoitustehtäviä

1. Tarkastellaan yhtälöä $f(x) = 2x + e^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Osoita jatkuvien funktioiden teorian avulla, että sillä on täsmälleen yksi ratkaisu. Hae ratkaisun likiarvo *haarukoimalla* eli seuraavalla algoritmilla:
 - (a) Valitse lopetusparametri $\epsilon > 0$ sekä ja väli $[x_0, x_1]$ siten, että $f(x_1)f(x_2) < 0$. Aseta $n := 0$.
 - (b) Jos $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, niin lopeta. Muuten aseta $x_{n+2} := \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) < 0$, aseta $x_{n+3} := x_n$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) > 0$, aseta $x_{n+3} := x_{n+1}$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) = 0$, aseta $x_{n+3} := x_{n+2}$.
 - (c) Aseta $n := n + 2$ ja jatka kohdasta (b).

Hae ratkaisun likiarvo taskulaskimen laskentatarkkuudella.

2. Ratkaise edellisen tehtävän yhtälö iteroiden taskulaskimen laskentatarkkuudella. Yritä ratkaista iteroiden yhtälö $-2x + e^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Kokeile alkuarvoja $x_0 = 1$ ja $x_0 = 2$.
3. Hae funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x^4 + 2x^3 + x$ maksimit taskulaskimen laskentatarkkuudella yksinkertaistetulla gradienttimenetelmällä ($\lambda_n = 1$).
4. Ratkaise edellinen tehtävä taskulaskimen laskentatarkkuudella Newtonin menetelmällä. Hessen matriisin käänteismatriisi on nyt $1/f''(x)$.
5. Muodosta sellainen C^∞ -funktio (kaikki derivaatat ovat olemassa ja jatkuvia) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jonka kaikki lokaalit ja globaalit maksimit jäävät niin gradientti- kuin Newtonin menetelmällä löytymättä, kun alkuarvo $x_0 \in \mathbb{R}$ pidetään kiinnitettynä.
6. Kuvatkoot vapaata markkinataloutta differentiaaliyhtälöt (4.13)-(4.15). Olkoon edelleen $\alpha = \beta = \gamma = 1$,

$$\begin{aligned} C(q) &= \begin{cases} \frac{1}{2}q^2, & \text{jos } q \leq 1, \\ \frac{1}{3}(q-2)^3 + \frac{5}{6}, & \text{jos } q > 1, \end{cases} \\ P(q) &= \begin{cases} q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{5}{6}, & \text{jos } q \leq 1, \\ -\frac{1}{3}(q-2)^3 + q, & \text{jos } q > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

¹²Ks. Samuelson, P. A: *The stability of equilibrium*, Econometrica 9, (1941), ss. 97-120. Uusintapainos teoksessa "The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson I", toim. Joseph E. Stiglitz, ss. 539-562, 565-589. M.I.T. Press, Cambridge Mass., 1966.

Todistele laskemalla tai hahmottelemalla funktioiden $p(t)$, $q_d(t)$ ja $q_s(t)$ kuvaajia, että jos alkuehtona on $(p(0), q_d(0), q_s(0)) = (0, 0, 0)$, niin

$$p(t) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad q_d(t) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad q_s(t) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad U(t) \rightarrow \frac{3}{4}, \quad \Pi(t) \rightarrow \frac{1}{8},$$

kun $t \rightarrow \infty$.

7. Edellisessä tehtävässä vapaa markkinatalous sai kehittyä omien lakiansa mukaan. Oleta, että hallinnollisella päätöksellä sen kulkuun puututaan ja ajanhetkellä $t = 1$ pakotetaan sen tilaksi $(p(1), q_d(1), q_s(1)) = (\frac{1}{2}, 2, 2)$. Todistele, että sen jälkeen sekä kuluttajien hyöty että tuottajien voitto hakeutuvat kohti suurempia arvoja kuin edellisessä tehtävässä.
8. Muutetaan tehtävää 6 seuraavasti:

$$C(q) = \frac{1}{2}q^2, \quad P(q) = \frac{1}{3}q^3, \quad p(0) = 1, \quad q_d(0) = 2, \quad q_s(0) = 1.$$

Todistele tai todista, että on olemassa $t_1 > 0$ siten, että $q_d(t) \rightarrow \infty$, kun $t \rightarrow t_1 -$. Mitä psykologista ilmiötä kasvava maksuhalukkuus voisi esittää? Mikä mahtaisi olla tuote?