MATEMAATTINEN BIOLOGIA 2

VELI-MATTI HOKKANEN

5. helmikuuta 2004

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tarkastellaan populaation kokoa ja sen muuttumista ajan kuluessa. Populaation jäsenten määrä hetkellä t olkoon $N(t)$. Sen *keskimääräinen muutosnopeus* hetkien t ja t_1 välillä on erotusosamäärä eli differenssi

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_1) - N(t)}{t_1 - t}. \tag{1.1}$$

Hetkellinen muutosnopeus hetkellä t on edellisen raja-arvo, kun $t_1 \to t$. Se on *derivaatta*

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = \lim_{t_1 \to t} \frac{N(t_1) - N(t)}{t_1 - t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h}. \tag{1.2}$$

Jotta raja-arvo olisi olemassa, tulee ajan olla jatkuva hetken t ympäristössä eli mahdollisia ajanhetkiä on kokonainen väli $[t - \delta, t + \delta]$, missä $\delta > 0$. Edelleen jokaisella näistä pitää populaation jäsenten määrän olla määritelty. Populaatio koostuu yksilöistä, ja niitä syntyy, kuolee ja muuttaa pois kokonaisina. Siten kuvauksen $t \mapsto N(t)$ arvot ovat kokonaislukuja. Siksi hetkellinen muutosnopeus on tarkkaan ottaen aina nolla tai sitä ei ole olemassa. Nämä ongelmat kierretään sopimalla, että $t \mapsto N(t)$ on derivoituva reaaliarvoinen funktio, joka yhtyy tarkasti tai likimain todelliseen populaation kokoon riittävän monella ajanhetkellä. Tällöin jatkuva aika ja reaaliarvoinen $t \mapsto N(t)$ ovat *approksimaatio*[1]. Jos populaation koko on suuri, on tämä approksimaatio hyvin tarkka[2].

Populaation muutosnopeus noudattaa seuraavaa *jatkuvuusyhtälöä:*

$$N'(t) = \text{syntyvyys} - \text{kuolleisuus} + \text{muutto sisään} - \text{muutto pois}. \tag{1.3}$$

Tämä on *differentiaaliyhtälö*, josta pyritään ratkaisemaan kuvaus $t \mapsto N(t)$. Jatkuvuusyhtälön termit ovat dimensionaalisia[3]. Populaation koon mittayksikkö on 1 kpl, jolloin sen muutosnopeuden mittayksikkö on esimerkiksi 1 kpl/vuosi, samoin kuin jatkuvuusyhtälön oikean puolen termien.

Oletetaan, että populaatio on eristyksissä, jolloin muuttoa sisään tai pois ei ole. Oletetaan edelleen, että hetkellä $t = 0$ populaation koko on $N_0 > 0$ ja että sekä syntyvyys että kuolleisuus ovat suoraan verrannollisia populaation kokoon. Tällöin

$$\text{syntyvyys} = aN(t) \quad \text{ja} \quad \text{kuolleisuus} = bN(t), \tag{1.4}$$

$$\text{muutto sisään} = \text{muutto ulos} = 0. \tag{1.5}$$

missä $a, b > 0$ ovat vakioita. Nyt kuvaus $t \mapsto N(t)$ on alkuarvotehtävän

$$N'(t) = (a - b)N(t) \text{ kaikilla } t \in [0, \infty[\quad \text{ja} \quad N(0) = N_0 \tag{1.6}$$

1. Numeerisen analyysin ja tieteellisen laskennan harjoittajat ovat tottuneet siihen, että diskreetit mallit ovat jatkuvien approksimaatioita. Nyt on päinvastoin.
2. Pienelle populaatiolle voidaan käyttää liukuvaa keskiarvoa tai sisällyttää kuvaukseen $t \mapsto N(t)$ satunnaisuutta kuvaavia termejä. Jälkimmäinen menettely vie stokastisiin malleihin ja differentiaaliyhtälöihin.
3. Ks. esimerkiksi Matemaattista biologiaa I. Yhtälöiden vasemman ja oikean puolen sekä yhteenlaskettavien termien tulee olla samandimensioisia. Niin on, jos niiden mittayksiköt ovat samoja.

ratkaisu. Ratkaisemalla differentiaaliyhtälö ja sijoittamalla alkuehto $N(0) = N_0$ saadaan

$$N(t) = N_0 \,\mathrm{e}^{(a-b)t} \text{ kaikilla } t \in [0, \infty[. \tag{1.7}$$

Jos syntyvyyden verrannollisuuskerroin on suurempi kuin kuolleisuuden verrannollisuuskerroin eli $a > b$, niin populaation koko kasvaa eksponentiaalisesti. Jos kuolleisuus ylittää syntyvyyden eli $a < b$, niin populaation koko pienenee eksponentiaalisesti samalla lailla kuin radioaktiivinen aine hajoaa. Eksponentiaalisen kasvamisen ja vähenemisen nopeutta kuvaavat *kahdentumisaika* T_2 ja *puoliintumisaika* $T_{1/2}$,

$$T_2 = \frac{\ln 2}{a-b} \text{ ja } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b-a}. \tag{1.8}$$

Jos $a = b$ eli syntyvyys ja kuolleisuus ovat yhtäsuuret, niin populaation koko pysyy vakiona. Differentiaaliyhtälöä $N'(t) = \gamma N(t), \gamma > 0$, sanotaan toisinaan luonnollisen kasvun yhtälöksi, koska populaatio noudattaa sitä levittäytyessään ilman sisäisiä tai ulkoisia esteitä[4].

Jos aikaa pidetään diskreettinä eli jos ajanhetket ovat $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$, niin populaation jatkuvuusyhtälö on

$$\begin{aligned}\frac{N(t_{j+1}) - N(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \text{syntyvyys} - \text{kuolleisuus} + \\ \text{muutto sisään} - \text{muutto pois kaikilla } j = 0, 1, 2, \ldots.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Tämä on *differenssiyhtälö.*

1.1 Selittäminen

Karl Popper määritteli teoksessaan *The Logic of Scientific Discovery*[5], että tapahtuman *(kausaalinen) selittäminen* tarkoittaa sitä, että se päätellään kahdesta lausejoukosta, joista ensimmäinen koostuu *yleisistä laeista* ja toinen *erityisistä lauseista*[6], joita sanotaan myös *alkuehdoiksi.* Esimerkiksi vuorikiipeilijän putoaminen turvaköyden katkettua selitetään seuraavasti. Yleinen laki sanoo, että jokainen tyypin A köysi katkeaa, jos sitä kuormittaa suurempi voima kuin 1,0 kN. Alkuehtoina on, että vuorikiipeilijä N.N. joutui A-tyyppisen turvaköyden varaan, hänen massansa oli 150 kg ja paikkakunnalla vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys oli 9,8 m/s^2. Alkuehdoista seuraa, että N.N. kuormitti köyttä voimalla 1,5 kN, jolloin se yleisen lain mukaan katkesi. Tämä tietyn köyden tietyssä tilanteessa katkeavaksi väittävä lause on *ennustus.* Lausumme tämän esimerkin yleisemmin termein. Selittäminen on loogiselta rakenteeltaan seuraava:

$$\begin{array}{ll} 1. & \text{Yleiset lait } L. \\ 2. & \text{Alkuehdot } A. \\ \hline 3. & \text{Ennustus } P. \end{array} \quad \text{(PLM)}$$

Tätä päättelykaaviota, syllogismia, vastaa logiikan lause “Jos L ja A, niin P”. Lyhennys (PLM) tulee sanoista peittävän lain malli, joilla Carl Hempel kutsui tätä syllogismia.

Ennustus selittämisen lopputuloksena tarkoittaa niin tulevaisuuteen sijoittuvaa tapahtumaa (prediktio), menneisyyden tapahtumaa (retrodiktio) tai sitten ajallisesti epämääräistä tapahtumaa. Retrodiktio tuli tähtitieteeseen ja fysiikkaan jo Keplerin lakien myötä: planeetan sijainti kullakin ajanhetkellä — menneenä tai tulevana — voidaan ratkaista sen rataelementeistä (alkuehdot) ja Keplerin laeista

4. Kovin kauaa ei eksponentiaalinen kasvu voi jatkua: populaation massa ei voi ylittää esimerkiksi Maan massaa. Ihmiskunnan lisääntyminen on ollut eksponentiaalista vain 1900-luvun.
5. §12, Hutchinson, Lontoo, 1987. Popper itse lyhensi teoksensa nimen L. Sc. D.
6. Engl. singular statements.

(yleiset lait)[7]. Klassisen mekaniikan avulla planeetan paikan ennustaminen käy siten, että alkuehtona on planeetan sijainti ja nopeus jollakin ajanhetkellä ja yleisenä lakina planeetan liikeyhtälö, joka on toisen kertaluvun vektoriarvoisen kuvauksen differentiaaliyhtälö. Seuraava alkuarvotehtävä on nyt ratkaistava[8]:

$$\mathbf{x}''(t) = -\frac{\gamma M_0 \mathbf{x}(t)}{\|\mathbf{x}(t)\|^3},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{v}_0, \tag{1.11}$$

missä $\gamma > 0$ on gravitaatiovakio, M_0 esittää Auringon massaa, t ajanhetkeä ja $\mathbf{x}(t)$ planeetan sijaintia hetkellä t. Voimme ennustaa siis planeetan paikkaa nyt, menneisyydessä tai tulevaisuudessa[9].

Populaation koon jatkuvuusyhtälö (1.3) muodostaa syntyvyyden, kuolleisuuden sekä sisään ja ulosmuuton lausekkeiden (1.4)–(1.5) kanssa yleisen lain. Alkuehto on $N(0) = N_0$. Näin peittävän lain mallin mukaisesti *selitetään* populaation koko kullakin (tai jollakin) ajanhetkellä. Kiinnostavampaa kuin hakea populaation koolle numeroarvoja on selvittää populaation koon kehittymisen *laadullisia* ominaisuuksia. Sellaisia ovat:

1. Onko alkuarvotehtävän (1.3)–(1.5), $N(0) = N_0$ ratkaisu *olemassa*? Jos ei ole, niin joko järjestelmä ei ole hyväksyttävä kuvaamaan populaation kehitystä tai populaatio ajautuu katastrofiin[10].
2. Onko kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu *yksikäsitteinen*? Jos ei ole, niin populaatiolla on useita mahdollisia kehityskulkuja
3. *Riippuuko* kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu *jatkuvasti* alkuarvosta N_0? Jos ei riipu, niin väistämätön alkuarvon mittavirhe estää populaation tulevan koon ennustamisen.
4. Millaista populaation koon kasvu kulloinkin on? Lineaarista, eksponentiaalista? Hidastuuko se aikanaan?
5. Onko käyttäytyminen *stabiilia* eli lähestyykö $N(t)$ kohti jotakin vakioarvoa alkuarvosta N_0 riippumatta?
6. Esiintyykö *jaksollisia vaihteluita*? Lähestyykö $N(t)$ jotain jaksollista funktiota alkuarvosta N_0 riippumatta?

1.2 Harjoitustehtäviä

1. Johda kahdentumis- ja puoliintumisaika yhtälöstä (1.7) vaatimalla, että $a > b$ ja $N(T_2) = 2N(0)$ tai $a < b$ ja $N(T_{1/2}) = \frac{1}{2}N(0)$.
2. Suomen kieli on yli 2000 vuotta vanha. Ajanlaskumme alussa suomalaisia lienee ollut 3000. Oletetaan, että syntyvyys ja kuolleisuus ovat olleet suoraan verrannollisia väkilukuun, $a - b = 6,4$ ‰/vuosi ja että sisään- ja poismuuton sijasta vallataan uusia alueita ja karkotetaan niiden entiset asukkaat. Määrää jatkuvuusyhtälön avulla tuollaisen Suur-Suomen väkiluku, kun Lalli surmasi piispa Henrikin (1156), kun Pietari Suuri perusti Pietarin (1703) ja nyt. Pesisivätkö suomalaiset sotaurhot saappaitaan Intian valtameressä?
3. Määrää edellisen esimerkin populaation kahdentumisaika.
4. Säästökassan talletuskorko on $\alpha = 2$ %/vuosi. Se lasketaan joka kuukauden lopussa kuukauden pienimmästä saldosta ja lisätään pääomaan. Tammikuun alussa talletetaan $y_0 = 1000$ euroa. Laske pääoma vuoden lopussa.
5. Toista edellinen lasku olettamalla, että korkoa lisätään jatkuvasti pääomaan $y(t)$ eli $y'(t) = \alpha y(t)$, jolloin $y(t) = y_0 \, \mathrm{e}^{\alpha t}$.

---

7. Ks. esimerkiksi Hannu Karttunen, Johdatus taivaanmekaniikkaan. Limes ry, Helsinki, 1980
8. Oletamme, että planeetan massa on hyvin pieni Auringon massaan verrattuna; oletuksesta voidaan luopua siirtymällä massakeskipistekoordinaatistoon, jolloin saadaan kerrointa γM_0 vaille sama differentiaaliyhtälö
9. Ahti Karjalainen lausui taannoin, että "ennustaminen on vaikeaa, varsinkin tulevaisuuden ennustaminen".
10. Jälkimmäisestä on esimerkki alkuarvotehtävä $y' = y^2$, $y(0) = 1$, jolla ei ole ratkaisua välillä $[0, 2]$.

Luku 2

Kertausta

Tässä luvussa kerrataan differentiaaliyhtälön ja sen ratkaisun käsitteet ja opitaan separointimenetelmä differentiaaliyhtälön ratkaisemiseksi.

2.1 Differentiaaliyhtälö ja alkuarvotehtävä

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, $A \subset \mathbb{R}^3$ ja $F\colon A \to \mathbb{R}$. Merkitään reaalimuuttujan reaaliarvoisen kuvauksen y derivaattaa y'. Yhtälöä

$$F(t, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

sanotaan *yleiseksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi.*

2.1.1 Esimerkkejä.

1. Luonnollisessa kasvussa kasvunopeus on suoraan verrannollinen pääomaan, joten sitä kuvaa yhtälö $y' = \alpha y$ eli $y' - \alpha y = 0$, missä $\alpha > 0$ on jokin vakio ja $y(t)$ esittää pääomaa (esimerkiksi puun massaa) hetkellä t. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, sillä voidaan asettaa $A = \mathbb{R}^3$ ja $F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \alpha x_2$.
2. Yhtälö $y' + y^2 = 0$ on myös ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, mikä nähdään asettamalla $A = \mathbb{R}^3$ ja $F(x_1, x_2, x_3) = x_3 + x_2^2$.
3. Tarkastellaan heiluria tasaisessa painovoimakentässä. Heilurin pituus olkoon l ja vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys g. Esittäköön $y(t)$ heilurin heilahduskulmaa hetkellä t. Klassisen mekaniikan mukaan heilurin liikeyhtälö on seuraava Gordonin siniyhtälö $y'' + (g/l)\sin y = 0$. Jos hetkellä $t = 0$ heiluri on levossa ja heilahduskulma on $y_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, niin Gordonin siniyhtälöstä saadaan[1]
$$\frac{1}{2}y'^2 - \frac{g}{l}\cos y + \frac{g}{l}\cos y_0 = 0.$$
Tämä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, sillä voidaan valita
$$A = \mathbb{R}^3,\ F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{g}{l}\cos x_2 + \frac{g}{l}\cos y_0.$$

Jos derivaatta y' voidaan lausua muuttajan t ja kuvauksen y avulla eli

$$y' = f(t, y), \tag{2.2}$$

missä $f\colon B \to \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}^2$, niin sanotaan, että kyseessä on *normaalimuotoinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö*. Jos kuvauksen y toinen derivaatta y'' voidaan lausua ensimmäisen derivaatan y' ja kuvauksen y' avulla eli

$$y'' = F(t, y, y'),\ F\colon A \to \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^3, \tag{2.3}$$

niin sanotaan, että kyseessä on *normaalimuotoinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.*

---

1. Gordonin siniyhtälö kerrotaan derivaatalla y' ja integroidaan puolittain.

2.1.2 Esimerkkejä.

1. Edellisen esimerkin ensimmäinen differentiaaliyhtälö on jo normaalimuotoinen. Loput kaksi ensimmäisen kertaluvun yhtälöä voidaan muuntaa normaalimuotoisiksi ratkaisemalla niistä y':

$$y' = -y^2,\ y' = \pm\sqrt{\frac{g}{2l}}\sqrt{\cos y - \cos y_0},$$

2. Vaimenevaa heilahtelua kuvaava yhtälö $y'' = -\alpha y' - \beta y$, $\alpha, \beta > 0$, on normaalimuotoinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.
3. Gordonin siniyhtälö $y'' + (g/l)\sin y = 0$ on toisen kertaluvun normaalimuotoinen differentiaaliyhtälö.

2.1.3 Määritelmä. *Kuvausta $y : \Delta \to \mathbb{R}$ sanotaan differentiaaliyhtälön (2.2) ratkaisuksi välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jos*

1. *derivaatta $y'(t)$ on olemassa jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, y(t)\big) \in B$ jokaisella $t \in \Delta$, ja*
3. *$y'(t) = f\big(t, y(t)\big)$ jokaisella $t \in \Delta$.*

2.1.4 Esimerkkejä.

1. Kuvaukset $t \mapsto y(t) = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$, ovat luonnollisen kasvuyhtälön $y' = \alpha y$ ratkaisut välillä $\Delta = \mathbb{R}$.
2. Differentiaaliyhtälön $y' + y^2 = 0$ ratkaisut välillä $[0, \infty[$ ovat kuvaukset

$$t \mapsto y(t) = \frac{C}{1 + Ct},\ C \in [0, \infty[.$$

2.1.5 Määritelmä. *Kuvausta $y : \Delta \to \mathbb{R}$ sanotaan differentiaaliyhtälön (2.3) ratkaisuksi välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jos*

1. *derivaatat $y'(t)$ ja $y''(t)$ ovat olemassa jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, y(t), y'(t)\big) \in A$ jokaisella $t \in \Delta$, ja*
3. *$y''(t) = F\big(t, y(t), y'(t)\big)$ jokaisella $t \in \Delta$.*

2.1.6 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan omenan putoamista puusta. Esittäköön $y(t)$ sen etäisyyttä oksasta, josta se tipahtaa. Putoamista kuvaa liikeyhtälö $y'' = g$, missä $g = 9{,}81$ m/s^2. Liikeyhtälön ratkaisut välillä $\Delta = \mathbb{R}$ ovat

$$t \mapsto y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

2. Differentiaaliyhtälön $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ratkaisut välillä $\Delta = \mathbb{R}$ löydetään sen karakteristisen yhtälön $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ avulla[2].
   (a) Jos karakteristisen yhtälön juuret

$$r_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

   ovat erisuuria reaalilukuja eli $\alpha^2 - 4\beta > 0$, niin ratkaisut ovat kuvaukset

$$t \mapsto y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{r_2 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   (b) Jos karakteristisen yhtälön juuret ovat yhtäsuuret eli $\alpha^2 - 4\beta = 0$, niin ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 t\,\mathrm{e}^{r_1 t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}, r_1 = -\frac{\alpha}{2}.$$

2. Ks. Sarjat ja differentiaaliyhtälöt tai sijoita differentiaaliyhtälöön yrite $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$.

(c) Jos karakteristisen yhtälön juuret ovat imaginaariset eli $\alpha^2 - 4\beta < 0$, niin ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1 \,\mathrm{e}^{-\gamma t} \cos \omega t + C_2 \,\mathrm{e}^{-\gamma t} \sin \omega t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

missä $\gamma = \alpha/2$ ja $\omega = \sqrt{4\beta - \alpha^2}/2$.

2.1.7 Määritelmä. *Olkoot* $(t_0, y_0) \in B$ *ja* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *siten, että* $t_0 \in \Delta$. *Yhtälöön (2.2) liittyy alkuarvotehtävä*

$$y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0, \tag{2.5}$$

missä on haettava sellainen yhtälön (2.2) ratkaisu välillä Δ, *joka toteuttaa alkuehdon* $y(t_0) = y_0$. *Lukua* y_0 *sanotaan alkuarvoksi ja hetkeä* t_0 *alkuhetkeksi*[3] .

2.1.8 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan puun luonnollista kasvua $y' = \alpha y$, $\alpha > 0$. Hetkellä $t = 0$ puun massa olkoon $y_0 > 0$. Kasvuyhtälön kaikki ratkaisut välillä $\Delta = [0, \infty[$ ovat $t \mapsto y(t) = C \,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $C \in \mathbb{R}$. Alkuehto $y(0) = y_0$ kiinnittää parametrin C, sillä $C = y_0$. Alkuarvotehtävällä on tasan yksi ratkaisu: $t \mapsto y(t) = y_0 \,\mathrm{e}^{\alpha t}$. Puun luonnollinen kasvu on siis eksponentiaalista.
2. Alkuarvotehtävällä $y' + y^2 = 0$, $y(0) = 1$ on tasan yksi ratkaisu välillä $[0, \infty[$: $t \mapsto y(t) = 1/(1+t)$.
3. Edellisellä alkuarvotehtävällä ei ole lainkaan ratkaisua välillä $]-\infty, 0]$.

Koska derivoituva kuvaus on jatkuva, niin alkuehto kiinnittää alkuarvotehtävän ratkaisun alkuhetkellä t_0 jatkuvasti[4] alkuarvoon y_0 eli

$$\lim_{t \to t_0,\ t \in \Delta} y(t) = y_0.$$

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön liitetään tavallisesti kaksi alkuehtoa. Tavallisimmin ne ovat

$$y(t_0) = y_0 \ \text{ ja } \ y'(0) = y_1,$$

mutta voidaan käyttää myös kahta eri ajan hetkeä $t_0, t_1 \in \Delta$, $t_0 < t_1$, jolloin on seuraavat mahdollisuudet:

$$\begin{aligned}
y(t_0) &= y_0 \ \text{ ja } \ y(t_1) = y_1,\\
y(t_0) &= y_0 \ \text{ ja } \ y'(t_1) = y_1,\\
y'(t_0) &= y_0 \ \text{ ja } \ y(t_1) = y_1,\\
y'(t_0) &= y_0 \ \text{ ja } \ y'(t_1) = y_1.
\end{aligned}$$

Silloin puhutaan myös *reuna-arvotehtävästä.*

2.1.9 Esimerkkejä.

1. Jatketaan omenan puusta putoamisen tarkastelua (ks. 2.1.6). Alkuehdot ovat $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 0$. Siten yleisen ratkaisun (2.4) tulee toteuttaa nämä, jolloin saadaan, että $C_1 = 0$ ja $C_2 = 0$ eli $y(t) = \frac{1}{2} g t^2$ kaikilla $t \in [0, \infty[$.
2. Tarkastellaan harmonista oskillaattoria. Sellainen muodostuu m-massaisesta punnuksesta, joka on kiinnitetty lineaariseen jouseen. Järjestelmä on painottomassa tilassa tai punnus pääsee liikkumaan vain vaakasuorassa suunnassa ja kitkattomasti. Jousen lineaarisuus tarkoittaa sitä, että jousen puristamiseen tai venyttämiseen tarvittava voima on suoraan verrannollinen

---

3. Puhe alkuarvosta on teknistä. Luontevammin voitaisiin puhua alkuarvotehtävästä, jos $t_0 = \inf \Delta$, loppuarvotehtävästä, jos $t_0 = \sup \Delta$, ja muulloin väliarvotehtävästä.
4. On tavallista heikentää differentiaaliyhtälön ratkaisun käsitettä siten, että kaikki kolme ehtoa 1.-3. vaaditaan toteutuviksi vain melkein kaikilla $t \in \Delta$. Silloin on lisättävä vaatimus ratkaisun jatkuvuudesta, sillä esimerkiksi paloittain lineaarisen kuvauksen ei tarvitse olla jatkuva, vaikka se on paloittain jatkuvasti derivoituva.

puristumaan tai venymään; positiivista verrannollisuuskerrointa merkitään k ja sitä sanotaan jousivakioksi. Merkitään punnuksen siirtymää hetkellä t keskiasennostaan $y(t)$, jolloin Newtonin mekaniikan mukaan liikeyhtälö on $my''(t) = -ky(t)$. Käytetään vielä lyhennysmerkintää $\omega = \sqrt{k/m}$, jolloin

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Tämän differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 + \omega^2 = 0$. Sen juuret ovat imaginaariset $r = \pm\omega i$, joten (ks. 2.1.6) kaikki yhtälön (2.6) ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Oletetaan, että hetkellä $t = 0$ punnus sysätään nopeudella $v > 0$ liikkeelle keskiasennostaan. Alkuehdot ovat silloin

$$y(0) = 0 \;\text{ ja }\; y'(0) = v. \tag{2.7}$$

Ne toteutuvat täsmälleen silloin, kun $C_1 = 0$ ja $C_2 = v/\omega$, joten punnus heilahtelee sinimuotoisesti kulmataajuudella ω ja laajuudella v/ω:

$$y(t) = \frac{v}{\omega} \sin\omega t \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

3. Jatketaan edellisen esimerkin tarkastelua. Oletetaan, että punnus on vedessä, jolloin veden viskositeetti aiheuttaa merkittävän liikettä vastustavan voiman F_μ. Se on likimain suoraan verrannollinen punnuksen nopeuteen y', joten $F_\mu = -\mu y'$, missä $\mu > 0$ on vakio. Liikeyhtälö on nyt $my'' = -ky - \mu y'$, joten merkitsemällä $\omega = \sqrt{k/m}$ ja $\gamma = \mu/m$ saadaan

$$y''(t) + \gamma y'(t) + \omega^2 y(t) = 0 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Tämän differentiaaliyhtälön karakteristinen yhtälö on $r^2 + \gamma r + \omega^2 = 0$. Alkuehtoina olkoon yhä (2.7). Jälleen on tasan kolme mahdollisuutta.

(a) Kitkavoima voittaa jousivoiman eli $\gamma > 2\omega$. Tällöin karakteristisen yhtälön juuret ovat *negatiiviset* reaaliluvut

$$r_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \;\text{ ja }\; r_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2},$$

ja differentiaaliyhtälön (2.8) kaikki ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuarvotehtävän (2.7)-(2.8) ratkaisu on siten

$$t \mapsto y(t) = \frac{v}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} (\mathrm{e}^{r_2 t} - \mathrm{e}^{r_1 t}). \tag{2.9}$$

Se on aina positiivinen ja *vaimenee eksponentiaalisesti*, kun $t \to \infty$.

(b) Jousivoima voittaa kitkavoiman eli $\gamma < 2\omega$. Nyt karakteristisen yhtälön ratkaisut ovat imaginaariset, ja differentiaaliyhtälön (2.8) kaikki ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1 \mathrm{e}^{\tilde{\gamma} t} \cos\tilde{\omega} t + C_2 \mathrm{e}^{\tilde{\gamma} t} \sin\tilde{\omega} t,$$
$$\tilde{\gamma} = -\frac{\gamma}{2} < 0, \;\; \tilde{\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2} > 0, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuarvotehtävän (2.7)-(2.8) ratkaisu on siten

$$t \mapsto y(t) = \frac{v}{\tilde{\omega}} \mathrm{e}^{\tilde{\gamma} t} \sin\tilde{\omega} t. \tag{2.10}$$

Tämä esittää eksponentiaalisesti vaimenevaa sinimuotoista heilahtelua. Huomaa, että värähtelyn amplitudi eli laajuus on $(v/\omega)\mathrm{e}^{\tilde{\gamma} t}$ ja kulmataajuus $\tilde{\omega} < \omega$. Mitä suurempi kitkavoima, sitä pienempi värähtelyn kulmataajuus.

(c) Rajatapaus $\gamma = 2\omega$. Nyt differentiaaliyhtälön (2.8) kaikki ratkaisut ovat

$$t \mapsto y(t) = C_1 \,\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 t \,\mathrm{e}^{r_1 t}, \; r_1 = -\frac{\gamma}{2}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Alkuarvotehtävän (2.7)-(2.8) ratkaisu on siten

$$t \mapsto y(t) = vt \,\mathrm{e}^{r_1 t} \geq 0, \; r_1 = -\frac{\gamma}{2} < 0. \tag{2.11}$$

Huomaa, että rajatapauksen ratkaisu (2.11) saadaan sekä kitkavoiman dominoiman tapauksen ratkaisusta (2.9) rajalla $\omega \to \gamma/2-$ että jousivoiman dominoiman tapauksen ratkaisusta (2.10) rajalla $\omega \to \gamma/2+$ (harjoitustehtävä).

4. Tarkastellaan[5] bakteerien lisääntymistä ja levittäytymistä yksiulotteisella[6] kasvualustalla. Merkitään paikassa $x \in [0, d]$, $d > 0$, hetkellä t olevien bakteerien määrää tilavuusyksikköä kohti $n(t, x)$. Tämän suureen mittayksikkö on esimerkiksi 1 kpl/ml. Bakteerien liikkumista kuvaa bakteerivirrantiheys $j(t, x)$. Sen mittayksikkö on 1 kpl/s/cm^2. Jatkuvuusyhtälö on nyt[7]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = \text{syntyvyys tilavuusyksikössä} - \text{kuolleisuus tilavuusyksikössä kaikilla } x \in [0, d] \text{ ja } t \in [0, \infty[. \tag{2.12}$$

Bakteerit siirtyvät diffuusion mukaisesti, jolloin bakteerivirrantiheys noudattaa Fickin lakia eli

$$j(t, x) = -c \frac{\partial n}{\partial x}(t, x) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in [0, d], \tag{2.13}$$

missä $c > 0$ on vakio. Bakteerit lisääntyvät jakautumalla, jolloin luontevasti niiden syntyvyys tilavuusyksikössä on suoraan verrannollinen niiden määrään tilavuusyksikössä. Olkoon verrannollisuuskerroin $a > 0$. Bakteerien kuolleisuus on merkityksetön. Tällöin jatkuvuusyhtälöstä saadaan seuraava *osittaisdifferentiaaliyhtälö*

$$\frac{\partial n}{\partial t}(t, x) - c \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}(t, x) = an(t, x), \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in [0, d]. \tag{2.14}$$

Oletetaan, että kasvualustan yhdellä puolella bakteeritiheys on vakio $n_0 \in [0, \infty[$ ja toisella puolella vakio $n_1 \in [0, \infty[$. Halutaan tietää, millainen bakteerijakauma $\tilde{n}(x)$ kasvualustalle tulee niin pitkän ajan kuluttua, että se ei ajan myötä enää muutu eli $\partial n / \partial t = 0$. Nyt saadaan seuraava reuna-arvotehtävä

$$-c\tilde{n}''(x) = a\tilde{n}(x) \text{ kaikilla } x \in [0, d], \; \tilde{n}(0) = n_0, \; \tilde{n}(d) = n_1.$$

Tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x \mapsto \tilde{n}(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \; \omega = \sqrt{\frac{a}{c}}$$

Reunaehdot määräävät vakiot C_1, C_2:

$$C_1 = n_0 \text{ ja } C_2 = \frac{n_1 - n_0 \cos \omega d}{\sin \omega d},$$

jos[8] $\omega d \in]0, \pi[$. Jos $n_0 = 0$ ja $n_1 > 0$, niin

$$\tilde{n}(x) = \frac{n_1}{\sin \omega d} \sin \omega x \geq 0.$$

5. Tämän esimerkin alusta yhtälöön (2.14) asti on sellaista, mitä ei kysytä tentissä.

6. Tuollainen on riittävän tarkasti hyvin leveä ja korkea levy, joka on ohut, paksuudeltaan d. Paikkamuuttuja x mitataan kohtisuoraan levyä vastaan.

7. Osittaisderivaatta $\partial n / \partial t$ lasketaan kuin tavallinen derivaatta muuttujan t suhteen, kun pidetään muuttujaa x vakiona. Tämä jatkuvuusyhtälön muoto johdetaan virtausmekaniikan oppikirjoissa tarkastelemalla mielivaltaisen pienen kuution sisältämän bakteerimäärän muutosnopeutta. Johdossa oletetaan kylliksi sileyttä funktioista n ja j ja käytetään Gaußin lausetta, joka yksiulotteisessa tapauksessa on $\big/_a^b f(x) = \int_a^b f'(x)\, dx$.

8. Tämä vaaditaan, jotta $\tilde{n}(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [0, d]$. Muuten voidaan korjata syntyvyyden lauseke positiiviosakseen $(|an| + an)/2$ ja tarkastaa, että ratkaisu on ei-negatiivinen.

2.2 Toisen kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli ja $p_1, p_2 \colon \to \mathbb{R}$ jatkuvia eli $p_1, p_2 \in C(\Delta)$. Tarkastellaan seuraavaa *toisen kertaluvun lineaarista ja homogeenista differentiaaliyhtälöä*

$$L(y) := y'' + p_1 y' + p_2 y = 0. \tag{2.15}$$

Olkoon y_1 ja y_2 kaksi yhtälön (2.15) ratkaisua välillä Δ. Koska $y \mapsto L(y)$ on lineaarikuvaus, niin jokainen lineaariyhdiste

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

on yhtälön (2.15) ratkaisu välillä Δ.

2.2.1 Määritelmä. *Olkoot y_1 ja y_2 yhtälön (2.15) ratkaisuja välillä Δ. Joukko $\{y_1, y_2\}$ on yhtälön (2.15) ratkaisujen perusjärjestelmä, jos jokainen yhtälön (2.15) ratkaisu on lineaariyhdiste kuvauksista y_1 ja y_2.*

2.2.2 Esimerkkejä.

1. Kuvaukset $t \mapsto \mathrm{e}^t$ ja $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ muodostavat yhtälön $y'' - y = 0$ ratkaisujen perusjärjestelmän.
2. Kuvaukset $t \mapsto \cos t$ ja $t \mapsto \sin t$ muodostavat yhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisujen perusjärjestelmän.

2.2.3 Määritelmä. *Kuvaukset $y_1, y_2 \colon \Delta \to \mathbb{R}$ olkoot jatkuvasti derivoituvia eli $y_1, y_2 \in C^1(\Delta)$. Niiden Wronskin determinantti pisteessä $t \in \Delta$ on*

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t) y_2'(t) - y_2(t) y_1'(t).$$

2.2.4 Apulause. *Olkoot $y_1, y_2 \in C^1(\Delta)$. Jos ne ovat lineaarisesti riippuvia*[9]*, niin*

$$W(y_1, y_2)(t) = 0 \ \textit{kaikilla}\ t \in \Delta.$$

Todistus. On siis olemassa $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ ja $\lambda_1 \neq 0$ (tai muuten $\lambda_2 \neq 0$). Silloin $y_1 = \alpha y_2$, $\alpha = -\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{R}$, joten

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} \alpha y_2(t) & y_2(t) \\ \alpha y_2'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} y_2(t) & y_2(t) \\ y_2'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = 0.$$

kaikilla $t \in \Delta$. **m.o.t.**

2.2.5 Seuraus. *Jos kuvauksien $y_1, y_2 \in C^1(\Delta)$ Wronskin determinantti on nollasta eroava jossakin pisteessä $t_0 \in \Delta$, niin ne ovat lineaarisesti riippumattomat.*

2.2.6 Apulause. *Jos y_1, y_2 ovat yhtälön (2.15) ratkaisuja välillä Δ, niin*

$$W(y_1, y_2)(t) = C\, e^{-\int p_1(t)\, dt} \ \ \textit{kaikilla}\ t \in \Delta \tag{2.16}$$

jollakin $C \in \mathbb{R}$.

Todistus. Kerrotaan yhtälö $L(y_2) = 0$ y_1:lla, yhtälö $L(y_1) = 0$ y_2:lla ja vähennetään tulokset toisistaan. Silloin

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p_1(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0.$$

9. Vektorit u ja v ovat lineaarisesti riippumattomat, jos luvuille $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ asetetusta yhtälöstä $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ seuraa $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Muulloin u ja v ovat lineaarisesti riippuvia.

Koska $W(y_1,y_2)' = y_1y_2'' - y_2y_1''$, niin

$$W(y_1,y_2)' + p_1W(y_1,y_2) = 0. \tag{2.17}$$

Tämän ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu välillä Δ on[10] (2.16). **m.o.t.**

2.2.7 Lause. *Olkoot y_1 ja y_2 yhtälön (2.15) ratkaisuja välillä Δ. Jos niiden Wronskin determinantti on nollasta eroava jossakin pisteessä $t_0 \in \Delta$, niin ne muodostavat yhtälön (2.15) ratkaisujen perusjärjestelmän.*

Todistus. Olkoon y mielivaltainen yhtälön (2.15) ratkaisu. Merkitään

$$g(t) = \mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,dt} \text{ kaikilla } t \in \Delta.$$

Apulauseen 2.2.6 mukaan

$$W(y_1,y_2)(t) = Cg(t) \text{ kaikilla } t \in \Delta \text{ ja jollakin } C \in \mathbb{R}.$$

Koska $W(y_1,y_2)(t_0) \neq 0$, niin $C \neq 0$. Apulauseen 2.2.6 nojalla on olemassa myös luvut $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$y_2(t)W(y_1,y)(t) = y_2(t)C_1g(t) \text{ ja } y_1(t)W(y_2,y)(t) = y_1(t)C_2g(t)$$

kaikilla $t \in \Delta$. Vähentämällä nämä toisistaan saadaan

$$\begin{aligned}
\big(y_2(t)C_1 - y_1(t)C_2\big)g(t) &= y_2(t)W(y_1,y)(t) - y_1(t)W(y_2,y)(t) \\
&= y_2(t)\big(y_1(t)y'(t) - y_1'(t)y(t)\big) - y_1(t)\big(y_2(t)y'(t) - y_2'(t)y(t)\big) \\
&= y(t)\big(y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)\big) = y(t)W(y_1,y_2)(t) = y(t)Cg(t)
\end{aligned}$$

kaikilla $t \in \Delta$. Koska $g(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \Delta$, niin

$$y(t) = -\frac{C_2}{C}y_1(t) + \frac{C_1}{C}y_2(t) \text{ kaikilla } t \in \Delta$$

eli y on lineaariyhdiste kuvauksista y_1 ja y_2. **m.o.t.**

2.2.8 Esimerkkejä.

1. Kuvaukset $t \mapsto y_1(t) = \mathrm{e}^{r_1t}$ ja $t \mapsto y_2(t) = \mathrm{e}^{r_2t}$ ovat differentiaaliyhtälön $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$, kunhan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 - 4\beta > 0$,

$$r_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \text{ ja } r_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}.$$

   Kuvaukset y_1 ja y_2 muodostavat yhtälön $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ ratkaisujen perusjärjestelmän, sillä

$$\begin{aligned}
W(y_1,y_2)(t) &= \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1t} & \mathrm{e}^{r_2t} \\ r_1\mathrm{e}^{r_1t} & r_2\mathrm{e}^{r_2t} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{r_1t}\,\mathrm{e}^{r_2t} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{r_1t}\,\mathrm{e}^{r_2t}(r_2 - r_1) \neq 0
\end{aligned}$$

   peräti kaikilla $t \in \Delta$.

2. Oletetaan, että on löydetty yksi differentiaaliyhtälön (2.15) ratkaisu y_1 välillä Δ ja että se on nollasta eroava kaikkialla. Haetaan toinen ratkaisu y_2 siten, että ne muodostavat yhtälön (2.15) ratkaisujen perusjärjestelmän. Käytetään yleistä menetelmää, jota kutsutaan *kertaluvun pudottamiseksi* tai *vakion varioimiseksi*. Kirjoitetaan $y_2 = vy_1$, jolloin

$$y_2' = v'y_1 + vy_1' \text{ ja } y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

10. Ks. Sarjat ja differentiaaliyhtälöt.

Sijoitetaan y_2, y_2' ja y_2'' yhtälöön (2.15), jolloin

$$\begin{aligned}0 &= v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p_1(v'y_1 + vy_1') + p_2vy \\ &= v(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) + v''y_1 + v'(2y_1' + p_1y_1).\end{aligned}$$

Koska y_1 on yhtälön (2.15) ratkaisu ja aina nollasta eroava, niin riittää, että v' toteuttaa ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön

$$v'' + \frac{2y_1' + p_1y_1}{y_1}v' = 0, \tag{2.18}$$

jonka kaikki ratkaisut ovat

$$v'(t) = C\exp - \int \frac{2y_1'(t) + p_1(t)y_1(t)}{y_1(t)}\,dt,\ C \in \mathbb{R}. \tag{2.19}$$

Tämän yhtälön oikean puolen integraalifunktio on $v(t)$. Lasketaan Wronskin determinantti

$$\begin{aligned}W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} y_1(t) & v(t)y_1(t) \\ y_1'(t) & v(t)y_1'(t) + v'(t)y_1(t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & v'(t)y_1(t) \end{vmatrix} = v'(t)y_1(t)^2.\end{aligned}$$

Valitaan $C \neq 0$, jolloin Wronskin determinantti on nollasta eroava. Siten $\{y_1, y_2\}$ on yhtälön (2.15) ratkaisujen perusjärjestelmä.

3. Haetaan kertaluvun pudottamismenetelmällä differentiaaliyhtälön

$$y'' + \frac{4}{t}y' - \frac{4}{t^2}y = 0 \tag{2.20}$$

kaikki ratkaisut välillä $]0, \infty[$. Kokeilemalla huomataan, että yksi ratkaisu on $t \mapsto y_1(t) = t$. Kaavan (2.19) mukaan

$$v'(t) = C\exp - \int \frac{2\cdot 1 + \frac{4}{t}t}{t}\,dt = C\exp -6\int \frac{1}{t}\,dt = C\Big(\mathrm{e}^{\ln t}\Big)^{-6} = Ct^{-6}.$$

Siten $v(t) = t^{-5}$ ja $y_2(t) = v(t)y_1(t) = t^{-4}$, kun valitaan $C = -5$. Tarkastus vahvistaa, että y_2 on yhtälön (2.20) ratkaisu ja $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$. Siten $\{y_1, y_2\}$ on yhtälön (2.20) ratkaisujen perusjärjestelmä, jolloin jokainen yhtälön (2.20) ratkaisu on lineaariyhdiste kuvauksista y_1 ja y_2.

4. Ratkaistaan yhtälö (2.20) toisella tavalla. Kirjoitetaan yrite, että ratkaisu $y(t) = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Silloin $y'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ ja $y''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön (2.20), jolloin

$$\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + 4\alpha t^{\alpha-2} - 4t^{\alpha-2} = (\alpha^2 - 3\alpha - 4)t^{\alpha-2} = 0,$$

kun $\alpha = 1$ tai $\alpha = -4$. Näin kaksi ratkaisua on $y_1(t) = t$ ja $y_2(t) = t^{-4}$.

2.2.9 Lause. *Diffrentiaaliyhtälöllä (2.15) on aina ratkaisujen perusjärjestelmä välillä Δ.*

Todistus. Pidetään totena seuraava olemassaolo- ja yksikäsitteisyystulos[11]: jokaiselle $y_0, \tilde{y}_0 \in \mathbb{R}$ ja $t_0 \in \Delta$ alkuarvotehtävällä (2.15), $y(t_0) = y_0$ ja $y'(t_0) = \tilde{y}_0$ on yksi ja vain yksi ratkaisu välillä Δ. Siten yhtälöllä (2.15) on ratkaisut y_1 ja y_2 välillä Δ siten, että

$$y_1(t_0) = 1,\ y_1'(t_0) = 0,\ y_2(t_0) = 0,\ y_2'(t_0) = 1.$$

11. Sen todistusta hahmoteltaneen tällä kurssilla.

Silloin $W(y_1,y_2)(t_0)=1\neq 0$, joten y_1 ja y_2 muodostavat yhtälön (2.15) ratkaisujen perusjärjestelmän. **m.o.t.**

Tarkastellaan toisen kertaluvun lineaarista ja epähomogeenistä differentiaaliyhtälöä
$$L(y)=y''+p_1y'+p_2y=q, \tag{2.21}$$
missä $p_1,p_2,q\in C(\Delta)$ ja $\Delta\subset\mathbb{R}$ on väli.

2.2.10 Lause. *Olkoon $\{y_1,y_2\}$ yhtälön $L(y)=0$ ratkaisujen perusjärjestelmä välillä Δ ja y_3 jokin yhtälön (2.21) ratkaisu välillä Δ. Silloin jokainen yhtälön (2.21) ratkaisu y välillä Δ on muotoa*
$$y=C_1y_1+C_2y_2+y_3,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}. \tag{2.22}$$

Todistus. Olkoon y mielivaltainen yhtälön (2.21) ratkaisu. Koska L on lineaarikuvaus, niin
$$L(y-y_3)=L(y)-L(y_3)=q-q=0$$
eli $y-y_3$ on homogeenisen yhtälön (2.15) ratkaisu. Lauseen 2.2.7 nojalla on olemassa $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ siten, että
$$y-y_3=C_1y_1+C_2y_2.$$
Tästä seuraa (2.22) **m.o.t.**

2.2.11 Esimerkkejä.

1. Yksi yhtälön $y''+y=t$ ratkaisu välillä $\mathbb{R}$ on $t\to y_3(t)=t$. Homogeenisen yhtälön $y''+y=0$ ratkaisujen perusjärjestelmä välillä $\mathbb{R}$ on $\{\cos,\sin\}$, joten yhtälön $y''+y=t$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat
$$t\mapsto C_1\cos t+C_2\sin t+t,\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

2. Jatketaan kitkaisen harmonisen heilurin tarkastelua. Oletetaan, että punnus liikkuu pystysuunnassa painovoimakentässä, jossa vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys on g. Liikeyhtälö on nyt $my''=-\mu y-ky+mg$, joten saadaan epähomogeeninen yhtälö
$$y''+\gamma y'+\omega^2y=g,\ \gamma=\frac{\mu}{m},\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2.23}$$
Yksi sen ratkaisu on vakiokuvaus $t\mapsto\alpha=mg/k<0$. Differentiaaliyhtälön (2.23) kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat siten
$$\begin{aligned}t\mapsto y(t)&=C_1\,\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\cos\tilde\omega t+C_2\,\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\sin\tilde\omega t+\alpha,\\ \tilde\gamma&=-\frac{\gamma}{2},\ \tilde\omega=\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2-\gamma^2},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$
Näistä alkuehdot $y(0)=0$ ja $y'(0)=v>0$ toteuttaa
$$t\mapsto y(t)=\alpha-\alpha\,\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\cos\tilde\omega t+\frac{v+\alpha\gamma}{\tilde\omega}\,\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\sin\tilde\omega t. \tag{2.24}$$
Punnus heilahtelee eksponentiaalisesti vaimenevasti ja sinimuotoisesti kohti muuttumatonta tilaa $y(t)=\alpha=mg/k>0$.

3. Tarkastellaan vielä kitkaista harmonista oskillaattoria. Oletetaan, että punnukseen vaikuttaa jaksollinen voima $F=f_0m\sin\hat\omega t$, $f_0\in\mathbb{R}$, $\hat\omega>0$. Punnuksen liikettä kuvaa seuraava epähomogeeninen yhtälö:
$$y''(t)+\gamma y'(t)+\omega^2y(t)=f_0\sin\hat\omega t\ \text{ kaikilla } t\in\mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Otaksuttavasti pitkän ajan kuluttua ratkaisu riippuu vain punnukseen vaikuttavasta voimasta, ei alkuehdoista. Arvataan siksi, että $y_3(t) = A\cos\hat{\omega}t + B\sin\hat{\omega}t$. Tällöin

$$y_3'(t) = -\hat{\omega}A\sin\hat{\omega}t + \hat{\omega}B\cos\hat{\omega}t \quad \text{ja} \quad y_3''(t) = -\hat{\omega}^2 A\cos\hat{\omega}t - \hat{\omega}^2 B\sin\hat{\omega}t.$$

Sijoitetaan y_3 derivaattoineen yhtälön (2.25) vasempaan puoleen, jolloin se on

$$(-\hat{\omega}^2 A + \gamma\hat{\omega}B + \omega^2 A)\cos\hat{\omega}t + (-\hat{\omega}^2 B - \gamma\hat{\omega}A + \omega^2 B)\sin\hat{\omega}t.$$

Koska $t \mapsto \cos\hat{\omega}t$ ja $t \mapsto \sin\hat{\omega}t$ ovat lineaarisesti riippumattomia, niin (2.25) toteutuu täsmälleen silloin kun niiden kertoimet ovat samat eli

$$-\hat{\omega}^2 A + \gamma\hat{\omega}B + \omega^2 A = 0 \quad \text{ja} \quad -\hat{\omega}^2 B - \gamma\hat{\omega}A + \omega^2 B = f_0.$$

Ratkaistaan tästä

$$A = -\frac{f_0\gamma\hat{\omega}}{(\omega^2 - \hat{\omega}^2)^2 + \gamma^2\hat{\omega}^2} \quad \text{ja} \quad B = \frac{f_0(\hat{\omega}^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \hat{\omega}^2)^2 + \gamma^2\hat{\omega}^2}. \tag{2.26}$$

Yrite onnistui, ja niin yhtälön (2.25) jokainen ratkaisu on muotoa

$$t \mapsto y(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}t}\,(C_1\cos\tilde{\omega}t + C_2\sin\tilde{\omega}t) + A\cos\hat{\omega}t + B\sin\hat{\omega}t. \tag{2.27}$$

Haetaan toinen hieman havainnollisempi muoto ratkaisulle sinin yhteenlaskukaavan[12] avulla. Olkoot $\tilde{A}, \hat{A} \in [0,\infty[$ ja $\tilde{\delta}, \hat{\delta} \in [-\pi/2, 3\pi/2[$ siten, että

$$C_1 = \tilde{A}\sin\tilde{\delta},\ C_2 = \tilde{A}\cos\tilde{\delta}, A = \hat{A}\sin\hat{\delta},\ B = \hat{A}\cos\hat{\delta}. \tag{2.28}$$

Tällaiset luvut ovat olemassa[13], joten

$$y(t) = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{\tilde{\gamma}t}\,\sin(\tilde{\omega}t + \tilde{\delta}) + \hat{A}\sin(\hat{\omega}t + \hat{\delta}). \tag{2.29}$$

Huomaa, että $\hat{A}$ ja $\hat{\delta}$ riippuvat suureista $\omega, \hat{\omega}$, γ ja f_0. Alkuehdot määräävät luvut $\tilde{A}$ ja $\tilde{\delta}$. Ratkaisu (2.29) koostuu kahdesta sinimuotoisesta värähtelystä, joista ensimmäinen riippuu alkuehdoista, vaimenee eksponentiaalisesti ja sen kulmataajuus $\tilde{\omega}$ on pienempi kuin kitkattoman oskillaattorin kulmataajuus ω. Toinen värähtely ei riipu alkuehdoista ja sen kulmataajuus on sama kuin ulkoisen voiman kulmataajuus $\hat{\omega}$. Alkuehdoista rippumatta oskillaattori hakeutuu ajan myötä värähtelemään kuin

$$t \mapsto y(t) = \hat{A}\sin(\hat{\omega}t + \hat{\delta}).$$

Seuraava lause antaa keinon löytää epähomogeenisen yhtälön ratkaisun vastaavan homogeenisen yhtälön ratkaisujen perusjärjestelmän avulla. Menetelmää sanotaan *vakioiden varioimiseksi.*

2.2.12 Lause. *Olkoot $p_1, p_2, q \in C(\Delta)$ ja $\{y_1, y_2\}$ yhtälön (2.15) eli $L(y) = 0$ ratkaisujen perusjärjestelmä välillä Δ. Silloin yksi yhtälön (2.21) eli $L(y) = q$ ratkaisu välillä Δ on*

$$t \mapsto y_3(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t), \ \textit{missä} \tag{2.30}$$

$$C_1(t) = -\int \frac{y_2(t)q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt, \quad C_2(t) = \int \frac{y_1(t)q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt, \tag{2.31}$$

$$W(y_1,y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t).$$

12. Kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\beta$.
13. Harjoitustehtävä, muista napakoodinaatit.

Todistus. Kuvausten C_1 ja C_2 lausekkeet löydetään kirjoittamalla yrite $y_3 = C_1y_1 + C_2y_2$ ja vaatimalla yksinkertaisuuden vuoksi, että $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$. Todistukseksi lasketaan

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = -\frac{y_2(t)q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}y_1(t) + \frac{y_1(t)q(t)}{W(y_1,y_2)(t)}y_2(t) = 0$$

kaikilla $t \in \Delta$. Tällöin

$$y_3' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2',$$

joten

$$y_3'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Siten

$$\begin{aligned} L(y_3) &= C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2'' + p_1(C_1y_1' + C_2y_2') + p_1(C_1y_1 + C_2y_2) = \\ &= C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = \\ &= -\frac{y_2q}{W(y_1,y_2)}y_1' + \frac{y_1q}{W(y_1,y_2)}y_2' = \frac{W(y_1,y_2)}{W(y_1,y_2)}\,q = q. \end{aligned}$$

m.o.t.

2.3 Gronwall-tyyppisiä epäyhtälöitä

Tässä alaluvussa tutustutaan kahteen epäyhtälöön, joista on apua tutkittaessa alkuarvotehtävien ratkaisujen yksikäsitteisyyttä, jatkuvaa riippuvuutta ja olemassaoloa.

2.3.1 Apulause. *(Gronwallin-Bellmanin lemma tai Gronwallin epäyhtälö.) Olkoot $M \ge 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja $\phi, \eta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia siten, että*[14]

$$\eta(t) \ge 0 \quad ja \quad \phi(t) \le M + \int_a^t \eta(s)\phi(s)\,ds \ \ kaikilla\ t \in [a,b].$$

Silloin

$$\phi(t) \le M \exp \int_a^t \eta(s)\,ds \ \ kaikilla\ t \in [a,b].$$

Todistus. Määritellään apukuvaukset $\psi, \tilde{\psi}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = M + \int_a^t \eta(s)\phi(s)\,ds, \ \ \tilde{\psi}(t) = \psi(t) \exp\Big(-\int_a^t \eta(s)\,ds\Big),$$

jotka ovat derivoituvia. Oletuksen mukaan

$$\psi'(t) = \eta(t)\phi(t) \le \eta(t)\psi(t) \text{ kaikilla } t \in]a,b[.$$

Siten

$$\tilde{\psi}'(t) = \big(\psi'(t) - \eta(t)\psi(t)\big)\exp\Big(-\int_a^t \eta(s)\,ds\Big) \le 0 \text{ kaikilla } t \in]a,b[.$$

Täten $t \mapsto \tilde{\psi}(t)$ on vähenevä, joten $\tilde{\psi}(t) \le \tilde{\psi}(a) = M$ kaikilla $t \in [a,b]$. Oletuksen mukaan

$$\phi(t) \le \psi(t) = \tilde{\psi}(t)\exp\int_a^t \eta(s)\,ds \le M\exp\int_a^t \eta(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [a,b].$$

m.o.t.

14. Riittää, että $\phi \in L^\infty(a,b)$, $\eta \in L^1(a,b)$ ja $\eta(t) \ge 0$ melkein kaikilla $t \in]a,b[$.

2.3.2 Esimerkkejä.

1. Olkoon jatkuva kuvaus $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sellainen, että
$$0 \le f(t) \le \int_0^t 99 f(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [0,1]$$
Gronwallin epäyhtälössä on tällöin $M = 0$ ja $\eta(t) = 99$, joten
$$0 \le f(t) \le 0 \cdot \mathrm{e}^{99t} = 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1].$$
Siten $f(t) = 0$ kaikilla $t \in [0,T]$.
2. Tarkastellaan alkuarvotehtävää
$$y' = y^2 \quad \text{ja} \quad y(0) = 0$$
välillä $[0,T]$, $T > 0$. Heti nähdään, että yksi sen ratkaisu on nollakuvaus $t \mapsto 0$. Onko muita? Oletetaan, että olisi ainakin yksi, jota merkitään y. Kuvaus $t \mapsto |y(t)| \colon [0,T] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja sen määrittelyjoukko on kompakti, joten Weierstraßin lauseen nojalla sillä on suurin arvo. Siis on olemassa $N > 0$ siten, että $|y(t)| \le N$ kaikilla $t \in [0,T]$. Integroidaan differentiaaliyhtälö puolittain ja käytetään alkuehtoa. Silloin
$$|y(t)| = |y(t) - y(0)| = \Big|\int_0^t y'(s)\,ds\Big| = \int_0^t y^2(s)\,ds \le \int_0^t N|y(s)|\,ds$$
kaikilla $t \in [0,T]$. Gronwallin epäyhtälön nojalla $0 \le |y(t)| \le 0$ eli $y(t) = 0$ kaikilla $t \in [0,T]$. Siten nollakuvaus on ainoa kyseisen alkuarvotehtävän ratkaisu.
3. Tarkastellaan alkuarvotehtäviä
$$y' = f(y),\ y(0) = y_0 \quad \text{ja} \quad z' = f(z),\ z(0) = z_0,$$
missä $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ ja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on Lipschitzin-jatkuva vakiolla[15] $L > 0$. Oletetaan, että välillä $[0,T]$, $T > 0$, näillä on ratkaisut y ja z. Silloin $y' - z' = f(y) - f(z)$, mistä integroimalla yli välin $[0,t] \subset [0,T]$ saadaan, että
$$\begin{aligned} |y(t) - z(t)| &= \Big|y(0) - z(0) + \int_0^t \Big(f\big(y(s)\big) - f\big(z(s)\big)\Big)\,ds\Big| \\ &\le |y(0) - z(0)| + \int_0^t \big|f\big(y(s)\big) - f\big(z(s)\big)\big|\,ds \\ &\le |y_0 - z_0| + \int_0^t L|y(s) - z(s)|\,ds \text{ kaikilla } t \in [0,T]. \end{aligned}$$
Gronwallin epäyhtälön nojalla
$$|y(t) - z(t)| \le |y_0 - z_0|\,\mathrm{e}^{Lt} \text{ kaikilla } t \in [0,T]. \tag{2.32}$$
Jos $y_0 = z_0$, niin $y(t) = z(t)$ kaikilla $t \in [0,T]$ eli alkuarvotehtävän $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ ratkaisu on yksikäsitteinen. Kaava (2.32) kertoo enemmän: alkuarvotehtävän ratkaisu riippuu peräti Lipschitzin-jatkuvasti alkuarvosta (vakio on e^{LT}).

2.3.3 Apulause. *(Gronwall-tyyppinen epäyhtälö.) Olkoot $M \ge 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ja jatkuvat $\phi, \eta \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että $\eta(t) \ge 0$ kaikilla*[16] *$t \in]a,b[$ ja*
$$\frac{1}{2}\phi(t)^2 \le \frac{1}{2}M^2 + \int_a^t \eta(s)\phi(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [a,b].$$
Tällöin
$$|\phi(t)| \le M + \int_a^t \eta(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [a,b].$$

---

15. On siis olemassa $L > 0$ siten, että $|f(u) - f(v)| \le L|u - v|$ kaikilla $u, v \in \mathbb{R}$.
16. Riittää, että $\phi \in L^\infty(a,b)$, $\eta \in L^1(a,b)$ ja $\eta(t) \ge 0$ melkein kaikilla $t \in]a,b[$.

Todistus. Määritellään apukuvaukset[17] $\psi_\epsilon\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\psi_\epsilon(t) = \frac{1}{2}(M+\epsilon)^2 + \int_a^t \eta(s)|\phi(s)|\,ds$$

jokaiselle $\epsilon \geq 0$. Ne ovat derivoituvia. Oletuksen mukaan

$$\psi_\epsilon'(t) = \eta(t)|\phi(t)| \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}|\phi(t)|^2 \leq \psi_0(t) \leq \psi_\epsilon(t) \text{ kaikilla } t \in [a,b],\ \epsilon \geq 0. \tag{2.33}$$

Näistä seuraa, että

$$\psi_\epsilon'(t) \leq \eta(t)\sqrt{2\psi_\epsilon(t)} \text{ kaikilla } t \in [a,b] \ \text{ ja } \ \epsilon \geq 0.$$

Toisaalta $\psi_\epsilon(t) \geq \epsilon^2/2$ kaikilla $t \in [a,b]$, joten kuvaus $t \mapsto \sqrt{\psi_\epsilon(t)}$ on derivoituva, kunhan $\epsilon > 0$. Silloin

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\psi_\epsilon(t)} = \frac{\psi_\epsilon'(t)}{2\sqrt{\psi_\epsilon(t)}} \leq \frac{\eta(t)}{\sqrt{2}} \text{ kaikilla } t \in [a,b].$$

Integroimalla puolittain saadaan

$$\sqrt{\psi_\epsilon(t)} \leq \sqrt{\psi_\epsilon(a)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_a^t \eta(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [a,b] \ \text{ ja } \ \epsilon > 0.$$

Tästä ja epäyhtälöstä (2.33) seuraa, että

$$|\phi(t)| \leq \sqrt{2}\sqrt{\psi_\epsilon(t)} \leq \sqrt{2\psi_\epsilon(a)} + \int_a^t \eta(s)\,ds = M + \epsilon + \int_a^t \eta(s)\,ds$$

kaikilla $t \in [a,b]$ ja $\epsilon > 0$. Koska $\epsilon > 0$ on mielivaltainen, saadaan väite. **m.o.t.**

2.3.4 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan alkuarvotehtäviä

$$y' + y^3 = f,\ y(0) = y_0 \ \text{ ja } \ z' + z^3 = g,\ z(0) = z_0,$$

missä $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in C([0,T])$. Oletetaan, että välilä $[0,T]$, $T > 0$, niillä on ratkaisut y ja z. Silloin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(y-z)^2 &= (y-z)(y'-z') = (y-z)(f - y^3 - g + z^3)\\ &= (y-z)(f-g) - (y-z)(y^3 - z^3).\end{aligned}$$

Koska $y^3 - z^3 = (y-z)(y^2 + yz + z^2)$ ja[18] $yz \geq -y^2/2 - z^2/2$, niin

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\big(y(t) - z(t)\big)^2 \leq |y(t) - z(t)|\,|f(t) - g(t)| \text{ kaikilla } t \in [0,T].$$

Integroidaan yli välin $[0,T]$, jolloin

$$\frac{1}{2}|y(t) - z(t)|^2 \leq \frac{1}{2}(y_0 - z_0)^2 + \int_0^t |f(s) - g(s)|\,|y(s) - z(s)|\,ds$$

kaikilla $t \in [0,T]$. Gronwall-tyyppisen epäyhtälön nojalla

$$|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0| + \int_0^t |f(s) - g(s)| ds \text{ kaikilla } t \in [0,T]. \tag{2.34}$$

17. Huomaa todistuksen ϵ-tekniikka, jolla kierretään ongelmat, jotka tulevat siitä, että $t \mapsto \sqrt{\psi_0(t)}$ ei ole derivoituva pisteessä $t = a$, jos $M = 0$.
18. Muista aritmeettis-geometrinen epäyhtälö $ab \leq \epsilon a^2 + b^2/4\epsilon$ kaikilla $a, b \geq 0$ ja $\epsilon > 0$.

Jos $y_0 = z_0$ ja $f = g$, niin saadaan alkuarvotehtävän ratkaisun yksikäsitteisyys. Kaava (2.34) kertoo, että ratkaisu riippuu Lipschitzin-jatkuvasti[19] sekä alkuarvosta että differentiaaliyhtälön oikeasta puolesta.

2.4 Separointimenetelmä

Tässä alaluvussa tutustutaan separointimenetelmään ensimmäisen kertaluvun epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi.

2.4.1 Esimerkkejä.

1. Etsitään yhtälön $y' = y$ ratkaisut seuraavalla menettelyllä. Jos $y(t) \neq 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ voidaan yhtälö jakaa sillä, jolloin ketjusäännön nojalla
$$1 = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt} \ln |y(t)| \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$
Integroidaan tämä puolittain, jolloin
$$t + \tilde{C} = \ln |y(t)| \text{ eli } y(t) = \pm \mathrm{e}^{\tilde{C}+t} = \pm \mathrm{e}^{\tilde{C}} \mathrm{e}^{t} = C \mathrm{e}^{t} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$
missä $\tilde{C} \in \mathbb{R}$ ja $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Derivointi osoittaa, että löydetyt kuvaukset ovat yhtälön $y' = y$ ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$. Myös nollakuvaus on ratkaisu, joten sallitaan $C = 0$. Löydettiinkö kaikki ratkaisut? Päättely on muuten tyyppiä $\Rightarrow$, mutta oletettiin, että $y(t) \neq 0$ kaikkialla. Siksi ainakin yhdessä pisteessä nolla-arvoinen kuvaus voisi olla löytymättä jäänyt ratkaisu. Sellaista ei kuitenkaan ole, sillä Gronwallin epäyhtälön nojalla alkuarvotehtävällä $y' = y, \ y(t_0) = 0$ on vain yksi ratkaisu (harj. teht.).
2. Haetaan samalla menettelyllä yhtälön
$$y' = t^3(1 + y^2)$$
ratkaisuja välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$. Nyt voidaan jakaa yhtälö tekijällä $1 + y^2$, jolloin ketjusäännön nojalla
$$t^3 = \frac{y'(t)}{1 + y(t)^2} = \frac{d}{dt} \arctan y(t).$$
Integroimalla saadaan
$$\frac{1}{4}t^4 + C = \arctan y \text{ eli } y = \tan\big(\frac{1}{4}t^4 + C\big).$$
On vaadittava, että tangentin muuttuja on välillä $]-\pi/2, \pi/2[$ (tai välillä $]\pi/2, 3\pi/2[$ tai ...). Näin vakiota C rajoittaa väli Δ. Derivointi osoittaa, että löydetyt y ovat kyseisen differentiaaliyhtälön ratkaisuja. Muita ei ole, sillä laskussa oletettiin vain, että y on ratkaisu.
3. Tehdään edellisen esimerkin lasku käsittelemällä derivaattaa osamääränä:
$$\frac{dy}{dt} = t^3(1 + y^2) \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \frac{dy}{1 + y^2} = t^3 dt \quad \text{"}\Rightarrow\text{"} \quad \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int t^3 dt$$
$$\Rightarrow \quad \arctan y = \frac{1}{4}t^4 + C \quad \Rightarrow \quad y = \tan\big(\frac{1}{4}t^4 + C\big).$$

19. Asiaa on täsmennettävä esimerkiksi näin:
$$\|y - z\|_{C([0,T])} \leq |y_0 - z_0| + \|g(s) - f(s)\|_{L^1(0,T)},$$
missä
$$\|u\|_{C([0,T])} := \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \text{ ja } \|u\|_{L^1(0,T)} := \int_0^1 |u(s)|\, ds.$$

Yllä olevissa esimerkeissä käytettyä menetelmää sanotaan *separointimenetelmäksi*, koska siinä erotellaan muuttujat y ja t eri puolille yhtälöä.

2.4.2 Määritelmä. *Olkoot $\Delta, I \subset \mathbb{R}$ avoimia välejä ja $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä*

$$y'(t) = f(t)g(y) \tag{2.35}$$

sanotaan separoituvaksi.

Tarkastellaan separoituvaa yhtälöä (2.35) Merkitään kuvauksen $y \mapsto 1/g(y)$ integraalifunktiota $G(y)$. Se on olemassa ja derivoituva, jos $g(y) \neq 0$ välillä I. Silloin differentiaaliyhtälöstä (2.35) saadaan separointimenetelmällä $G(y) = \int f(t)\,dt$ eli

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\,dt. \tag{2.36}$$

Tätä sanotaan differentiaaliyhtälön (2.35) *implisiittiseksi ratkaisuksi.* Jos kuvauksella G on käänteiskuvaus, niin yhtälön (2.34) *eksplisiittinen ratkaisu* on

$$y(t) = G^{-1}\Big(\int f(t)\,dt\Big) \text{ kaikilla } t \in \Delta. \tag{2.37}$$

On kuitenkin kaksi pulmaa: käänteiskuvausta ei ole tai sitä ei osata laskea. Lisäksi pelkkä separointimenetelmän soveltaminen ei takaa, että löydetty ratkaisukandidaatti on ratkaisu. Yhtälöstä (2.37) nähdään, että siihen riittää, että käänteiskuvaus G^{-1} on olemassa ja derivoituva[20]. Käytännössä on kätevintä tarkastaa derivoiden, että ratkaisukandidaatti on ratkaisu, sillä samalla mahdolliset laskuvirheet paljastuvat.

2.4.3 Esimerkkejä.

1. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$y' = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{y}},\; y(0) = 0.$$

Muuttujien separointi, integrointi yli välin $[0, t]$ ja alkuehto antavat

$$\int_0^y (1 + \mathrm{e}^{x})\,dx = \int_0^t 1\,dt \text{ eli } y + \mathrm{e}^{y} = t \text{ kaikilla } t + 1 \in \mathbb{R}.$$

Kuvaus $y \mapsto y + \mathrm{e}^{y}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on aidosti kasvava ja $\lim_{x\to\pm\infty}(x + \mathrm{e}^{x}) = \pm\infty$, joten sillä on käänteiskuvaus. Kuitenkaan yhtälöstä $y + \mathrm{e}^{y} = t$ ei osata ratkaista y:tä.

2. Levosta liikkeelle lähtevän heilurin liikeyhtälön kertominen y':lla ja integrointi antoivat yhtälön $y' = \pm\sqrt{\cos y - \cos y_0}\sqrt{g/2l}$, missä $y_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ja $g, l > 0$. Olkoon alkuarvo $y_0 > 0$. Silloin aluksi $y' \leq 0$, joten differentiaaliyhtälöön tulee miinusmerkki. Separointi, integrointi yli välin $[0, t]$ ja alkuehto antavat

$$\int_y^{y_0} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos y_0}} = t\sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Vasemman puolen integraalia ei osata laskea.

---

20. Käänteiskuvauslauseen nojalla näin on, jos g on jatkuvasti derivoituva ja nollasta eroava kaikkialla.

2.5 Harjoitustehtäviä

1. Osoita, että kitkavoiman dominoimalle harmoniselle oskillaattorille saatu ratkaisun lauseke lähestyy rajatapauksen $\gamma = 2\omega$ ratkaisun lauseketta, kun $\omega \to \gamma/2-$ eli
$$\lim_{\omega\to\gamma/2-} \frac{v}{\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}(\mathrm{e}^{r_2 t} - \mathrm{e}^{r_1 t}) = vt\,\mathrm{e}^{-\gamma t/2},$$
missä
$$r_1 = \frac{-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}}{2}.$$
Vihje:
$$\lim_{\omega\to\gamma/2-} = \lim_{\sqrt{\gamma^2-4\omega^2}\to 0+} \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{x} = 2.$$
2. Osoita, että jousivoiman dominoimalle harmoniselle oskillaattorille saatu ratkaisun lauseke lähestyy rajatapauksen $\gamma = 2\omega$ ratkaisun lauseketta, kun $\omega \to \gamma/2+$ eli
$$\lim_{\omega\to\gamma/2+} \frac{v}{\tilde\omega}\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\sin\tilde\omega t = vt\,\mathrm{e}^{-\gamma t/2},$$
missä
$$\tilde\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2-\gamma^2} \quad \text{ja} \quad \tilde\gamma = -\frac{\gamma}{2}.$$
Vihje:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$
3. Jatketaan bakteerien diffuusion tarkastelua. Oletetaan, että kasvualustan oikealla puolella on bakteeritiheys $n_1 > 0$ ja että vasemmalla puolella on tiivis muovikalvo, josta bakteerit eivät pääse läpi. Siten reunaehtoina on
$$j(t,0) = 0 \quad \text{ja} \quad n(t,d) = n_1.$$
Olkoon $0 < \omega d < \pi/2$. Määrää bakteeritiheys $\tilde n(x)$ bakteeritiheyden $n(t,x)$ ajallisten muutosten loputtua. Lähde liikkeelle reuna-arvotehtävästä
$$-c\tilde n''(x) = a\tilde n(x),\ 0 \le x \le d,\ \tilde n'(0) = 0,\ \tilde n(d) = n_1.$$
Muista, että tämän differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on
$$\tilde n(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x,\ \omega = \sqrt{\frac{a}{c}} > 0,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
4. Tarkasta, että edellisen tehtävän bakteeritiheys $\tilde n(x)$ ei ole missään negatiivinen. Mikä oletus on tarpeen?
5. Jatketaan edellistä tehtävää. Miksi $\tilde n$ ei ole vakio? Vihje: kun $t \approx \infty$, $j(t,x) \approx -c\tilde n'(x)$.
6. Osoita Wronskin determinantin avulla, että kuvaukset $y_1\colon]0,\infty[\to\mathbb{R}, y_1(t) = \mathrm{e}^{t}$ ja $]0,\infty[\to\mathbb{R}, y_2(t) = \ln t$ ovat lineaarisesti riippumattomia.
7. Ratkaise edellinen tehtävä suoraan määritelmän avulla eli kirjoita kuvauksien y_1 ja y_2 lineaariyhdiste, vaadi se nollaksi ja päättele, että kertoimet ovat nollia. Olkoon siis $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ siten, että
$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0 \text{ eli } \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0 \text{ kaikilla } t \in]0,\infty[.$$
Osoita valitsemalla kaksi sopivaa $t \in]0,\infty[$, että $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
8. Hae yhtälön $y'' + ty' - y = 0$ ratkaisujen perusjärjestelmä $\{y_1, y_2\}$ välillä $]0,\infty[$, kun $t \mapsto y_1(t) = t$ on yksi sen ratkaisu. Vihje: ratkaisun y_2 lausekkeessa esiintyy integraali $\int_1^t \ldots$, jota ei kannata laskea.
9. Hae edellisen tehtävän differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut välillä $]0,\infty[$.

10. Jatketaan ensimmäistä tehtävää. Tarkasta, että löytämäsi y_2 on ratkaisu laskemalla $y_2'' + ty_2' - y_2$. Vihje: jos $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\frac{d}{dt}\int_1^t f(s)\,ds = f(t).$$

11. Hae yhtälön $y'' + 2y' + y = t$ kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$. Tarvitset yhden sen ratkaisun y_3. Hae se yritteellä $y_3(t) = At + B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Miksi on viisasta kokeilla yritteenä t:n potenssien lineaariyhdistettä?
12. Ratkaise edellinen tehtävä hakemalla y_3 vakioiden varioinnilla.
13. Osoita, että jokaiselle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ siten että $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ on olemassa tasan yksi $(A,\delta) \in]0,\infty[\times [-\pi/2, 3\pi/2[$ siten että

$$C_1 = A\sin\delta \quad \text{ja} \quad C_2 = A\cos\delta.$$

Vihje: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Voit ratkaista luvut A ja δ.
14. Alkuarvotehtäviä ratkoessa ei kannata tehdä uudestaan ja uudestaan siirtymää lausekkeesta $C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ lausekkeeseen $A\sin(\omega t + \delta)$, sillä edellisen tehtävän nojalla jälkimmäinen on vastaavan homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu. Niinpä painovoimakentässä heilahtelevan oskillaattorin liikeyhtälön yleinen ratkaisu on

$$t \mapsto y(t) = \alpha + \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}t} A\sin(\tilde{\omega}t + \delta),\ A \geq 0,\ -\frac{\pi}{2} \leq \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Määrää luvut A ja δ alkuehdoista
(a) $y(0) = 0$ ja $y'(0) = v > 0$,
(b) $y(0) = b > 0$ ja $y'(0) = 0$.
15. Osoitetaan Gronwallin epäyhtälön avulla, että alkuarvotehtävällä $y' = y$, $y(t_0) = 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, on vain triviaaliratkaisu[21]. Oletetaan, että $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on ratkaisu. Osoita Gronwallin epäyhtälön avulla, että ratkaisu y on nollakuvaus välillä $[t_0, \infty[$.
16. Jatketaan edellistä tehtävää. Osoita, että kuvaus $t \mapsto z(t) = y(t_0 - t)$ on alkuarvotehtävän $z'(t) = -z(t)$, $z(0) = 0$ ratkaisu välillä $[0,\infty[$, ja osoita Gronwallin epäyhtälön avulla, että z on nollakuvaus. Päättele tästä, että y on nollakuvaus myös välillä $]-\infty, t_0]$.
17. Esittäköön $y(t)$ havupuun neulasten määrää. Ratkaise separointimenetelmällä vanhenevan puun kasvuyhtälö $y'(t) = (\alpha - \beta t)y(t)$ välillä $[0,\infty[$, kun $\alpha, \beta > 0$. Miten t:n kasvaessa positiivisesta negatiiviseksi muuttuva kasvukerroin $\alpha - \beta t$ on tulkittava?
18. Olkoon $y(t)$ kuten edellisessä tehtävässä, mutta kasvuyhtälönä on

$$y'(t) = \big(\alpha - \beta y(t)\big)y(t),$$

missä $\alpha, \beta > 0$. Ratkaise y separointimenetelmällä. Miten y:n kasvaessa positiivisesta negatiiviseksi muuttuva kasvukerroin $\alpha - \beta y$ on tulkittava? Vihje:

$$\frac{1}{\alpha y - \beta y^2} = \frac{1}{\alpha}\Big(\frac{1}{y} + \frac{\beta}{\alpha - \beta y}\Big).$$

19. Olkoon kummassakin kahden edellisen tehtävän tapauksessa $y_0 > 0$ neulasten määrä hetkellä $t = 0$. Määrää kummankin alkuarvotehtävän ratkaisu y ja laske raja-arvo $\lim_{t\to\infty} y(t)$. Mitkä ovat johtopäätöksesi? Vihje: alkuehdon voi sijoittaa implisiittiseen ratkaisuun.
20. Ratkaise separoimalla alkuarvotehtävä $y' = -y^2$, $y(0) = y_0$ välillä $[0, T[$, $y_0, T > 0$. Kuinka suuri T voi olla?
21. Ratkaise separoimalla alkuarvotehtävä $y' = y^2$, $y(0) = y_0$ välillä $[0, T[$, $y_0, T > 0$. Kuinka suuri T voi olla?

21. Eli nollakuvaus on ainoa ratkaisu.

Luku 3

Yhden lajin jatkuvat populaatiomallit

Olkoon $N(t)$ populaation jäsenten määrä hetkellä t. Jatkuvuusyhtälön mukaan sen muutosnopeus on

$$N'(t) = \text{syntyvyys} - \text{kuolleisuus} + \text{muutto sisään} - \text{muutto pois}. \tag{3.1}$$

Jos populaatio on eristyksissä, ei ole muuttoa sisään eikä ulos. Jos lisäksi niin syntyvyys kuin kuolleisuuskin ovat suoraan verrannollisia populaation kokoon ja hetkellä $t = 0$ populaation koko on $N_0 > 0$, niin saadaan alkuarvotehtävä

$$N'(t) = (a - b)N(t) \ \text{ ja } \ N(0) = N_0, \tag{3.2}$$

missä $a, b > 0$. Tämän alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{(a-b)t}, \ t \geq 0. \tag{3.3}$$

Jos syntyvyys ylittää kuolleisuuden (eli $a > b$), kasvaa populaation koko eksponentiaalisesti yli kaikkien rajojen. Jos kuolleisuus ylittää syntyvyyden (eli $a < b$), kuihtuu populaatio eksponentiaalisesti. Kumpikin kehitys on melko epärealistinen[1]. Tämä malli ei ota huomioon populaation elinympäristön asettamia rajoitteita, sillä ravinto tai jopa tila ovat rajallisia.

Differentiaaliyhtälön (3.2) oikea puoli on ensimmäisen asteen polynomi suureen $N(t)$ suhteen. Yksinkertaisin monimutkaistus on korvata se toisen asteen polynomilla jolloin saadaan alkuarvotehtävä

$$N'(t) = \alpha N(t) - \beta N(t)^2, \ t \geq 0, \ N(0) = N_0, \tag{3.4}$$

missä vakiot α ja β ovat positiivisia. Suurilla N neliötermi dominoi ja siten miinusmerkki sen edessä tekee kasvun rajalliseksi. Mallin[2] (3.2) esitti ensimmäisenä T.R. Malthus 1798[3]. Hänen mukaansa luonnollinen kasvu on eksponentiaalista, mutta sitä rajoittavat nälkä, taudit ja sodat. Differentiaaliyhtälön (3.4) termiä $-\beta N^2$ voitaisiin kutsua touhu- tai rähinätekijäksi, sillä populaation koon kasvaessa yksilöiden aika ja tarmo kuluu enenevästi muuhun kuin lisääntymiseen. Tällöin populaatio rajoittaa kasvuaan itse ja tavalla, joka ei ole niin väkivaltainen ja karu kuin Malthusin mallissa[4]. Kirjoitetaan yhtälö (3.4) toisin:

$$N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)N(t), \ t \geq 0, N(0) = N_0, \tag{3.5}$$

1. Lyhyehkön aikaa eksponentiaalinen kasvu on luonnollista. Ihmiskunnan koko on kasvanut eksponentiaalisesti 1900-luvun. Silti monen yksittäisen maan väestönkasvu ei ole ollut eksponentiaalista samana aikana (Suomi, Venäjä/Neuvostoliitto, Ranska, Yhdysvallat...).

2. Mallilla tarkoitetaan pientä tieteellistä teoriaa. Tieteellinen teoria sisältää muitakin osasia kuin differentiaaliyhtälön (yleinen laki): metafyysiset ennakko-oletukset, protofysiikkaa (dimensioanalyysi, teoria ajasta), semantiikkaa. Aiheesta enemmän: Mario Bunge, *Philosophy of Physics*, Reidel, Dordrecht 1973.

3. *An Essay on the Principal of Population*, Penguin Books, 1970.

4. Nainen menehtyy kymmenenteen lapsivuoteeseensa. Hänen puoliorvoista lapsistaan kuolee nälkään ja tauteihin seitsemän. Yksi tytär kuolee ensiraskautensa aikana keuhkotautiin. Kruunu vie sotaan Saksanmaalle kaksi poikaa, joista vain toinen palaa. Rampana 25-vuotiaana sotavanhuksena tämä jatkaa sukuaan....

missä $r = \alpha > 0$ ja $K = \alpha/\beta > 0$ ovat vakioita. Nyt syntyvyyden ja kuolleisuuden erotuksen verrannollisuuskerroin on $r(1 - N/K)$ ja se riippuu populaation koosta. Vakiota r kutsutaan lineaariseksi kasvukertoimeksi ja vakiota K ympäristön kantokyvyksi: jos $N > K$, alkaa populaatio pienentyä. Tämän mallin esitti ensimmäisenä P.-F. Verhulst 1838[5] ja 1845[6]. Hän kutsui mallinsa mukaista kasvua *logistiseksi kasvuksi*. Alkuarvotehtävän (3.5) ratkaisu on (ks. viimeisin harjoitustehtävä)

$$N(t) = \frac{N_0 K \,\mathrm{e}^{rt}}{K + N_0(\mathrm{e}^{rt} - 1)} = \frac{K}{1 + \mathrm{e}^{-rt}\,(K/N_0 - 1)} \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{3.6}$$

Havaitaan, että $t \mapsto N(t)$ on aidosti kasvava, jos $N_0 < K$. Jos taas $N_0 > K$, on $t \mapsto N(t)$ aidosti vähenevä. Lisäksi on olemassa $t_1 > 0$ siten, että

$$|K - N(t)| = \frac{K\,\mathrm{e}^{-rt}\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)}{1 + \mathrm{e}^{-rt}\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)} \leq 2K\frac{|K - N_0|}{N_0}\,\mathrm{e}^{-rt} \quad \text{kaikilla } t \geq t_1 \tag{3.7}$$

eli $N(t) \to K$ *eksponentiaalisesti*, kun $t \to \infty$, oli alkuarvo N_0 mikä hyvänsä.

Yhtälön (3.5) derivointi antaa

$$N'' = rN'\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - rN\frac{N'}{K} = r(1 - 2\frac{N}{K})N'.$$

Olkoon $K/2 < N_0 < K$. Koska N on kasvava, niin $N/K \geq N_0/K > 1/2$. Siten $N''(t) < 0$ kaikilla $t > 0$. Näin kuvaus $t \mapsto N(t)$ on kupera eli sen kuvaaja on kupera alaspäin. Olkoon $N_0 < K/2$. Nyt on olemassa $t_1 > 0$ siten, että $N''(t) > 0$ kaikilla $t \in]0, t_1[$ ja $N''(t) < 0$ kaikilla $t \in]t_1, \infty[$. Siten kuvauksen $t \mapsto N(t)$ kuvaaja on välillä $[0, t_1[$ kupera alaspäin ja välillä $]t_1, \infty[$ kupera ylöspäin, joten sen kuvaaja on *S-käyrä*.

Huomataan, että vakiot 0 ja K toteuttavat differentiaaliyhtälön (3.5). Vastaavia populaation kokoja sanotaan logistisen kasvun *stationaarisiksi tiloiksi* tai *tasapainotiloiksi*[7]. Tasapainotilat $N = 0$ ja $N = K$ eroavat toisistaan laadullisesti. Olkoon $N \approx 0$. Silloin[8]

$$N'(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) \approx rN(t) \;\text{ ja }\; N(t) \approx N_0\,\mathrm{e}^{rt} \;\text{ kaikilla } t \geq 0.$$

Jos $N_0 > 0$, $N(t)$ erkanee eksponentiaalisesti tasapainotilasta $N = 0$. Siten $N = 0$ on *epästabiili taspainotila:* pieni poikkeama siitä vie kauas pois. Kaava (3.7) takaa, että alkuarvosta $N_0 > 0$ riippumatta $N(t)$ lähestyy tasapainotilaa $N = K$. Siten se on *stabiili*: vaikka N_0 poikkeaisikin siitä, niin silti $N(t)$ hakeutuu kohti sitä. Perustellaan tämä tarkastelemalla differentiaaliyhtälöä (3.5). Olkoon $N(t) \approx K$ jollakin $t_1 \geq 0$. Silloin pisteen t_1 läheisyydessä

$$\big(N(t) - K\big)' = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) \approx -r\big(N(t) - K\big),$$

jolloin

$$N(t) - K \approx \big(N(t_0) - K\big)\,\mathrm{e}^{-rt}. \tag{3.8}$$

Täten $N(t)$ lähestyy arvoa K pisteen t_1 läheisyydessä, ja siten kaava (3.8) pätee kaikilla $t \geq t_1$.

5. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, Corr. Math. et Phys. 10, 112–131 (1838).
6. Recherche mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. Nouveau Memoires d'Académie Royal des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles 18, 3–38 (1845).
7. Engl. "steady state".
8. Noin-laskut ovat havainnollisia ja hyödyllisiä, mutta ne vaatisivat virhearvioita ollakseen matemaattisesti oikein. Nyt $N(t) \approx N_0\,\mathrm{e}^{rt}$ osoitetaan helpoiten ratkaisun lausekkeesta (3.6).

3.1 Kuusikääriäisen populaatiomalli

Tarkastellaan eri kuusilajien (palsamipihta, valko-, puna-, mustakuusi,...) versoja ja neulasia tuhoavaa kuusikääriäistä[9], joka aiheuttaa *toistuvasti* laajoja metsätuhoja Kanadassa ja Yhdysvaltojen koillisosissa. Toukkavaiheen hyönteiset syövät neulaset, puhkeavat versot ja jopa oksien ja rungon liittymäkohdista kaarnan. Puiden kasvu hidastuu ja laajat puukuolemat ovat yleisiä. Haetaan selitystä, miksi kääriäistuhot toistuvat muutaman vuosikymmenen välein. Kuvataan kuusikääriäispopulaation kehittymistä yhtälöllä

$$N'(t) = rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - p\big(N(t)\big), \tag{3.9}$$

missä kuusikääriäispopulaation lineaarinen kasvukerroin r ja kuusimetsän kantokyky K ovat positiivisia vakioita ja kuvaus $p\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ kertoo, miten kuusikääriäisiä saalistavat linnut verottavat populaatiota. Jos kääriäispopulaatio on pieni, linnut etsivät muuta ravintoa ja siten p kasvaa hitaammin kuin lineaarisesti pienillä N. Jos kääriäisiä on paljon, linnut syövät vain niitä ja niin paljon kuin jaksavat. Silloin $p(N)$ on likimain positiivinen vakio. Näin kuvauksen $N \mapsto p(N)$ kuvaaja on S-käyrä. Yksinkertainen sellainen kuvaus on

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}, \tag{3.10}$$

missä vakio $B > 0$ esittää lintujen syöntikykyä ja vakio $A > 0$ on se kuusikääriäispopulaation koon kynnysarvo, joka saa linnut syömään niitä puolella syöntikyvystään:

$$p(N_C) = \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty} p(N) = \frac{1}{2}B \;\Rightarrow\; N_C = A.$$

Haetaan mallin (3.9)-(3.10) stationaarisia tiloja eli niitä $N \geq 0$, joilla

$$rN\big(1 - \frac{N}{K}\big) - p(N) = 0.$$

Heti nähdään, että $N = 0$ on yksi sellainen. Loput ovat yhtälön

$$r\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) = \frac{BN}{A^2+N^2} \tag{3.11}$$

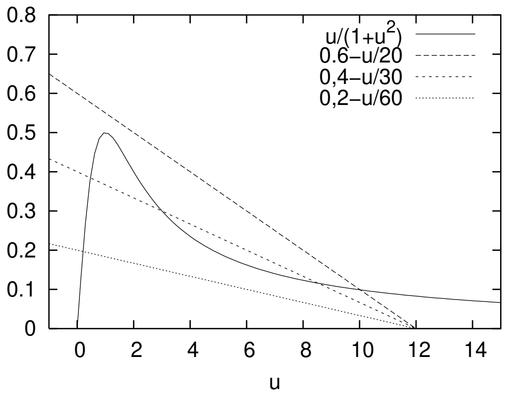
ratkaisuja. Saadaan kolmannen asteen yhtälö $r(K-N)(A^2+N^2) - BN = 0$, jolla on ainakin yksi positiivinen ratkaisu, sillä yhtälön vasen puoli on positiivinen, kun $N = 0$, ja negatiivinen, kun N on tarpeeksi suuri. Tämän jälkeen voitaisiin hakea likiarvoa tuolle yhdelle ratkaisulle, minkä löydyttyä jaettaisiin lauseke löydetyllä tekijällä ja päästäisiin ratkaisemaan toisen asteen yhtälöä. Tämä menettely ei onnistu, jos kuvauksen p lauseke on hieman monimutkaisempi. Muutenkin menettely on kömpelö, sillä yhtälöissä esiintyy neljä positiivista parametriä A, B, K ja r. Tarkastelu helpottuu, kun siirrytään dimensiottomiin suureisiin[10]

$$u(\tau) = \frac{N(t)}{A},\; \rho = \frac{Ar}{B},\; q = \frac{K}{A} \;\text{ ja }\; \tau = \frac{Bt}{A}, \tag{3.12}$$

jolloin ketjusäännön ja yhtälöiden (3.9)-(3.10) mukaan

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= \frac{d}{d\tau}\frac{N(t)}{A} = \frac{1}{A}N'(t)\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{A}\Big(rN(t)\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big) - \frac{BN(t)^2}{A^2+N(t)^2}\Big)\frac{d}{d\tau}\frac{A\tau}{B} \\ &= \frac{rA}{B}\frac{N(t)}{A}\Big(1 - \frac{N(t)/A}{K/A}\Big) - \frac{\big(AN(t)\big)^2}{A^2+\big(AN(t)\big)^2} \\ &= \rho u(\tau)\Big(1 - \frac{u(\tau)}{q}\Big) - \frac{u(\tau)^2}{1+u(\tau)^2}. \end{aligned}$$

9. *Choristoneura fumiferana* (clemens), engl. spruce budworm.
10. Ks. Matemaattista biologiaa 1. Dimensioton suure on paljas luku, sillä ei ole mittayksikköä.



Kuva 3.1: Yhtälön $f(u) = g(u)$ graafinen ratkaiseminen

Mallista (3.9)-(3.10) tuli siten

$$u'(\tau) = \rho u(\tau)\Big(1 - \frac{u(\tau)}{q}\Big) - \frac{u(\tau)^2}{1 + u(\tau)^2} \tag{3.13}$$

Tässä on vain *kaksi* parametria ρ ja q. Haetaan stationaarisia tiloja. Yksi niistä on $u = 0$. Loput ovat yhtälön

$$\rho\Big(1 - \frac{u}{q}\Big) = \frac{u}{1 + u^2} \tag{3.14}$$

ratkaisuja. Merkitään sen vasenta puolta $f(u)$ ja oikeaa $g(u)$ ja tutkitaan sitä graafisesti. Molemmat parametrit ovat nyt kuvauksessa $f(u)$. Kuvauksen f kuvaaja on laskeva suora, joka leikkaa u-akselia pisteessä q ja pystysuoraa akselia pisteessä ρ. Kuvauksen g suurin arvo on $g(1) = 1/2$, $g(0) = 0$ ja $\lim_{u\to\infty} g(u) = 0$.

Tarkastellaan tasapainotiloja kuvan 3.1 avulla. Päättely ei ole matemaattisesti täsmällinen, mutta se voidaan sellaiseksi tehdä[11]. Havaitaan, että parametrien ρ ja q arvoista riippuen stationaarisia tiloja on 1 tai 3 (rajatapauksena myös 2). Jos ρ on lähellä nollaa, niitä on vain yksi, u_1. Jos ρ on hieman suurempi, niin niitä on kolme, u_1, u_2 ja u_3. Jos ρ on iso, niin tasapainotiloja on jälleen vain yksi, u_3. Edelleen aina pätee $u_1 < u_2 < u_3$. Merkitään yhtälön (3.13) oikeaa puolta $h(u)$. Jos $u \approx 0$, niin

$$u' = \rho u\Big(1 - \frac{u}{q}\Big) - \frac{u^2}{1 + u^2} \approx \rho u \quad \text{ja} \quad u(\tau) \approx u(0)\,\mathrm{e}^{r\tau}\,.$$

Siten u erkanee eksponentiaalisesti tasapainotilasta $u = 0$, joten se ei ole stabiili tasapainotila. Jos $u \approx u_1$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in]u, u_2[\cup]u_2, u[$ siten, että

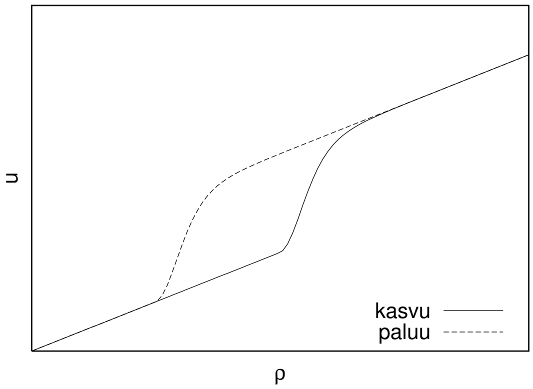
$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}(u - u_1) &= h(u) - h(u_1) = h'(\xi)(u - u_1) \\
&= \Big(1 \cdot \big(f(\xi) - g(\xi)\big) + \xi\big(f'(\xi) - g'(\xi)\big)\Big) \\
&= \Big(f(\xi) - g(\xi) + \xi\Big(-\frac{r}{q} - \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}\Big)\Big)(u - u_1) \approx -\frac{u_1 r}{q}(u - u_1).
\end{aligned}$$

Siten u_1 on stabiili tasapainotila.

Jos $u \approx u_2$, niin edellisen laskun nojalla

$$\frac{d}{d\tau}(u - u_2) \approx u_2\Big(-\frac{r}{q} + \frac{u_2 - 1}{(u_2 + 1)^2}\Big)(u - u_2).$$

11. Ks. seuraava alaluku. Parametrit ρ ja q on valittava sopivasti.



Kuva 3.2: Hystereesi-ilmiö

Kuvan 3.1 perusteella oikean puolen merkin tekee plussaksi $(u_2 - 1)/(1 + u_2)^2$, sillä sen nimittäjä ei ole kovin suuri. Siten u_2 on epävakaa tasapainotila. Jos $u \approx u_3$, niin edellä oleva osamäärä on pieni ja niin

$$\frac{d}{d\tau}(u - u_3) \approx -u_3 \frac{r}{q}(u - u_3).$$

Siten u_3 on vakaa tasapainotila.

Tarkastellaan stationaarisen pisteen u ja parametrin ρ välistä riippuvuutta (kuva 3.2). Jos aluksi $u \approx u_1$ ja ρ on tarpeeksi pieni, niin kääriäispopulaatio pysyy vakaan tasapainotilan u_1 lähellä eli pienenä. Parametrin ρ kasvu aiheuttaa, että ainoaksi vakaaksi tasapainotilaksi tulee $u_3 \gg u_1$, johon järjestelmä hakeutuu. Kääriäiset runsastuvat rajusti. Jos parametri ρ pienenee hieman, pysyttelee u edelleen vakaan tasapainotilan u_3 lähettyvillä (joka vain hieman pienenee). Vasta sitten kun ρ on niin pieni, että ainoa tasapainotila on u_1, hakeutuu u siihen ja kääriäisten määrä laskee merkittävästi. Näin havaitaan hystereesi-ilmiö, kun esitetään u parametrin ρ funktiona:

Parametri ρ kasvaa, kun A tai r kasvaa tai B pienenee. Näin kääriäisten runsastumisen syynä voi olla varsin pieni niitä saalistavien lintujen vähentymä. Kääriäispopulaation kurissapitämiseksi on näin pienennettävä niiden populaation lineaarista kasvukerrointa r tai lisättävä niitä saalistavien lintujen kiinnostusta niiden syömiseen (A vähenee) tai kasvatettava niitä saalistavien lintujen syömiskykyä B (mihin riittää niiden määrän kasvattaminen). Voidaan myös pyrkiä pienentämään parametriä q, mikä onnistuu, jos puiden kantokyky pienenee (neulaset maustetaan kääriäisille epämieluisiksi) tai jos saalistajat syövät mieluummin kääriäisiä kuin muuta ravintoa.

3.2 Tasapainotilojen vakaudesta

Tässä alaluvussa määritellään differentiaaliyhtälön tasapainotila ja esitetään ja todistetaan tuloksia sen vakaudesta.

3.2.1 Määritelmä. *Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Piste $y_\infty \in \mathbb{R}$ on differentiaaliyhtälön $y' = f(y)$ stationaarinen tila eli tasapainotila, jos $f(y_\infty) = 0$.*

3.2.2 Esimerkkejä.

1. Differentiaaliyhtälön $y' = f(y)$ stationaarinen tila on sen ratkaisu.
2. Differentiaaliyhtälöllä $y' = y$ on tasan yksi stationaarinen tila $y_\infty = 0$.
3. Logistisen differentiaaliyhtälön $N' = r(1 - N/K)N$, $r, K > 0$, stationaariset tilat ovat 0 ja K.

3.2.3 Määritelmä. *Olkoon* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ja* $y_\infty \in \mathbb{R}$ *differentiaaliyhtälön* $y' = f(y)$ *stationaarinen tila. Se eksponentiaalisesti stabiili, jos on olemassa* $\lambda > 0$ *ja jokaiselle* $\epsilon > 0$ *on olemassa* $\delta > 0$ *siten, että*

$$|y(t, y_0) - y_\infty| \le \epsilon\, e^{-\lambda t} \text{ kaikilla } t \ge 0.$$

kunhan $|y_0 - y_\infty| < \delta$ *ja* $y(t, y_0)$ *on alkuarvotehtävän* $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ *ratkaisu välillä* $[0, \infty[$.

3.2.4 Esimerkkejä.

1. Differentiaaliyhtälön $y' = -y$ stationaarinen tila $y_\infty = 0$ on eksponentiaalisesti stabiili:

$$|y(t, y_0) - y_\infty| = |y_0\,\mathrm{e}^{-t} - 0| = |y_0|\,\mathrm{e}^{-t} \le \epsilon\,\mathrm{e}^{-t} \text{ kaikilla } t \ge 0,$$

kun $|y_0 - y_\infty| = |y_0| \le \epsilon$.

2. Differentiaaliyhtälön $y' = y$ stationaarinen tila $y_\infty = 0$ ei ole eksponentiaaalisesti stabiili. Valitaan $\epsilon = 1$, jolloin jokaisella $\lambda > 0$ ja $y_0 \in \mathbb{R}$

$$|y(t, y_0) - y_\infty| = |y_0|\,\mathrm{e}^{t} > \epsilon\,\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

kunhan t on tarpeeksi suuri.

3. Logistisen yhtälön stationaarinen tila $N = 0$ ei ole eksponentiaalisesti stabiili, mutta stationaarinen tila $N = K$ on. (Harjoitustehtävä.)

3.2.5 Lause. *Olkoot* $\alpha > 0$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_\infty \in \mathbb{R}$ *ja* $\tilde{\epsilon}\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ *siten, että* y_∞ *on differentiaaliyhtälön* $y' + \alpha y = f(y)$ *stationaarinen tila, kuvaus* $\tilde{\epsilon}$ *on jatkuva origossa,* $\tilde{\epsilon}(0) = 0$ *ja*

$$|f(z) - f(y_\infty)| \le |z - y_\infty|\tilde{\epsilon}(|z - y_\infty|) \text{ kaikilla } z \in \mathbb{R}.$$

Tällöin y_∞ *on eksponentiaalisesti stabiili.*

Todistus. Olkoon $y_0 \in \mathbb{R}$ ja $y(t, y_0)$ alkuarvotehtävän

$$y' + \alpha y = f(y) \text{ ja } y(0) = y_0$$

ratkaisu välillä $[0, \infty[$. Pidetään lauseketta $f(y)$ tunnettuna, jolloin epähomogeenisen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön vakionvarioimiskaavan nojalla[12]

$$y(t, y_0) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\,y_0 + \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\,f\big(y(s)\big)\,ds \text{ kaikilla } t \ge 0.$$

Koska y_∞ on saman differentiaaliyhtälön ratkaisu alkuehdolla $y(0) = y_\infty$, niin

$$y_\infty = \mathrm{e}^{-\alpha t}\,y_\infty + \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\,f(y_\infty)\,ds \text{ kaikilla } t \ge 0.$$

Siten

$$|y(t, y_0) - y_\infty| \le \mathrm{e}^{-\alpha t}\,|y_0 - y_\infty| + \mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\,\big|f\big(y(s, y_0)\big) - f(y_\infty)\big|\,ds$$

kaikilla $t \ge 0$. Olkoon $\epsilon \in]0, \alpha/2[$ mielivaltainen. Koska $\tilde{\epsilon}$ on jatkuva origossa, on olemassa $\delta \in]0, \epsilon[$ siten, että $0 \le \tilde{\epsilon}(r) \le \epsilon$, kun $0 \le r \le \delta$. Koska $t \mapsto y(t, y_0)$ on

12. Ks. Sarjat ja differentiaaliyhtälöt tai totea sijoittamalla differentiaaliyhtälöön, että kaava pätee.

jatkuva, voidaan valita y_0 ja $T > 0$ siten, että $|y(t, y_0) - y_\infty| \le \delta$ kaikilla $t \in [0, T]$. Tällöin oletuksen mukaan

$$|y(t, y_0) - y_\infty| \le \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\delta + \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \mathrm{e}^{\alpha s}\,|y(s, y_0) - y_\infty|\tilde{\epsilon}(|y(s, y_0) - y_\infty|)\,ds$$
$$\le \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\delta + \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_0^t \epsilon\,\mathrm{e}^{\alpha s}\,|y(s, y_0) - y_\infty|\,ds$$

kaikilla $t \in [0, T]$. Siten

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\,|y(t, y_0) - y_\infty| \le \delta + \int_0^t \epsilon\,\mathrm{e}^{\alpha s}\,|y(s, y_0) - y_\infty|\,ds \text{ kaikilla } t \in [0, T].$$

Gronwallin epäyhtälön ja epäyhtälön $\delta < \epsilon < \alpha/2$ nojalla

$$|y(t, y_0) - y_\infty|\,\mathrm{e}^{\alpha t} \le \delta\,\mathrm{e}^{\epsilon t} \le \epsilon\,\mathrm{e}^{\alpha t/2} \text{ kaikilla } t \in [0, T].$$

Näin saadaan

$$|y(t, y_0) - y_\infty| \le \epsilon\,\mathrm{e}^{-\alpha t/2} \text{ kaikilla } t \in [0, T].$$

Huomataan lopuksi, että arvio pätee kaikilla $T > 0$. **m.o.t.**

3.3 Harjoitustehtäviä

1. Kuusikääriäispopulaation pitämiseksi kurissa olisi parametrit ρ ja q saatava pieniksi. Mitä se vaatii parametreilta r, K, B ja A?
2. Esitä käytännöllisiä keinoja parametrien r, K, B ja A muuttamiseksi siten kuin edellisessä tehtävässä pitäisi.
3. Osoita, että logistisen yhtälön stationaarinen tila $N = 0$ ei ole eksponentiaalisesti stabiili. Vihje: ks. kaava (3.6).
4. Osoita, että logistisen yhtälön stationaarinen tila $N = K$ on eksponentiaalisesti stabiili. Vihje: ks. kaava (3.7).
5. Osoita lauseen 3.2.5 avulla, että differentiaaliyhtälön $y' + y = 0$ stationaarinen tila $y = 0$ on eksponentiaalisesti stabiili.
6. Osoita lauseen 3.2.5 avulla, että logistisen yhtälön stationaarinen tila $N = K$ on eksponentiaalisesti stabiili. Vihje: differentiaaliyhtälö on $N' + rN = 2rN - N^2 r/K$.

Luku 4

Vuorovaikuttavien populaatioiden malleja

Luonnossa populaatiot eivät ole toisistaan eristyksissä vaan ovat tekemisissä toistensa kanssa. Tuo kanssakäyminen on usein *vuorovaikutusta*, jossa populaatioiden kohtalot kietoutuvat toisiinsa[1]. Tällaisilla vuorovaikutuksilla on kolme päätyyppiä: *loisiminen, kilpailu* ja *yhteiselo* (symbioosi). Tarkastellaan vain kahta keskenään vuorovaikuttavaa populaatiota. Loisimisesta on kyse, jos yhden populaation kasvaessa toinen pienenee. Kilpailussa kumpikin populaatio vähenee. Yhteiselossa kumpikin populaatio kasvaa.

Vito Volterra esitti 1926 seuraavan yksinkertaisen mallin loisimisesta[2]. Merkitään isäntien määrää hetkellä t $N(t)$ ja loisten määrää[3] $P(t)$. Ne toteuttavat yhtälöt

$$N'(t) = \big(a - bP(t)\big)N(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$P'(t) = \big(cN(t) - d\big)P(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

missä $a, b, c, d > 0$ ovat vakioita. Oletetaan siis, että kummankin populaation kasvunopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon ja että verrannollisuuskertoimet ovat yksinkertaisimpia mahdollisia funktioita toisen populaation koosta seuraavin ominaisuuksin:

1. Jos loisia ei ole, isännät lisääntyvät eksponentiaalisesti.
2. Jos loisia on tarpeeksi paljon, isännät vähenevät eksponentiaalisesti.
3. Jos isäntiä ei ole, loiset vähenevät eksponentiaalisesti.
4. Jos isäntiä on kyllin paljon, lisääntyvät loiset eksponentiaalisesti.

Yhtälöparia (4.1)-(4.2) sanotaan *Lotkan-Volterran yhtälöiksi.* Se on *kahden* ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön muodostama. Kuvaukset N ja P riippuvat toisistaan epätriviaalilla tavalla: kummankin muutos vaikuttaa heti toisen kehittymiseen, joten kyseessä on vuorovaikutus[4].

Tässä luvussa tutustutaan differentiaaliyhtälöiden ryhmiin, vektoriarvoisiin differentiaaliyhtälöihin ja faasiavaruuteen. Kaikilla niillä on käyttöä keskenään vuorovaikuttavien populaatioiden tutkimisessa.

---

1. Edellisessä luvussa käsitellyssä kuusikääriäismallissa oli kaksi populaatiota, kääriäiset ja niitä saalistavat linnut. Kääriäisten määrä ei vaikuttanut lintujen määrään, joten kyseessä ei ollut vuorovaikutus.
2. V. Volterra: Variazione fluttuazioni del numero d'individiei in specie animali convienti. Mem. Acad. Lincei, 2:31–113 (1926).
3. Isännät ja loiset tai saaliit ja saalistajat.
4. Tarkastellaan kahden pallosymmetrisen jäykän kappaleen välistä vuorovaikutusta, jonka aiheuttaa painovoima. Olkoot kappaleiden sijainnit hetkellä t kolmiulotteiset vektorit $\mathbf{x}(t)$ ja $\mathbf{y}(t)$. Newtonin mekaniikan ja gravitaatioteorian mukaan kappaleiden liikeyhtälöt ovat

$$\frac{d}{dt}m_1\mathbf{x}'(t) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|^3}\big(\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\big) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{d}{dt}m_2\mathbf{y}'(t) = -\frac{\gamma m_2 m_1}{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|^3}\big(\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\big) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

missä m_1, m_2 ovat kappaleiden massat ja $\gamma > 0$ on gravitaatiovakio. Saatiin kaksi *kytkettyä* differentiaaliyhtälöä.

4.1 Differentiaaliyhtälöiden ryhmät

Tutustutaan aluksi esimerkkien avulla differentiaaliyhtälöiden ryhmiin, yhteen niiden ratkaisumenetelmään ja vektoriarvoisten kuvausten differentiaaliyhtälöihin.

4.1.1 Esimerkki.
Tarkastellaan hiukkasta, jonka sähkövaraus on $q > 0$ ja massa $m > 0$. Se liikkuu tasossa, joka on kohtisuorassa magneettikenttää $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ vastaan, $B > 0$. Hiukkasen sijaintia hetkellä t merkitään $\big(x(t), y(t), 0\big)$ ja nopeutta $\mathbf{v}(t) = \big(u(t), v(t), 0\big)$. Hiukkaseen vaikuttaa Lorentzin voima[5]

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B} = \big(qv(t)B, -qu(t)B, 0\big).$$

Newtonin II lain nojalla $m\mathbf{v}'(t) = \mathbf{F}$, joten saadaan *kaksi ensimmäisen* kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$u'(t) = \omega v(t) \quad \text{ja} \quad v'(t) = -\omega u(t) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

missä $\omega = qB/m$. Derivoimalla ja sijoittamalla päästään *yhteen toisen* kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$u''(t) = \omega v'(t) = \omega\big(- \omega u(t)\big) = -\omega^2 u(t) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

Sen yleinen ratkaisu on

$$u(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Siten

$$v(t) = \frac{u'(t)}{\omega} = -C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Hiukkasen paikka $\big(x(t), y(t)\big)$ hetkellä t saadaan näistä integroimalla:

$$x(t) = \frac{C_1}{\omega} \sin \omega t - \frac{C_2}{\omega} \cos \omega t + C_3 \quad \text{ja} \quad y(t) = \frac{C_1}{\omega} \cos \omega t + \frac{C_2}{\omega} \sin \omega t + C_4$$

missä $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$. Koska

$$\big(x(t) - C_3\big)^2 + \big(y(t) - C_4\big)^2 = \frac{C_1^2}{\omega^2} + \frac{C_2^2}{\omega^2} =: \rho^2 \quad \text{ja} \quad u(t)^2 + v(t)^2 = C_1^2 + C_2^2,$$

niin hiukkanen kiertää pitkin ρ-säteistä ympyrää vakiovauhdilla $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Huomaa, että *kaksi* ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä antoi yhden *toisen* kertaluvun differentiaaliyhtälön, jonka ratkaisuna on jaksollinen kuvaus. Siten Lotkan-Volterran yhtälöiden (4.1)–(4.2) ratkaisu saattaa sekin olla jaksollinen: loisten ja isäntien määrät vaihtelevat jaksollisesti.

4.1.2 Esimerkki.
Tarkastellaan kitkatonta harmonista oskillaattoria, jossa m-massainen punnus on kytketty jouseen, jonka jousivakio on $k > 0$. Merkitään punnuksen paikkaa $x(t)$ hetkellä t, jolloin sen liikeyhtälö on $mx''(t) = -kx(t)$. Merkitään $p(t) = mx'(t)$, jolloin yhdestä *toisen* kertaluvun differentiaaliyhtälöstä saadaan kaksi *ensimmäisen* kertaluvun differentiaaliyhtälöä:

$$x'(t) = \frac{1}{m} p(t) \quad \text{ja} \quad p'(t) = -kx(t). \tag{4.4}$$

Huomaa, että yhtälöparit (4.3) ja (4.4) ovat muodoltaan samanlaisia.

---

5. Kyseessä on vektoreiden *ristitulo*. Jos läsnä on myös sähkökenttä $\mathbf{E}$, niin Lorentzin voima $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

4.1.3 Määritelmä. *Olkoon* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *väli ja* $n \in \mathbb{N}$. *Kuvaus* $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$ *on jatkuva*[6] *(pisteessä* $t \in \Delta$*), jos sen koordinaattikuvaukset* $t \mapsto f_1(t)$, ..., $t \mapsto f_n(t)$ *ovat jatkuvia (pisteessä* $t \in \Delta$*). Muuten kuvaus* $\mathbf{f}$ *on epäjatkuva.*

4.1.4 Esimerkkejä.

1. Kuvaus $t \mapsto \big(t \sin t,\, \mathrm{e}^{t^2}\big)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, on jatkuva, koska sen koordinaattikuvaukset $t \mapsto t \sin t$ ja $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovat jatkuvia.
2. Kuvaus $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,
$$t \mapsto \begin{cases} \big(t, \sin \frac{1}{t}\big), & \text{jos } t \neq 0, \\ (0,0), & \text{jos } t = 0, \end{cases}$$
on epäjatkuva, koska sen toinen koordinaattikuvaus on epäjatkuva.

4.1.5 Määritelmä. *Olkoon* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *väli ja* $n \in \mathbb{N}$. *Kuvaus* $f\colon \Delta \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$ *on derivoituva*[7] *(pisteessä* $t \in \Delta$*), jos kuvaukset* $f_1, \ldots, f_n$ *ovat derivoituvia (pisteessä* $t \in \Delta$*). Silloin kuvauksen* f *derivaatta pisteessä* $t \in \Delta$ *on*

$$f'(t) = \big(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\big).$$

4.1.6 Esimerkkejä.

1. Kuvaus $t \mapsto \mathbf{f}(t) = (\cos \omega t, \sin \omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, on derivoituva ja sen derivaatta $\mathbf{f}'(t) = \omega(-\sin \omega t, \cos \omega t)$. Nyt $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) = 0$ eli vektorit $\mathbf{f}(t)$ ja $\mathbf{f}'(t)$ ovat kohtisuorassa[8].
2. Kuvaukselle $t \mapsto \mathbf{f}(t) = \big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, pätee
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{f}(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\big(f_1(t)^2 + \ldots + f_n(t)^2\big) \\ &= 2f_1(t)f_1'(t) + \ldots + 2f_n(t)f_n'(t) = 2\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}'(t) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.1.7 Määritelmä. *Olkoon* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *väli,* $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ja* $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$. *Yhtälöä* $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ *sanotaan* n*-ulotteiseksi vektori- ja normaalimuotoiseksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi.*

4.1.8 Esimerkkejä.

1. Esimerkin 4.1.1 hiukkasen liikeyhtälö $m\mathbf{v}'(t) = \mathbf{F}$ on ensimmäisen kertaluvun vektorimuotoinen differentiaaliyhtälö.
2. Kitkattomalle harmoniselle oskillaattorille saatu differentiaaliyhtälöpari on yhtäpitävä vektorimuotoisen differentiaaliyhtälön $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{y}(t)\big)$ kanssa, kun merkitään
$$\mathbf{y}(t) = \big(x(t), p(t)\big) \text{ ja } \mathbf{g}(z_1, z_2) = \big(\frac{z_2}{m}, -kz_1\big),\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$
3. Vektorimuodossa Lotkan-Volterran yhtälöt ovat:
$$\frac{d}{dt}\big(N(t), P(t)\big) = \Big(\big((a - bP(t)\big)N(t), \big(cN(t) - d\big)P(t)\Big) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$
4. Tarkastellaan toisen kertaluvun normaalimuotoista differentiaaliyhtälöä $y'' = f(t, y, y')$, missä $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Se on yhtäpitävä kaksiulotteisen vektorimuotoisen differentiaaliyhtälön $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ kanssa, kunhan merkitään
$$\mathbf{x}(t) = \big(y(t), y'(t)\big) \text{ ja } \mathbf{f}(t, z_1, z_2) = \big(z_2, f(t, z_1, z_2)\big).$$

---

6. Jatkuvuus voidaan määritellä yhtäpitävästi avaruuden $\mathbb{R}^n$ normin $\|\cdot\|$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, avulla: jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\| < \epsilon$, kunhan $|t - s| < \delta$.
7. Tämä vektoriarvoisen kuvauksen derivoituvuus voidaan määritellä yhtäpitävästi vaatimalla, että erotusosamäärällä $\big(f(t+h) - f(t)\big)/h$ on raja-arvo $f'(t) \in \mathbb{R}^n$, kun $h \to 0$.
8. Vektoreiden $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ tavallinen sisätulo on $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

5. Tarkastellaan n:nen kertaluvun normaalimuotoista differentiaaliyhtälöä $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, missä $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Se on yhtäpitävä n-ulotteisen vektorimuotoisen differentiaaliyhtälön $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ kanssa, kunhan merkitään

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \big(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\big) \text{ ja}\\ \mathbf{f}(t, z_1, \dots, z_n) &= \big(z_2, \dots, z_n, f(t, z_1, \dots, z_n)\big).\end{aligned}$$

Vektorimuotoiset differentiaaliyhtälöt muunnetaan yhtäpitävästi *matriisimuotoisiksi* käyttämällä olioiden $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $(x_1\; x_2\; \dots\; x_n)^T$ vastaavuutta (T niinkuin transpoosi).

4.1.9 Esimerkkejä.

1. Esimerkin 4.1.1 vektorimuotoinen differentiaaliyhtälö $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{F}$ on matriisimuodossa[9]

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

2. Kitkattoman harmonisen oskillaattorin differentiaaliyhtälön matriisimuoto on

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

3. Lotkan-Volterran yhtälöt ovat matriisimuodossa

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bP(t) & 0 \\ 0 & cN(t) - d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(t) \\ P(t) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Yhtä hyvin ne voidaan kirjoittaa myös

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N(t) \\ P(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -bN(t) \\ cP(t) & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N(t) \\ P(t) \end{pmatrix} \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

4.1.10 Määritelmä. *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ja $\mathbf{f}\colon A \to \mathbb{R}^n$. Kuvaus $\mathbf{y}\colon \Delta \to \mathbb{R}^n$ differentiaaliyhtälön $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ ratkaisu välillä Δ, jos*

1. *kuvaus $t \mapsto \mathbf{y}(t)$ on derivoituva jokaisella $t \in \Delta$,*
2. *$\big(t, \mathbf{y}(t)\big) \in A$ kaikilla $t \in \Delta$ ja*
3. *$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)$ kaikilla $t \in \Delta$.*

4.1.11 Esimerkki.

1. Esimerkin 4.1.1 hiukkasen liikeyhtälön $(u, v)' = (\omega v, -\omega u)$ ratkaisuja välillä $\mathbb{R}$ ovat

$$t \mapsto \big(u(t), v(t)\big) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, -C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Matriisimuodossa ne ovat

$$t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

---

9. Matriisien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

summa ja tulo määritellään

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \text{ ja } AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Yleisemmin matriiseille $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ ja } (AB)_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}.$$

2. Vektorimuotoisen Lotkan-Volterran yhtälön ratkaisuja ovat

$$t \mapsto \left(C\,\mathrm{e}^{at},0\right) \text{ ja } t \mapsto \left(0, D\,\mathrm{e}^{-dt}\right),\ C, D \in \mathbb{R}.$$

Esitetään seuraavaksi vektorimuotoisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause.

4.1.12 Lause. *Olkoot $M, T > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ siten, että*

$$t \mapsto \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \text{ on jatkuva kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{z})\| \le M\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \text{ kaikilla } t \in [0,T] \text{ ja } \mathbf{x},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Silloin[10] *differentiaaliyhtälöllä $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ on välillä $[0,T]$ yksi ja vain yksi ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.*

Jos $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ toteuttaa ehdon (4.11), sitä sanotaan *tasaisesti Lipschitzin jatkuvaksi.*

4.1.13 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan kitkatonta heiluria, jonka massa on $m > 0$, pituus on $l > 0$ ja joka on painovoimakentässä, jossa vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys on $g > 0$. Heilurin liike-yhtälöstä saadaan Gordonin siniyhtälö

$$\phi''(t) + \frac{g}{l}\sin\phi(t) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

missä $\phi(t)$ on heilurin heilahduskulma hetkellä t. Kun kirjoitetaan

$$\psi(t) = \phi'(t) \text{ ja } \mathbf{f}(t,z_1,z_2) = \left(z_2, -\frac{g}{l}\sin z_1\right),$$

on liikeyhtälö yhtäpitävästi

$$\frac{d}{dt}\big(\phi(t),\psi(t)\big) = \mathbf{f}\big(t,\phi(t),\psi(t)\big),\ t \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Olkoot $T > 0$, $\phi_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ja $\psi_0 \in \mathbb{R}$. Olkoot $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ ja $t \in \mathbb{R}$. Silloin väliarvolauseen nojalla reaalilukujen x_1 ja z_1 välissä on luku ξ, ja

$$\begin{aligned}
&\big\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{z})\big\| = \Big\|(x_2, \frac{g}{l}\sin x_1) - (z_2, \frac{g}{l}\sin z_1)\Big\| \\
&= \Big\|\big(x_2 - z_2, \frac{g}{l}(\sin x_1 - \sin z_1)\big)\Big\| = \sqrt{(x_2-z_2)^2 + \big(\frac{g}{l}(x_1-z_1)\cos\xi\big)^2} \\
&\le \sqrt{(x_2-z_2)^2 + 2|x_2-z_2|\frac{g}{l}|x_1-z_1|\,|\cos\xi| + \big(\frac{g}{l}(x_1-z_1)\cos\xi\big)^2} \\
&= |x_2-z_2| + \frac{g}{l}|x_1-z_1|\,|\cos\xi| \le \big(1+\frac{g}{l}\big)\sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2} \\
&= \big(1+\frac{g}{l}\big)\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|.
\end{aligned}$$

Koska kuvaus $\mathbf{f}$ toteuttaa edellisen lauseen ehdot, niin yhtälöllä (4.12) on välillä $[0,T]$ täsmälleen yksi ratkaisu (ϕ,ψ), joka toteuttaa alkuehdot $\phi(0) = \phi_0$ ja $\psi(0) = \psi_0$.

2. Alkuarvotehtävällä $y' = y^2$, $y(0) = 1$, ei ole välillä $[0,2]$ ratkaisua. Kuvaus $(t,x) \mapsto x^2$ ei toteuta ehtoa (4.11). Jos se toteutuisi, niin jollakin $M > 0$ ja kaikilla $x > 0$

$$M = M|x-(x+1)| \ge |x^2 - (x+1)^2| = |x-(x+1)|\,|x+(x+1)| = 2x+1,$$

mikä ei pidä paikkaansa.

10. Kuvauksista $t \mapsto \mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ riittää pelkkä mitallisuus, ks. Mitta- ja integraaliteoria. Ehdoissa (4.10)-(4.11) riittää, että $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in C$, missä $C \subset \mathbb{R}^n$ on kupera ja suljettu.

3. Perustellaan lauseen 4.1.12 avulla, että alkuarvotehtävällä $y' = -y^2$, $y(0) = y_0$, on tasan yksi ratkaisu välillä $[0, T]$, kunhan $y_0 \geq 0$ ja $T > 0$. Olkoon $N > 0$ jokin iso luku, joka valitaan myöhemmin. Määritellään

$$f_N \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_N(t,x) = \begin{cases} -x^2, & \text{jos } |x| \leq N, \\ -N^2, & \text{jos } |x| > N, \end{cases}$$

jolloin kuvaus f toteuttaa ehdon (4.12):

$$\begin{aligned} &|f_N(t,x) - f_N(t,y)| \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} |x-y|\,|x+y| \leq 2N|x-y|, & \text{jos } |x|,|y| \leq N, \\ (N+y)(N-y) \leq 2N(x-y), & \text{jos } x > N \ \text{ ja } \ |y| \leq N, \\ (N-y)(N+y) \leq 2N(y-x), & \text{jos } x < -N \ \text{ ja } \ |y| \leq N, \\ |-N^2+N^2| = 0 \leq 2N|x-y|, & \text{jos } x > N \ \text{ ja } \ y > N, \end{array} \right\} \\ &\leq 2N|x-y|. \end{aligned}$$

Muutkin[11] lauseen 4.1.12 ehdot toteutuvat, joten alkuarvotehtävällä $y' = f_N(y)$, $y(0) = y_0$, on tasan yksi ratkaisu y_N välilä $[0,T]$. Mutta

$$y_N'(t) = f_N\big(t, y_N(t)\big) \leq 0 \text{ kaikilla } t \in [0,T].$$

Siten y_N on vähenevä koko välillä $[0,T]$. Jos $y_N(t) = 0$ jollakin hetkellä $t_1 \in [0,T]$, niin lauseen 4.1.12 yksikäsitteisyysväitteen nojalla $y_N(t) = 0$ kaikilla $t \in [t_1, T]$, koska nollakuvaus on alkuarvotehtävän $y' = f_N(t,y)$, $y(t_1) = 0$, ratkaisu välillä $[t_1, T]$. Kun *valitaan* $N > y_0$, niin $0 \leq y_N(t) \leq y_0 \leq N$, ja $f_N\big(t, y_N(t)\big) = -y_N(t)^2$ kaikilla $t \in [0,T]$. Täten y_N on alkuarvotehtävän $y' = -y^2$, $y(0) = y_0$, yksikäsitteinen[12] ratkaisu välillä $[0,T]$.

4. Osoitetaan lauseen 4.1.12 avulla, että Lotkan-Volterran yhtälöillä on yksi ja vain yksi ratkaisu välillä $[0,T]$, joka toteuttaa alkuehdot $N(0) = N_0$ ja $P(0) = P_0$, kunhan $N_0, P_0 \geq 0$ ja $T > 0$. Ongelmana ovat ristitermit $-bPN$ ja cNP, joiden vuoksi vektorimuotoisen Lotkan-Volterran yhtälön oikea puoli

$$\mathbf{f}(t,N,P) = \big((a-bP)N, (cN-d)P\big)$$

ei ole tasaisesti Lipschitzin jatkuva.
Olkoon $K > \|(N_0,P_0)\|$ jokin iso luku, joka valitaan myöhemmin. Asetetaan

$$\mathbf{f}_K(t,N,P) = \begin{cases} \mathbf{f}(t,N,P), & \text{jos } \|(N,P)\| \leq K, \\ \mathbf{f}\Big(t, K\frac{(N,P)}{\|(N,P)\|}\Big), & \text{jos } \|(N,P)\| > K, \end{cases}$$

jolloin $\mathbf{f}_K$ toteuttaa ehdon (4.11) (harjoitustehtävä). Muutkin lauseen 4.1.12 ehdot ovat voimassa, joten alkuarvotehtävällä

$$\frac{d}{dt}(N,P) = \mathbf{f}_K(t,N,P),\ N(0) = N_0 \ \text{ ja } \ P(0) = P_0$$

on täsmälleen yksi ratkaisu (N_K, P_K) välillä $[0,T]$. Kuvauksen (N_K, P_K) jatkuvuuden nojalla $\big\|\big(N_K(t), P_K(t)\big)\big\| \leq K$ jollakin välillä $[0,\tilde{T}] \subset [0,T]$. Silloin N_K ja P_K toteuttavat Lotkan-Volterran yhtälöt, joten

$$cN_K' + bP_K' = acN_K - bcP_K N_K + bcN_K P_K - bdP_K = acN_K - bdP_K$$

välillä $[0,\tilde{T}]$. Integroimalla ja alkuehtojen avulla saadaan

$$cN_K(t) + bP_K(t) = cN_0 + bP_0 + \int_0^t \big(acN_K(s) - bdP_K(s)\big)\, ds \tag{4.13}$$

11. Tapausta $|x| \leq N$ ja $|y| > N$ ei yllä tarvitse käydä läpi, sillä se saadaan kahdesta keskimmäisestä vaihtamalla x ja y keskenään.
12. Voidaan myös tyytyä ensin näyttämään, että y_N on ratkaisu, ja sen jälkeen Gronwallin epäyhtälön avulla näytetään, että muita ratkaisuja ei ole.

kaikilla $t \in [0,\tilde{T}]$. Jos $N_K(t_1) = 0$ jollakin $t_1 \in [0,T]$, niin käytetään jälleen alkuarvotehtävän ratkaisun yksikäsitteisyyttä välillä $[t_1, T]$ ja sitä, että $(0, D\,\mathrm{e}^{-dt})$, $D \in \mathbb{R}$, on vastaavan differentiaaliyhtälön ratkaisu. Siksi $N_K(t) = 0$ kaikilla $t \in [t_1, T]$, joten $N_K(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,T]$. Samoin päätellään, että $P_K(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,T]$. Yhtälöstä (4.13) saadaan nyt

$$cN_K(t) \leq cN_0 + bP_0 + \int_0^t acN_K(s)\,ds \text{ kaikilla } t \in [0,\tilde{T}].$$

Gronwallin epäyhtälön nojalla

$$N_K(t) \leq \Big(N_0 + \frac{b}{c}P_0\Big)\,\mathrm{e}^{aT} =: K_1 \text{ kaikilla } t \in [0,\tilde{T}].$$

Yhtälön (4.13) nojalla nyt

$$P_K(t) \leq \Big(\frac{c}{b}N_0 + P_0\Big) + \frac{TacK_1}{b} =: K_2 \text{ kaikilla } t \in [0,\tilde{T}].$$

Olkoon $K = 2\sqrt{K_1^2 + K_2^2}$, jolloin

$$\big\|\big(N_K(t), P_K(t)\big)\big\| < \frac{K}{2} \text{ kaikilla } t \in [0,\tilde{T}]. \tag{4.14}$$

Oletetaan, että olisi jokin luku $\hat{T} \in]0,T[$, jota suurempi luku $\tilde{T}$ ei voi olla. Koska kuvaus $\|(N_K, P_K)\|$ on jatkuva, niin $\big\|\big(N_K(t), P_K(t)\big)\big\| > K$ jollakin välillä $]\hat{T}, \hat{T}+\epsilon[$. Epäyhtälö (4.14) pätee myös suurimmalla mahdollisella $\tilde{T}$ eli luvulla $\hat{T}$, joten kuvaus $\|(N_K, P_K)\|$ onkin epäjatkuva pisteessä $t = \hat{T}$. Ristiriita, joten saa olla $\tilde{T} = T$, ja (4.14) pätee kaikilla $t \in [0,T]$. Siten

$$\mathbf{f}_K\big(t, N_K(t), P_K(t)\big) = \mathbf{f}\big(t, N_K(t), P_K(t)\big) \text{ kaikilla } t \in [0,T],$$

ja (N_K, P_K) on haettu Lotkan-Volterran yhtälön yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[0,T]$, joka toteuttaa alkuehdot $N(0) = N_0$ ja $P(0) = P_0$.

4.2 Faasiavaruudet

4.2.1 Esimerkki.

Kitkattoman harmonisen oskillaattorin liikeyhtälö $mx''(t) = -kx(t)$, $m,k > 0$, palautuu ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden pariksi

$$x'(t) = \frac{1}{m}p(t) \quad \text{ja} \quad p'(t) = -kx(t), \tag{4.15}$$

jonka kaikki ratkaisut välillä $\mathbb{R}$ ovat (x,y),

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \\ p(t) &= mx'(t) = -m\omega C_1 \sin\omega t + m\omega C_2 \cos\omega t, \end{aligned}$$

missä $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ja $\omega = \sqrt{k/m}$. Yleinen ratkaisu on kullekin $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ xp-tason käyrän $p = p(x)$ *parametriesitys* siten, että $t \in \mathbb{R}$ on esityksen parametri. Itse asiassa alkuehdoille $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $p(0) = p_0 \in \mathbb{R}$,

$$x(t)^2 + \frac{p(t)^2}{(m\omega)^2} = C_1^2 + C_2^2 = x_0^2 + \Big(\frac{p_0}{m\omega}\Big)^2,$$

joten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1, \;\; a := \sqrt{x_0^2 + \Big(\frac{p_0}{m\omega}\Big)} \;\; \text{ja} \;\; b := m\omega a.$$

Siten käyrä $p = p(x)$ on xp-tason origokeskinen ellipsi, jonka pääakselit ovat $2a$ ja $2b$.

Johdetaanpa tämän käyrän yhtälö suoraan differentiaaliyhtälöparista (4.15) ratkaisematta sitä. Ketjusäännön ja käänteiskuvauksen derivointikaavan mukaan

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dp}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^{-1} = \frac{p'(t)}{x'(t)} = \frac{-kx}{p/m} = -km\frac{x}{p},$$

josta separoimalla muuttujat ja integroimalla saadaan

$$\int p\,dp = -km\int x\,dx \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}m^2\omega^2C^2.$$

Siten $x^2 + p^2/(m^2\omega^2) = C^2$, missä C määräytyy alkuehdoista. Tässä johdossa jäi perustelematta tai käsittelemättä mahdollinen $p = 0$: onko käänteiskuvaus siinä olemassa, saako integroida epäjatkuvaa kuvausta jne. Kaikki nuo ongelmat voidaan kiertää huomaamalla, että yhtäläparin (4.15) nojalla

$$2x(t)x'(t) = 2\Big(-\frac{p'(t)}{k}\Big)\Big(\frac{p(t)}{m}\Big) = -\frac{2}{m^2\omega^2}p(t)p'(t) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R},$$

josta integroimalla seuraa, että

$$x(t)^2 = -\frac{1}{m^2\omega^2}p(t)^2 + C^2 \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

Separointimenetelmällä ei laskeskeltu turhaan: sen avulla löydettiin mahdollinen ratkaisu, josta nähtiin, että juuri olion $x(t)^2$ derivaatasta kannattaa aloittaa.

4.2.2 Määritelmä. *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Autonomisen*[13] *tai epäautonomisen differentiaaliyhtälöparin*

$$u' = f(t,u,v) \quad ja \quad v' = g(t,u,v) \tag{4.16}$$

faasiavaruudeksi sanotaan uv-tasoa. Yhtälöparin (4.16) ratkaisun $t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)$ välillä Δ rataa eli käyrää uv-tasossa sanotaan yhtälöparin (4.16) faasidiagrammiksi tai faasikäyräksi[14].

4.2.3 Esimerkkejä.

1. Tarkastellaan kitkatonta heiluria. Sen liikettä kuvaava Gordonin siniyhtälö on yhtäpitävästi autonominen differentiaaliyhtälöpari

   $$\phi'(t) = \psi(t) \quad \text{ja} \quad \psi'(t) = -\frac{g}{l}\sin\phi(t),$$

   jolla on jo näytetty olevan tasan yksi ratkaisu (ϕ, ψ), joka toteuttaa alkuehdot

   $$\phi(0) = \phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \text{ja} \quad \psi(0) = \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

   Tätä alkuarvotehtävää ei silti osata ratkaista, mutta vastaava faasikäyrä saadaan varsin helposti:

   $$\psi(t)\psi'(t) = \phi'(t)\frac{-g}{l}\sin\phi(t) = \frac{d}{dt}\frac{g}{l}\cos\phi(t),$$

   joten

   $$\psi^2 = \frac{2g}{l}\cos\phi + C, \; C \in [-\frac{2g}{l}, \infty[.$$

---

13. Siis yhtälöiden oikean puolen termit eivät riipu ajasta eksplisiittisesti.
14. Yhtälöt (4.16) saavat olla vektorimuotoisia. Niin on usein klassisessa mekaniikassa: kappaleita on n kpl, jokaisen sijainti on avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, differentiaaliyhtälöitä on $6n$ kappaletta ja faasiavaruus on $6n$-ulotteinen.

Tämäkin faasikäyrä sulkeutuu, kunhan $\psi_0 \approx 0$. Lisäksi nähdään järjestelmän *negatiivinen kiertosuunta*: kun aika t kasvaa, vaeltaa piste (x,p) pitkin rataansa[15] myötäpäivään[16], kunhan $\psi_0 \approx 0$.

2. Yhtälöpari $u' = -\sin t$, $v' = \cos t$, ei ole autonominen. Sen ratkaisu välillä $\mathbb{R}$ on $u(t) = \cos t + C_1$, $v(t) = \sin t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, joka on 1-säteisen ja (C_1, C_2)-keskisen ympyrän parametriesitys. Nyt käyrän piste (u,v) kulkee parametrin t kasvaessa positiiviseen kiertosuuntaan eli vastapäivään. Huomaa, että jos $C_1 = C_2 = 0$, niin yhtälöpari on $u' = -v$, $v' = u$.

4.2.4 Lause. *Olkoon autonomisella alkuarvotehtävällä*

$$u' = f(u,v),\ v' = g(u,v),\ u(t_0) = u_0 \quad ja \quad v(t_0) = v_0,$$

yksi ja vain yksi ratkaisu (u,v) välillä $\mathbb{R}$ jokaisella $t_0, u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Silloin faasikäyrä sulkeutuu, jos ja vain jos kuvaus $t \mapsto (u,v)$ on jaksollinen.

Todistus. Olkoon $t \mapsto (u,v)$ jaksollinen. Silloin on olemassa $T > 0$ siten, että

$$\big(u(t+T), v(t+T)\big) = \big(u(t), v(t)\big) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{R}. \tag{4.17}$$

Annetaan parametrin t kasvaa arvosta t_0 arvoon $t_0 + T$. Silloin syntyy käyrä, jonka alku- ja loppupiste ovat samat. Alkuarvotehtävän yksikäsitteisyyden nojalla parametrin arvoilla $t > t_0 + T$ ei käyrään tule uusia pisteitä. Samoin tarkastellaan parametrin arvot $t < t_0$.

Olkoon faasikäyrä sulkeutuva. Silloin jollakin $T > 0$

$$\big(u(0+T, v(0+T)\big) = \big(u(T), v(T)\big).$$

Koska yksikäsitteisyysoletuksen mukaan $t \mapsto \big(u(t+T), v(t+T)\big)$ ja $t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)$ ovat saman alkuarvotehtävän yksikäsitteisiä ratkaisuja välillä $[0,T]$, niin jaksollisuus (4.17) pätee ainakin välillä $[0,T]$. Samoin käsitellään seuraavat ja edelliset välit. **m.o.t.**

4.2.5 Esimerkkejä.

1. Kitkattoman harmonisen oskillaattorin faasikäyrä sulkeutuu ja vastaavien alkuarvotehtävien ratkaisu on jaksollinen.
2. Kitkattoman heilurin faasikäyrä sulkeutuu, kunhan $\psi(0) \approx 0$, joten Gordonin siniyhtälön ratkaisu alkuehdoin $\phi(0) = \phi_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ ja $\phi'(0) = \psi_0 \approx 0$ on jaksollinen.
3. Tarkastellaan kitkaista harmonista oskillaattoria. Sen liikeyhtälö on $mx'' = -kx - \mu x'$, $m, k\mu > 0$. Sitä vastaa differentiaaliyhtälöpari

$$x'(t) = \frac{1}{m}p(t) \quad \text{ja} \quad p'(t) = -kx(t) - \gamma p(t), \tag{4.18}$$

missä $\gamma = \mu/m$ ja $\omega = \sqrt{k/m}$. Kaikki sen ratkaisut on jo löydetty. Tarkastellaan tapausta, jossa jousivoima dominoi eli $4\omega^2 > \gamma^2$. Silloin

$$x(t) = \mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\big(C_1 \cos\tilde\omega t + C_2 \sin\tilde\omega t\big), \tilde\gamma = -\frac{\gamma}{2},\ \tilde\omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}, \tag{4.19}$$

$$p(t) = m\,\mathrm{e}^{\tilde\gamma t}\big((\tilde\omega C_2 + \tilde\gamma C_1)\cos\tilde\omega t + (\tilde\gamma C_2 - \tilde\omega C_1)\sin\tilde\omega t\big). \tag{4.20}$$

---

15. Taivaanmekaniikassa (engl. celestial mechanics) planeetan radan määräävät Keplerin ensimmäinen laki ("Planeetat kiertävät aurinkoa pitkin ellipsirataa, jonka yhdessä polttopisteessä on aurinko") ja viisi rataelementtiä (integrointivakiota), jotka ovat ellipsin isoakselin puolikas a ja eksentrisyys e (nämä määräävät ellipsin), nousevan solmun pituus Ω ja ratatason inklinaatio i (nämä määräävät ratatason) sekä perihelin argumentti ω (tämä määrää ellipsiradan sijainnin ratatasossa). Planeetan paikan laskemiseen tarvitaan vielä kaksi Keplerin lakia ("Planeetan pintanopeus on vakio." "Isoakselin kuutio on suoraan verrannollinen kiertoajan neliöön.") ja yksi rataelementti: periheliaika T.

16. Kiertosuunta on positiivinen, jos pintanopeus $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\phi,\psi,0)\times(\phi',\psi',0) = \frac{1}{2}(0,0,\phi\psi' - \psi\phi')$ on samansuuntainen kuin $(0,0,1)$. Jos se on vastakkaissuuntainen, niin kiertosuunta on negatiivinen. Nyt pintanopeus on $-(g/2l)\,\phi\,\sin\ \phi - \psi^2/2 < 0$.

Olkoon $C_1^2+C_2^2 > 0$. Jos (x,p) olisi jaksollinen, niin eksponenttifunktiotermin vuoksi jollakin $T > 0$ ja kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätisi

$$x(t) = x(t+T) = \ldots = x(t+nT) \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$

jolloin olisikin $x(t) = 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Siten yhtälöparin (4.18) ratkaisu ei ole jaksollinen. Edellisen lauseen nojalla faasikäyrä ei sulkeudu. Yhtälöiden (4.19)-(4.20) nojalla on selvää, että ajan t kasvaessa faasikäyrän piste kiertää origoa ja lähestyy sitä. Määritetään faasikäyrän pisteen (x,p) kiertosuunta ajan t kasvaessa. Matriisimuodossa ratkaisu (4.19)-(4.20) on

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \text{ missä}$$
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos\tilde{\omega}t & \sin\tilde{\omega}t \\ m\tilde{\gamma}\cos\tilde{\omega}t - m\tilde{\omega}\sin\tilde{\omega}t & m\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t + m\tilde{\gamma}\sin\tilde{\omega}t \end{pmatrix}.$$

Koska $\det A(t) = \mathrm{e}^{\tilde{\gamma}t} m\tilde{\omega} > 0$, niin $A(t)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on bijektio, ja niin $\big(x(t), p(t)\big) = 0$ täsmälleen silloin, kun $C_1 = C_2 = 0$. Olkoon $C_1^2 + C_2^2 > 0$. Faasikäyrän pisteen (x,p) *pintanopeus*

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}(x,p,0) \times (x',p',0) = \frac{1}{2}(0,0,xp' - x'p).$$

Yhtälöiden (4.18) ja aritmeettis-geometrisen epäyhtälön[17]

$$\begin{aligned}
x'p - xp' &= \frac{1}{m}p^2 + kx^2 + \gamma px \ge \frac{1}{m}\big(p^2 - |p|\,|\gamma mx| + kmx^2\big) \\
&\ge \frac{1}{m}\Big(p^2 - p^2 - \frac{1}{4}(\gamma mx)^2 + kmx^2\Big) = mx^2\big(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\big) \\
&= mx^2\big(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}\big) > 0, \text{ jos } x \ne 0, \\
x'p - xp' &\ge k\Big(x^2 - |x|\,\Big|\frac{\gamma p}{k}\Big| + \frac{1}{mk}p^2\Big) \\
&\ge k\big(x^2 - x^2 - \frac{1}{4}\Big(\frac{\gamma p}{k}\Big)^2 - kmx^2\Big) = \frac{p^2}{k}\Big(-\frac{\gamma^2}{4} + \frac{k}{m}p^2\Big) \\
&= \frac{p^2}{k}\Big(-\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2\Big) > 0, \text{ jos } p \ne 0.
\end{aligned}$$

Koska x ja p eivät ole nollia yhtäaikaa, pintanopeus on vastakkainen vektorin $(0,0,1)$ kanssa. Siten faasikäyrän piste $\big(x(t), p(t)\big)$ kiertää myötäpäivään, kun t kasvaa.
Kohtuullisella vaivalla faasikäyrä saadaan hakemalla differentiaaliyhtälön

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-kx - \gamma p}{p/m}$$

implisiittinen ratkaisu (vaihdetaan muuttujaa $z = p/x$ sekä käytetään separointimenetelmää ja osamurtokehitelmää).

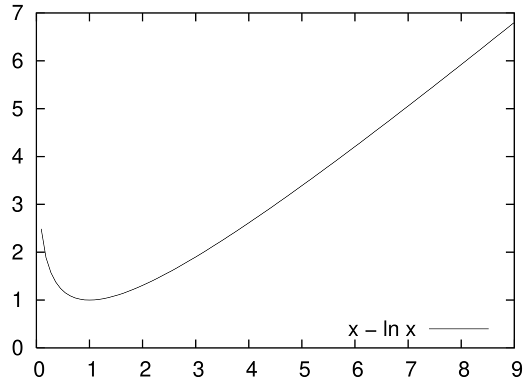
Haetaan Lotkan-Volterran yhtälöiden faasikäyrä, kun alkuehtoina on

$$N(0) = N_0 > 0 \text{ ja } P(0) = P_0 > 0. \tag{4.21}$$

Sijoittamalla Lotkan-Volterran yhtälöt saadaan

$$\frac{dP}{dN} = \frac{P'}{N'} = \frac{(cN-d)P}{(a-bP)N} = \frac{P}{a-bP}\frac{cN-d}{N},$$

17. Jokaisella $a, b \ge 0$ ja $\epsilon > 0$ pätee $ab \le \epsilon a^2 + b^2/(4\epsilon)$.



Kuva 4.1: Kuvauksen $x \mapsto x - \ln x$, $]0, \infty[\to \mathbb{R}$ kuvaaja

josta separoimalla muuttujat ja integroimalla

$$\int \Big(\frac{a}{P} - b\Big)\, dP = \int \Big(c - \frac{d}{N}\Big)\, dN. \tag{4.22}$$

Integrointi antaisi kummallekin puolelle logaritmin suureista, jotka eivät ole dimensiottomia[18], ts. niillä on jokin luvusta 1 eroava mittayksikkö. Niin ei saa käydä, joten muokataan integraalilausekkeita seuraavasti:

$$a \int \frac{1}{bP/a}\, d\Big(\frac{bP}{a}\Big) - b \int dP = c \int dN - d \int \frac{1}{cN/d}\, d\Big(\frac{cN}{d}\Big).$$

Integroimalla ja jakamalla a:llä saadaan

$$\frac{d}{a}\frac{cN}{d} + \frac{bP}{a} - \ln\bigg(\Big(\frac{cN}{d}\Big)^{d/a}\frac{bP}{a}\bigg) = C, \tag{4.23}$$

missä C on integrointivakio. Määritellään dimensiottomat suureet

$$u = \frac{cN}{d},\ v = \frac{bP}{a}, \tau = at \ \text{ ja } \ \alpha = \frac{d}{a}, \tag{4.24}$$

jolloin yhtälöstä (4.23) tulee

$$\alpha u + v - \ln(u^{\alpha} v) = C, \tag{4.25}$$

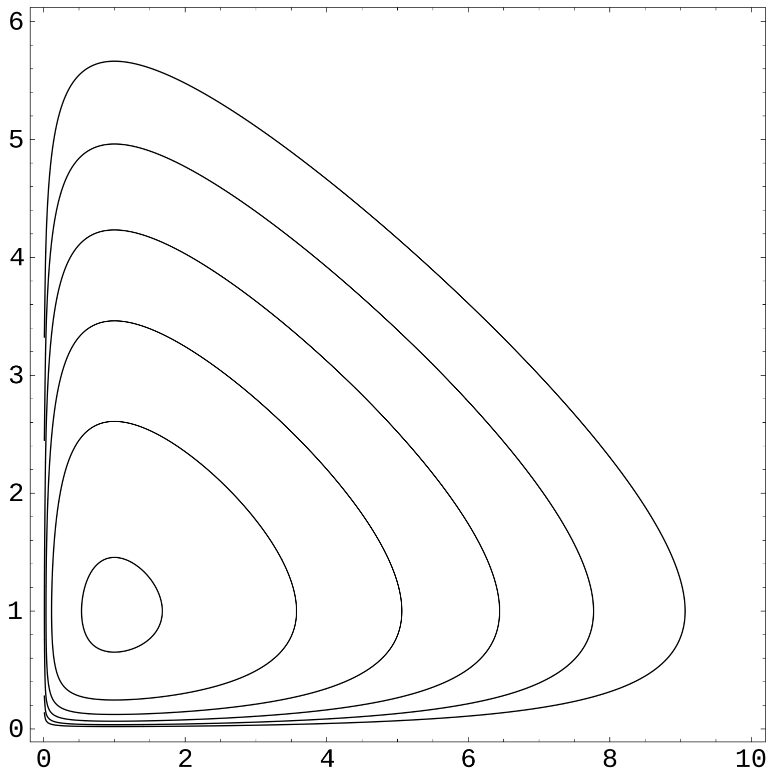
ja Lotkan-Volterran yhtälöt saavat asun

$$u'(\tau) = \big(1 - v(\tau)\big)u(\tau) \ \text{ ja } \ v'(\tau) = \alpha\big(u(\tau) - 1\big)v(\tau). \tag{4.26}$$

Yhtälön (4.23) vasemman puolen derivointi ja Lotkan-Volterran yhtälöiden sijoittaminen osoittavat jälleen, että separointimenetelmällä löydetty käyrä on todellakin faasikäyrä.

Perustellaan, että käyrä (4.25) on sulkeutuva. Jatkuva kuvaus $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ on välillä $]0, 1[$ aidosti vähenevä ja välillä $]1, \infty[$ aidosti kasvava, joten sen pienin arvo on $f(1) = 1$. Siten integrointivakio $C \geq \alpha + 1$. Toisaalta $C \to \infty$, jos $u, v \to \infty$, joten ylärajaa ei vakiolla C ole. Alkuehdot (4.21) määräävät vakion C; alkuarvoja N_0 ja P_0 vaihtelemalla C saadaan miksi hyvänsä luvuksi väliltä $[\alpha+1, \infty[$. Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, niin annetulle C ei voi olla $u \to \infty$ tai $v \to \infty$. Siten käyrä (4.25) on rajoitettu. Tarkemmat rajat saadaan muistamalla, että Lotkan-Volterran yhtälöillä on ratkaisu, joten faasikäyrällä on parametriesitys. Yhtälöistä (4.26) nähdään, että kuvaus u on suurimmillaan tai pienimmillään, kun $v = 1$.

18. Ks. Matemaattista biologiaa I.



Kuva 4.2: Lotkan-Volterran yhtälöiden faasikäyriä, kun $\alpha = 1/2$.

Silloin u on yhtälön $f(u) = (C-1)/\alpha$ ratkaisu. Niitä on kaksi, jos $C > 1+\alpha$, ja yksi, jos $C = 1+\alpha$. Näin saadaan väli $[u_{,}u_{+}] \subset [0,T]$, jonka u käy läpi ja jolla se pysyy. Välin sisällä v on yhtälön $f(v) = C - \alpha f(u)$ ratkaisu v:n suhteen. Koska $C > \alpha + 1$ ja $f(u) \geq 1$, niin ratkaisuja on tasan kaksi. Välin päätepisteissä $v = 1$, joten käyrä (4.25) on sulkeutuva. Sen kuvaajaa voidaan hahmotella vielä sen avulla, että jos u ja v ovat suuria, niin käyrä on likimain laskeva suora $\alpha u + v = C$. Jos taas u ja v ovat pieniä, käyrä on suunnilleen hyperbeli $uv =$vakio. Lauseen 4.2.4 nojalla Lotkan-Volterran yhtälön ratkaisu on *jaksollinen.*

Määritetään faasikäyrän pisteen $\big(u(\tau), v(\tau)\big)$ kiertosuunta. Sen pintanopeus on laskettava käyrän jonkin sisäpisteen suhteen[19]. Sopiva piste on $(1,1)$. Pintanopeus sen suhteen on

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \frac{1}{2}\big((u,v,0)-(1,1,0)\big) \times \big(u',v',0) = \frac{1}{2}(0,0,(u-1)v'-(v-1)u')\\ &= \frac{1}{2}\Big(0,0,\alpha(u-1)^2v + (v-1)^2u\Big),\end{aligned}$$

joka on samansuuntainen vektorin $(0,0,0)$ kanssa, joten piste $\big(u(\tau), v(\tau)\big)$ kiertää vastapäivään ajan τ kasvaessa. Samalla $\big(N(t), P(t)\big)$ kiertää vastapäivään ajan t kasvaessa.

Lotkan-Volterran yhtälöiden ratkaisu saadaan *likimäärin* stationaaristen pisteiden läheisyydessä linearisoimalla ne. Tarkastellaan ensin stationaarista pistettä $(0,0)$. Olkoon $N(t) \approx 0 \approx P(t)$. Silloin

$$N' = (a-bP)N = aN - bPN \approx aN \quad \text{ja} \quad P' = (cN-d)P = cNP - Pd \approx Pd.$$

Näiden ratkaisut ovat likimain[20]

$$N(t) \approx N(0)\,\mathrm{e}^{at} \quad \text{ja} \quad P(t) \approx P(0)\,\mathrm{e}^{-dt},\ t \in \mathbb{R}.$$

19. Aiemmin määriteltiin pintanopeus origon suhteen, joka oli silloisten käyrien sisäpiste.
20. Gronwallin epäyhtälön avulla voidaan laskea virhearvio.

Näin pienikin poikkeama origosta saa järjestelmän erkanemaan yhä kauemmaksi siitä. Siksi origo ei ole stabiili tasapainotila. Sama nähdään faasikäyrästä (4.23): Pieni poikkeutus origosta vie radalle, jossa ajoittain P ja N ovat hyvin suuria[21]. Tarkastellaan stationaarista pistettä $(N_\infty, P_\infty) = (d/c, a/b)$. Kun $N \approx N_\infty$ ja $P \approx P_\infty$,

$$\begin{aligned}
\big(N(t) - N_\infty\big)' &= (a - bP)N = \big(a - b(P - P_\infty) - bP_\infty\big)(N - N_\infty + N_\infty) \\
&= -b(P - P_\infty)(N - N_\infty + N_\infty) \approx -bN_\infty(P - P_\infty), \\
(P - P_\infty)' &= (cN - d)P = \big(c(N - N_\infty) + cN_\infty - d\big)(P - P_\infty + P_\infty) \\
&= c(N - N_\infty)(P - P_\infty + P_\infty) \approx cP_\infty(N - N_\infty).
\end{aligned}$$

Näiden yleinen ratkaisu on likimain[22]

$$N(t) - N_\infty \approx C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad \text{ja} \quad P(t) - P_\infty \approx \frac{\omega}{b}(C_1 \sin\omega t - C_2 \cos\omega t),$$

missä $\omega = \sqrt{ad}$. Näin stationaarinen piste (N_∞, P_∞) ei ole stabiili: $\big(N(t), P(t)\big)$ ei lähesty sitä, vaan kiertää sitä ikuisesti. Yleisemmin faasikäyrästä (4.23) nähdään, että järjestelmän häiritseminen sysää sen pysyvästi (seuraavaan häiriöön asti) toiselle faasikäyrälle eikä häiriö korjaannu ajan myötä. Lois-isäntäjärjestelmä muistaa täten alkutilansa ikuisesti. Tämä on merkittävä Lotkan-Volterran mallin puute. Luonnollisempi käyttäytyminen on sellainen, missä järjestelmä hakeutuu alkuarvoista riippumatta kohti jaksollisesti muuttuvaa tilaa[23]. Analogia tästä on pakotettu harmoninen oskillaattori, jonka liikeyhtälö on $mx'' = -kx - \mu\, x' + m f_0 \sin\hat\omega t$, missä $m, \mu, \omega, \hat\omega, f_0 > 0$. Vastaava differentiaaliyhtälöpari on

$$x' = \frac{1}{m}p \quad \text{ja} \quad p' = -kx - \gamma p + f_0 m \sin\hat\omega t,$$

missä $\gamma = \mu/m$ ja $\omega = \sqrt{k/m}$. Sen yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned}
x(t) &= \tilde A\, \mathrm{e}^{\tilde\gamma t} \sin(\tilde\omega t + \tilde\delta) + \hat A \sin(\hat\omega t + \hat\delta), \\
p(t) &= m\tilde A\, \mathrm{e}^{\tilde\gamma t} \big(\tilde\gamma \sin(\tilde\omega t + \tilde\delta) + \tilde\omega \cos(\tilde\omega t + \tilde\delta)\big) + m\hat\omega\hat A \cos(\hat\omega t + \hat\delta),
\end{aligned}$$

missä

$$\tilde\gamma = -\gamma/2 \quad \text{ja} \quad \tilde\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \gamma^2},$$

$\tilde A$ ja $\tilde\delta$ ovat alkuarvoista riippuvia integrointivakioita ja $\hat A$ ja $\hat\delta$ riippuvat suureista $\omega, \hat\omega, \gamma$ ja f_0. Faasikäyräksi tulee spiraali, joka lähestyy ellipsiä

$$x^2 + \frac{p^2}{(m\hat\omega)^2} = \hat A^2,$$

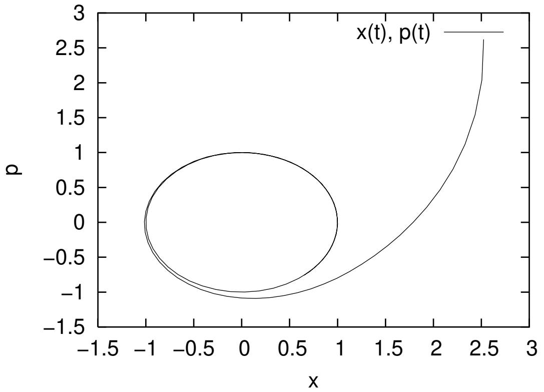
katso kuva 4.3. Näin Lotkan-Volterran malliin olisi lisättävä "kitkatermi", joka toimii kuten liikevastustermi $-\mu x'$ pakotetulle harmoniselle oskillaattorille. Yksi tällainen korjattu Lotkan-Volterran malli on

$$N' = \left(r\Big(1 - \frac{N}{K}\Big) - \frac{kP}{N + D}\right)N \quad \text{ja} \quad P' = s\Big(1 - \frac{hP}{N}\Big)P. \tag{4.27}$$

missä $r, k, K, D, s, h > 0$ ovat vakioita.

---

21. Tätä ei linearisoinnilla kyetä käsittelemään.
22. Virhearvio voidaan jälleen johtaa Gronwallin epäyhtälön avulla.
23. Toki sellainen riippuvuus alkutilasta saa olla, että jos isäntiä on alussa liian vähän, loiset kuolevat kokonaan.



Kuva 4.3: Pakotetun harmonisen oskillaattorin faasikäyrä

4.3 Harjoitustehtäviä

1. Määrää vektorimuotoisen differentiaaliyhtälön

$$(u,v)' = \omega(v,-u) =: \mathbf{f}(u,v),\ \omega \in \mathbb{R},$$

stationaariset pisteet eli ne $\mathbf{y}_\infty \in \mathbb{R}^2$, joilla $\mathbf{f}(\mathbf{y}_\infty) = 0$.

2. Hae alkuarvotehtävän

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

ratkaisu $\mathbf{y}(t,\mathbf{y}_0)$, kun $\mathbf{y}_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Vihje: differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on jo löydetty luennoissa.

3. Osoita, että ensimmäisessä tehtävässä löytämäsi stationaariset pisteet eivät ole lokaalisti stabiileja eli alkuarvotehtävän

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

ratkaisu $\mathbf{y}(t,\mathbf{y}_0)$ ei toteuta ehtoa

$$\|\mathbf{y}(t,\mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_\infty\| \to 0,\ \text{kun } t \to \infty \text{ ja } \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_\infty\| \le \delta,$$

millään $\delta > 0$.

4. Määrää vektorimuotoisen Lotkan-Volterran yhtälön stationaariset pisteet. Mahtaisivatko ne olla lokaalisti stabiileja?

5. Ratkaise differentiaaliyhtälöpari

$$u' = -u + v \text{ ja } v' = 2v - u.$$

6. Kirjoita edellisen tehtävän differentiaaliyhtälöpari vektori- ja matriisimuodossa.

7. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$y' = y^{1/3} \quad \text{ja} \quad y(0) = 0.$$

Mitä olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause 4.1.12 sanoo siitä?

8. Onko edellisen tehtävän alkuarvotehtävällä ratkaisu välillä $[0,\infty[$ ja onko se yksikäsitteinen? Vihje: separointimenetelmä.

9. Piirrä pääpiirteittäin $\phi\psi$-koordinaatistoon faasikäyrät

$$\psi^2 = \frac{2g}{l}\cos\phi + C$$

kun $C = -2g/l$, $C = 0$, $C = 2g/l$ ja $C = 4g/l$. Millaista heilurin liikkumista ne esittävät?

10. Piirrä uv-koordinaatistoon faasikäyrä, jonka parametriesitys on

$$u(t) = \sin t \quad \text{ja} \quad v(t) = 2\cos t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Merkitse kuvaan kiertosuunta parametrin t kasvaessa. Minkä epäautonomisen differentiaaliyhtälöparin faasikäyrästä on kyse?

11. Tarkastellaan lineaarista autonomista differentiaaliyhtälöparia

$$x' = -x - y \quad \text{ja} \quad y' = x - y. \tag{4.28}$$

Sen yleinen ratkaisu

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \ y(t) = \mathrm{e}^{-t}(-C_2 \cos t + C_1 \sin t),$$

välillä $\mathbb{R}$ löydetään derivoimalla ja sijoittamalla. Yhtälöparin (4.28) ratkaisuista kulkee pisteen $(1, 0)$ kautta se, joka toteuttaa alkuehdot $x(0) = 1$ ja $y(0) = 0$. Määrää se ja anna sen parametriesitys. Sulkeutuuko tuo faasikäyrä? Onko ratkaisu (x, y) jaksollinen? Piirrä faasikäyrä ja merkitse kuvaan kiertosuunta.

12. Jatketaan edellistä tehtävää. Siirry *napakoordinaatteihin* (r, ϕ), joille

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Mikä koordinaatti ϕ on samalla? Lausu kaikki faasikäyrät, jotka kulkevat pisteiden $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$, kautta napakoordinaateissa muodossa $r = g(x_0, \phi)$. Piirrä joitakin niistä.

Kirjallisuutta

[1] O. Martio ja J. Sarvas: *Tavalliset differentiaaliyhtälöt.* Yliopistopaino, Helsinki 1993. 244 s.

[2] J.D. Murray: *Mathematical Biology I. An Introduction*, kolmas laitos. Springer-Verlag, Berliini 2002. 551 s.

[3] J.D. Murray: *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*, kolmas laitos. Springer-Verlag, Berliini 2002. 811 s.

[4] N. Rouche ja J. Mawhin: *Ordinary Differential Equations. Stability and Periodic Solutions.* Pitman, Lontoo 1980. 260 s.