

MATEMAATTINEN BIOLOGIA 1

VELI-MATTI HOKKANEN

3. joulukuuta 2004

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Suoraan verrannollisuus	2
1.2	Logaritmiset asteikot	3
1.3	Allometrinen yhtälö	4
1.4	Pituus, pinta-ala, tilavuus ja massa	5
1.5	Similariteetti ja skaalaus	5
1.6	Harjoitustehtäviä	6
2	Dimensioanalyysiä	7
2.1	Esimerkki: yksinkertainen heiluri	7
2.2	Suureet ja mittayksiköt	8
2.3	Dimensiokuvaus	9
2.4	Dimensiohomogeenisuus	12
2.4.1	Perussuurejärjestelmästä toiseen siirtyminen	13
2.4.2	Dimensiohomogeenisuuden periaate	14
2.5	Buckinghamin π -teoreema	15
2.5.1	Buckinghamin π -teoreeman todistus.	19
2.6	Dimensioanalyysikone	20
2.7	Pienoismaalleista	21
2.8	Joitakin vakiintuneita π -lukuja	23
2.9	Huomioita dimensioanalyysistä	23
2.10	Harjoitustehtäviä	24
3	Erikokoisten eläinten fysiikkaa	28
3.1	Geometrinen ja dynaaminen similariteetti	28
3.2	Elastinen ja staattinen similariteetti	30
3.3	Juokseminen tasaisessa tai mäkisessä maastossa	32
3.4	Käveleminen ja hyppiminen	33
3.5	Ilmaliikunta	37
3.6	Vesiliikunnasta	39
3.7	Harjoitustehtäviä	41
4	Kleiberin laista	43
4.1	Fraktaaliputkisto	43
4.2	Fraktaalit pois	46
4.3	Fraktaalit takaisin	46
4.4	Harjoitustehtäviä	46

Luku 1

Johdanto

Jokainen ranskalainen tuntee Robert Desnos'n runon *Muurahainen*¹:

*Muurahainen hatukas,
kahdeksantoistametrikä.
Sitä ei ole, ei ole.
Muurahainen vie kärrit,
niillä ankat ja pingviinit.
Sitä ei ole, ei ole.
Muurahainen puhelee,
ranskaa, jaavaa ja latinaa.
Sitä ei ole, ei ole.
Äh! Miksi ei?*

Ihmistä ja muurahaista pidetään kumpaaakin sosiaalisena eläinlajina, jotka muodostavat yhteisöjä. Voisiko muurahaisvaltion kansalaisten elämänmeno olla samanlaista kuin ihmisillä? Fritz W. Went on vertaillut muurahais- ja ihmiseloa koon näkökulmasta käsin².

Pienin vakaa tulenliekki on muurahaista suurempi, joten Mikko Muurahaisen tulitikku tai savukkeensytytin toimisi kuin järeä liekinheitin. Muurahaistalon liesi olisi niin suuri ja tehokas, että hetkessä se korventaisi päivän aterian ja kokin. Ihmisille tuttuja työkaluja eivät muurahaiset voi käyttää: pienen vasaran liike-energia on liian pieni pikkunaulojen iskemiseen. Pienet keihäät, nuolet ja miekat eivät toimi metsästyksessä ja sodankäynnissä samasta syystä. Muurahaisarmeijan aseistuksen on oltava toisenlainen kuin hakkapeliitoilla tai Rooman legioonilla³.

Muurahaiskoon kirjat tai sanomalehdet eivät avaudu, koska molekyylien väliset voimat sitovat piskuiset sivut lujasti yhteen. Toisaalta muurahaisen pieneen päähän ei mahdu riittävästi aivosoluja kirjojen lukemiseen. Muurahaiset eivät voi peseytyä vedellä, sillä suihkun pisarat ovat niin suuria, että ne iskisivät muurahaiseen kuin kivenjärkele. Yhdessä vesipisarassa kylpeminen ei onnistu, sillä muurahaisen kitiinkuori hylkii vettä. Ja jos muurahainen olisi päässytkin vesipisaran sisään, niin veden pintajännitys tekisi sieltä ulospääsyn vaikeaksi⁴. Samoista syistä muurahaiset eivät voi syödä keittoja.

Toki muurahaiset pystyvät sellaiseen, mihin ihmisistä ei ole. Ne nostavat vaitta taakkoja, jotka ovat niitä 10 kertaa painavampia. Sukua jatkamaan parveilevat muurahaiset lentävät kömpelöin siivin, jotka eivät ihmistä kannattelisi. Korkealta putoaminen ei ole muurahaisille vaarallista, toisaalta siksi muurahaisen on ihmistä vaikeampi riistää henki itseltään.

Muurahaisen massa on lajista riippuen⁵ $10\ \mu\text{g} - 1\ \text{g}$, joten ihmisen ja muu-

1. *La fourmi*. Chantefables et Chantefleurs, Editions Gründ.

2. F.W. Went, *The size of man*, American Scientist, **56**, 400–413.

3. Muurahaiset ruiskuttavat takaruumissaan olevasta rauhasesta muurahaishappoa vastustajan tai saaliin päälle. Toinen muurahaissoturin taistelukeino on repiä vahvoilla leuoillaan vastustajan raajat irti.

4. Muurahaiset peseytyvät sylkensä avulla. Tahransuihkutukseen ne voivat käyttää muurahais-happoa.

5. Japanissa elävä oligomyrmex yamatonis vs. länsiafrikkalainen vaeltajamuurahainen.

rahaisten massojen suhde on 10^{10} – 10^5 . Luku ei ole erikoinen eläinkunnassa. Suurin koskaan maapallolla elänyt eläin on sinivalas, jonka massa on 100 000 kg ja pituus 20 m. Pienin toimiva organismi⁶ on bakteeri, joka aiheuttaa keuhkokuumeen. Sen pituus on $0,2 \mu\text{m}$, joten sen massa on likimain 10^{-20} kg. Näiden massojen suhde on tähtitieteellinen⁷ luku 10^{25} . Pienet ja suuret eliöt elävät erilaisissa maailmoissa. Bakteerit eivät tunne painovoimaa tai hitausvoimia, mutta ovat molekyylien lämpöliikkeen ja nesteiden viskositeetin armoilla. Arkhimedeen lain ansiosta painovoima ei haittaa valaita, mutta muuten niiden potkaisuista ja liu'uista koostuva uinti perustuu hitausvoimiin. Suurille ja keskikokoisille maa- ja ilmaeläimille gravitaatio on oleellinen niiden liikkumista rajoittava tekijä. Massiivisin tunnettu itse kehoaan kannatellut maaeläin on brachiosaurus (massa 80 000 kg). Nykyisistä maalla elävistä nisäkkäistä suurin on afrikkalainen norsu (5000 kg), pienin puolestaan parin gramman päästäinen. Eläinten koko ja massa siis vaihtelevat laajasti. Kuitenkin monet niiden morfologiset ja fysiologiset suuret noudattavat samoja lainalaisuuksia pienimmästä suurimpaan. Näiden riippuvuuksien tutkimiseen liittyvät *allometria*, *similariteetti* ja *skaalaus*.

1.1 Suoraan verrannollisuus

Hooken laki jouselle sanoo, että jousen venyttämiseen tarvittava voima F on *suoraan verrannollinen* jousen venymään l eli $F = kl$, missä $k > 0$ on jouselle ominainen vakio. Kääntäen *verrannollisuudella* tarkoitetaan suoraa verrannollisuutta käänteislukuun. Esimerkiksi äänenvoimakkuus W etäisyydellä l äänilähteestä on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön eli $W = \gamma/l^2$, missä $\gamma > 0$ on äänilähteelle ominainen vakio. Yleistetään suoraan verrannollisuuden käsite:

1.1.1 Määritelmä. Olkoot A ja B saman vektoriavaruuden vektoreita. Vektori A on suoraan verrannollinen vektoriin B eli $A \propto B$, jos $A = kB$, missä $k > 0$ on vakio.

Huomataan, että suoraan verrannollisuus on ekvivalenssirelaatio eli se on refleksiivinen⁸, symmetrinen⁹ ja transitiivinen¹⁰.

1.1.2 Esimerkki. Muurahainen kirvesmiehenä. Tarkastellaan tarkemmin, miksi muurahaiset eivät voi naulata. Energia W_n , joka tarvitaan naulan puuhun lyömiseen, on likimain ja vähintään energia W_H , joka tarvitaan naulan kokoisen kolon puristamiseen puuhun. Olkoon naula poikkileikkaukseltaan suorakaide, l naulan pituus ja b leveys. Hooken lain¹¹ mukaan voima F_s , jolla naula painuu poikittain syvyydelle, s on suoraan verrannollinen pinta-alaan lb ja painumaan s eli $F_s = \sigma l b s$, missä $\sigma > 0$ on puulle ominainen kimmokerroin. Näin ollen

$$W_H = 2 \cdot \int_0^{b/2} F_s ds = \sigma l b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \sigma l b^3.$$

Koska naulan leveys on suoraan verrannollinen sen pituuteen, niin $W_n \propto l^4$.

Kirvesmiehen vasaran liike-energia on $W_v = \frac{1}{2}mv^2$, missä m on vasaran massa ja v nopeus. Havainnoista on selvää, että muurahaiset liikuttavat raajojaan hitaammin kuin ihmiset. Karkeasti siis $v \propto l$. Tämä johtuu liikevastuksista¹². Koska

6. Siis ei virus.

7. Maan etäisyys Auringosta on vain $1,5 \cdot 10^{11}$ m; Maan ja ihmisen massojen suhde on 10^{22} .

8. Jokaiselle vektorille A pätee $A \propto A$.

9. Jos $A \propto B$, niin $B \propto A$.

10. Jos $A \propto B$ ja $B \propto C$, niin $A \propto C$.

11. Tässä viitataan jatkuvasti jakautuneen aineen Hooken lakiin, josta seuraavat jousien ja kuminauhojen Hooken laki.

12. Johdetaan riippuvuus $v \propto l$. Tarkastellaan putoavaa vasaraa, jonka liikeyhtälö on $mv' = mg - \alpha l^2 v$. Sen oikean puolen ensimmäinen termi tulee painovoimasta ja toinen termi ilmanvastuksesta, joka on suoraan verrannollinen nopeuteen ja poikkileikkauspinta-alaan. Kerroin α on positiivinen. Vasaran nopeus kasvaa kohti arvoa v_∞ , jolle liikeyhtälön oikea puoli on nolla. Siis $v_\infty = mg/\alpha l^2 \propto l$, sillä $m \propto l^3$.

pituus	eliö	ihmisen laite
10 km		erittäin pitkä silta
1 km		erittäin pitkä tavarajuna
100 m	pisimmät puut	suuri laiva
10 m	suurimmat kalat	kuorma-auto
1 m	ihmislapsi	auton moottori
100 mm	suurin hyönteinen	herätyskello
10 mm	pienimmät kalat	pienimmät rannekellot
1 mm	pienimmät hyönteiset	pienimmät mekanismit
100 μm	kasvisolut	
10 μm	eläinsolut	
1 μm	bakteerit	
100 nm	virukset	

Taulukko 1.1: Eliöiden ja laitteiden koot logaritmisella asteikolla

$m \propto l^3$, niin $W_v \propto l^5$. Kun l pienenee, ei vasaran liike-energia riitäkään naulan lyömiseen. Ei ole muurahaisesta kirvesmieheksi.

1.1.3 Esimerkki. *Muurahainen lautapoikana.* Tarkastellaan tarkemmin, millaisia taakkoja eri kokoiset eläimet voivat nostaa. Olkoon eläimen pituus l . Sen lihasvoima F_l on suoraan verrannollinen lihassolujen määrään, joka on suoraan verrannollinen lihaksen poikkipinta-alaan, joka on suoraan verrannollinen eläimen pituuden neliöön¹³. Siis $F_l \propto l^2$. Taakan F_t lisäksi eläimen on nostettava oma painonsa $F_g = mg$, missä m on eläimen massa. Siis $F_l = F_g + F_t$. Koska $m \propto l^3$, niin

$$\frac{F_t}{F_g} = \frac{F_l - F_g}{mg} = k_1 l^{-1} - k_2,$$

missä k_1 ja $k_2 > 0$ ovat positiivisia vakioita. Näin pienet eläimet nostavat suurempia taakkoja painoonsa nähden kuin suuret. Jättimäiset eläimet eivät jaksa nostaa edes omaa ruhoaan. On muurahaisesta lautapoikaksi.

Edellisessä esimerkissä voisi verrannollisuuskertoimen k_1 olla periaatteessa niin pieni, että vasta rajalla $l \rightarrow 0+$ ensimmäinen termi tulisi merkittäväksi. Luonnossa kuitenkin verrannollisuuskertoimet ovat noin 1, ei esimerkiksi $1000^{1000^{1000}}$. Alaluvussa 1.4 on laskettu joitakin konkreettisia verrannollisuuskertoimia.

1.2 Logaritmiset asteikot

Tavallisella aritmeettisella eli lineaarisella asteikolla on hankala tai mahdoton esittää tähtitieteellisesti muuttuvia suureita. Jos halutaan piirtää samaan kuvaan esimerkiksi eliön ravinnontarve sen massan funktiona pienimmästä bakteerista sinivaahtaan, ei se onnistu aritmeettisella mitta-asteikolla käyttäen. Sen sijaan *geometrisella* eli *logaritmisella* asteikolla se käy päinsä. Tavallisin logaritminen asteikko on sellainen, jossa suureen arvon kymmenkertaistuminen vastaa yhden askeleen siirtymistä asteikolla. Havainnollistetaan logaritmista asteikkoa sekä eliöiden ja ihmisen rakentamien laitteiden kokoeroja taulukolla 1.1.

Suureiden riippuvuuksia toisistaan havainnollistetaan piirtämällä niiden kuvaajia millimetripaperille (aritmeettinen asteikko kummallakin suureella), kokologaritmpaperille (logaritminen asteikko kummallakin suureella) tai puolilogaritmpaperille, jossa toisella akselilla on aritmeettinen asteikko ja toisella logaritminen.

13. On havaittu, että hyönteisten lihassolut ovat yhtä vahvoja kuin nisäkkäiden. Ks. Wigglesworth 1972.

Puolilogaritmisella esityksellä on yksi merkittävä etu. Monet luonnon lainalaisuudet ovat eksponentiaalisia. Esimerkiksi puun luonnollinen kasvu noudattaa lakia

$$M(t) = M_0 e^{\alpha t} \text{ kaikilla } t \geq 0, \quad (1.1)$$

missä M_0 ja α ovat positiivisia vakioita ja $M(t)$ esittää puun massaa hetkellä t . Kun mitataan puun massa kunakin ajanhetkenä, merkitään mittauspisteet puolilogaritmipaperille (aika-asteikko aritmeettinen, massa-asteikko logaritminen) ja piirretään niiden kautta käyrä, niin syntyy nouseva suora, jonka kulmakerroin on α ja joka leikkaa M -akselia pisteessä M_0 .

Jos puun massa siinä pesivien rastaiden määrän $R(t)$ funktiona noudattaa potenssikaavaa

$$M = aR^b, \quad (1.2)$$

missä $a > 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, niin kokologaritmipaperille on käyttöä. Piirretään siihen havaintopisteet (R, M) ja niiden kautta käyrä, jolloin syntyy suora, jonka kulmakerroin on b . Miksi näin käy, selviää ottamalla yhtälöstä (1.2) puolittain logaritmi ja soveltamalla logaritmien laskusääntöjä:

$$\lg M = \lg(aR^b) = \lg a + b \lg R.$$

1.3 Allometrinen yhtälö

Allometrialla tarkoitetaan eliöiden muodon erilaisuutta. Nimitys tulee klassisen kreikan sanasta *allaios*, joka tarkoittaa erilaista. Jo Galilei totesi suurempien maa-eläimien tarvitsevan suhteellisesti tukevammat luut ja raajat kuin niitä pienemmillä eläimillä on. J. Huxley arveli¹⁴, että toisistaan riippuvat biologiset suuret $S, M_1, M_2, \dots, M_n$ noudattavat potenssiyhtälöä

$$S = aM_1^{b_1} M_2^{b_2} \dots M_n^{b_n}, \quad (1.3)$$

missä $a > 0$ ja $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Tällaisia yhtälöitä sanotaan *allometrisiksi*. Jos toisistaan riippuvia suureita on vain kaksi, S ja M , niin allometrinen yhtälö on silloin

$$S = aM^b, \quad (1.4)$$

missä $a > 0$ ja $b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. *Johdetaan*¹⁵ tämä yhtälö. Oletetaan, että suuret S ja M ovat ajan funktioita ja ne noudattavat luonnollista kasvua eli pätee

$$M'(t) = cM(t), \quad S'(t) = dS(t) \text{ kaikilla } t > 0, \quad (1.5)$$

missä $c, d \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Näiden differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut ovat

$$M(t) = M_0 e^{ct}, \quad S(t) = S_0 e^{dt} \text{ kaikilla } t \geq 0, \quad (1.6)$$

missä M_0 ja S_0 ovat vakioita, jotka määräytyvät suureiden M ja S arvoista hetkellä $t = 0$ eli $M_0 = M(0)$ ja $S_0 = S(0)$. Yleisistä ratkaisuksista (1.6) saadaan, että allometrinen yhtälö (1.4) pätee, kun

$$a = \frac{S_0}{M_0^b} \text{ ja } b = \frac{d}{c}. \quad (1.7)$$

Yllä olevan johdon oletuksia voidaan lieventää sallimalla kasvuyhtälöiden verrannollisuuskertoimien riippua ajasta. Silloin riittää ja on välttämätöntä olettaa, että $d(t) = b c(t)$ melkein kaikilla $t > 0$, jolloin

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = d(t) = b c(t) = b \frac{M'(t)}{M(t)}$$

14. J. Huxley: *Problems of relative growth*. Methuen, Lontoo 1932.

15. Huomaa todistamisen ja johtamisen ero. Luonnonlakeja ei voi todistaa.

melkein kaikilla $t > 0$. Ketjusäännön nojalla saadaan

$$\ln S(t) = \ln a + b \ln M(t) = \ln a M(t)^b \text{ kaikilla } t \geq 0,$$

missä $a > 0$ on vakio. Vielä niukemmilla oletuksilla johto onnistuu, jos tyydytään allometriseen yhtälöön vain täysikasvuksille eliöille, jolloin likimain voidaan käyttää kasvuyhtälöiden ratkaisujen asymptoottisia arvoja, kun $t \rightarrow \infty$.

Allometrisen yhtälön (1.4) toteutumisen tutkimisessa on jälleen kokologaritmipaperille käyttöä, sillä (1.4) on samaa muotoa kuin yhtälö (1.2).

Kasvuun liittyvien ilmiöiden lisäksi allometriset yhtälöt kuvaavat hyvin muidenkin biologisten suureiden riippuvuuksia. Dimensioanalyysiä käsittelevässä luvussa johdetaan allometrisiä yhtälöitä ilman kasvuyhtälöitä.

1.4 Pituus, pinta-ala, tilavuus ja massa

Eliön kokoa voidaan arvioida kaikilla otsikon neljällä suureella. Kuitenkin kaikkien tuntemiemme eliöiden tiheys on likimain sama kuin puhtaan veden eli 1 kg/l, joten massan ilmoittaminen tilavuuden lisäksi ei anna lisää tietoa. Merkitään eliön pituutta l , pinta-alaa A ja tilavuutta V . Jos eliö on pallonmuotoinen, niin sen pituus on pallon halkaisija,

$$A = 4\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \pi l^2 \text{ ja } V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}l^3. \quad (1.8)$$

Mato, käärme ja ihminen ovat muodoltaan sukua toisilleen eli likimain lieriöitä. Merkitään niiden paksuutta eli halkaisijaa d . Silloin

$$A = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\pi\frac{d}{2}l \text{ ja } V = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l = \frac{1}{4}d^2 l. \quad (1.9)$$

Lieriönmuotoisten eläimien pituus ja paksuus eivät kuitenkaan ole toisistaan riippumattomia, vaan pätee karkean likimain $l = 6d$, kunhan laulujen naiset ja muut vastaavat jätetään huomiotta¹⁶. Tällöin kaavoista (1.9) saadaan

$$A = \frac{13\pi}{72}l^2 \text{ ja } V = \frac{\pi}{144}l^3. \quad (1.10)$$

Lieriön lisäksi voisimme tarkastella muitakin muotoja ja laskea lausekkeet pinta-alalle ja tilavuudelle. Silloin saisimme yleisesti, että pinta-ala on suoraan verrannollinen pituuden neliöön ja tilavuus sen kuutioon eli $A \propto l^2$ ja $V \propto l^3$. Verrannollisuuskertoimet vaihtelevat muodon mukaan kuten kaavoista (1.8) ja (1.10) nähdään.

Eliön pituus vaikuttaa ratkaisevasti sen liikkumiseen. Pinta-ala on tärkeä eliön lämpötaloudessa: lämpövirta eliöstä on suoraan verrannollinen eliön pinta-alaan. Perusaineenvaihdunnan lämmöntuoton tehon on mitattu olevan suoraan verrannollinen eliön tilavuuden potenssiin $3/4$, joten samassa ilmastossa lämmönjohdavuudeltaan samanlaisen turkin tulee olla suurilla eläimillä ohuempi kuin pienillä.

1.5 Similariteetti ja skaalaus

Tarkastellaan kahta lieriötä, joista ensimmäisen pituus ja halkaisija ovat l_1 ja d_1 . Toisen lieriön pituus ja halkaisija ovat l_2 ja d_2 . Näitä lieriöitä sanotaan *geometrisesti similaareiksi* eli *geometrisesti samankaltaisiksi*, jos $d_1/l_1 = d_2/l_2 = \alpha$. Tällöin ensimmäisen lieriön mittojen avulla voidaan valmistaa toisen lieriön kaksoiskappale

16. A. Aimo, *Iso-lita*; Leevi and the Leavings, *Sopivasti lihava*. Mainittiin jo allometrisen yhtälön (1.4) johdon jälkeen, että jos kasvu ei ole luonnollista eli eksponentiaalista kasvua, niin silloin voidaan tarkastella vain täysikasvuksia yksilöitä. Samoin on jätettävä merkittävästi lihavat ihmiset ja eläimet tarkastelun ulkopuolelle tai sitten katsottava heidän vararavintonsa lisätaakaksi ja -lämmöneristykseksi.

kertomalla ne luvulla α eli *skaalaamalla*. Jos nämä lieriöt ovat umpinaisia ja niiden lämpötila on sama, sanotaan niitä termisesti similaareiksi. Jos oleellisia lämpötiloja on kaksi, niin terminen similaarisuus vaatii lieriön 1 lämpötilojen suhteen olevan saman kuin lieriön 2 lämpötilojen suhteen. Täydellinen similaarisuus on similaarisuutta kaikkien järjestelmissä vaikuttavien suureiden suhteen. Sellainen ei kuitenkaan ole yleensä mahdollista, sillä tiedetään, että erikokoiset, geometrisesti samankaltaiset heilurikellot käyvät eri tahtiin. Siksi samankaltaisuudesta puhuttaessa on tarkasteltava suure mainittava.

1.6 Harjoitustehtäviä

- Oletetaan, että eläimen tilavuus on suoraan verrannollinen sen pituuden kolmanteen potenssiin ja pinta-ala pituuden toiseen potenssiin eli $V \propto l^3$ ja $A \propto l^2$. Osoita, että eläimen pinta-ala on suoraan verrannollinen sen tilavuuden potenssiin $2/3$ eli $A \propto V^{2/3}$.
- Selitä valaiden ajautumista meren rantaan. Olkoon l eläimen pituus. Oletetaan valaiden noudattavan kaloille havaittua kestouinnin nopeusriippuvuutta $v \propto \sqrt{l}$. Laske täyttä vauhtia uivan eläimen pysähtymismatkan s verrannollisuuslauseke (muotoa $s \propto l^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$) olettamalla, että eläin käyttää jarruttamiseen kaiken lihasvoimansa $F_l \propto l^2$. Muista liikeyhtälö $ma = -F_l$, tasaisesti hidastuvan liikkeen kaava $s = -v^2/(2a)$ ja kaava $m \propto l^3$.
- Tarkastellaan eläimen turkin paksuutta h . On mitattu, että hyvin tarkasti eläinten lämmöntuoton teho Q_e on suoraan verrannollinen eläimen tilavuuden potenssiin $3/4$ eli $Q_e \propto V^{3/4}$. Toisaalta lämpövirta Q_v eläimen turkin läpi noudattaa lämmönjohtumislakia

$$Q_v = Ak \frac{\theta_e - \theta_u}{h},$$

missä $k > 0$ on turkin lämmönjohtavuuskerroin, θ_e on eläimen lämpötila ja θ_u on ulkolämpötila. Kaikki nuo kolme suuretta ovat samat tarkastelussamme, joten $Q_v \propto A h^{-1}$. Osoita lämmön säilymisen periaatteesta $Q_e = Q_v$ lähtien, että $h \propto l^{-1/4}$.

- Testaa edellisessä tehtävässä osoittamaasi tulosta havainnoillasi eläinten turkeista ja ihmisten pukeutumisesta. Millä selität poikkeamia?
- Piirrä paperille kaksi geometrisesti similaaria, erikokoista kolmiota ja lumiakkaa.
- Määritä graafisesti kuvauksen $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ lauseke $f(x)$, kun sen arvoiksi on mitattu:

(a)

x	$y = f(x)$
1	1,0
2	2,8
3	5,2
4	8,0
5	11,2
6	14,7

(b)

x	$y = f(x)$
1	7,4
2	54,6
3	403
4	2 980
5	22 030
6	163 000

Luku 2

Dimensioanalyysiä

Jos tunnetaan fysikaaliseen järjestelmään liittyvät suureet, tiedetään implisiittisesti jo jotain siitä, miten nämä suureet riippuvat toisistaan. Menetelmää, jolla tämä tieto saadaan esiin, kutsutaan *dimensioanalyysiksi*. Se on hyödyllinen ja laajasti käytetty menetelmä erityisesti virtausdynamikassa, mutta sitä voidaan soveltaa kaikilla tieteenaloilla, joissa käytetään *suureita*. Toisaalta dimensioanalyysi —oikeammin käsitteet suure, mittaluku, mittayksikkö ja dimensio— ovat yksi tieteellisen teorian osa, jonka mukanaolo on tehtävä eksplisiittiseksi viimeistään silloin kun teoria aksiomatisoidaan. Tässä tekstissä tutustutaan dimensioanalyysiin sekä näppäränä mallintamisen apukeinona että tieteellisen teorian osasena.

2.1 Esimerkki: yksinkertainen heiluri

Tarkastellaan heiluria, jonka heilahdusaika on P sekuntia, langan pituus on l metriä ja punnuksen massa on m kilogrammaa. Heiluri on tasaisessa gravitaatiokentässä, jossa vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys on g . Heilahduskulma olkoon pieni, joten oletetaan, että mitkään muut tekijät eivät heilahdusaikaan vaikuta eli

$$P = f(m, l, g), \quad (2.1)$$

missä f on jokin tuntematon kolmen reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio. Käytetään massan, ajan ja pituuden *mittayksikköinä* SI-yksikköjä kg, s ja m. Mutta se on vain mielivaltainen valintamme: yhtä hyvin voitaisiin käyttää näiden *perussuureiden* yksikköinä leiviskää, lasia ja syltä tai mitä hyvänsä niiden monikertaa. Heilurin käyttäytyminen ei muutu, vaikka vaihdettaisiin perussuureiden mittayksiköt toisiksi. Jos esimerkiksi massan mittayksikkö on kilogramman sijasta leiviskä, on massan *mittaluku* jaettava kymmenellä: Villen massa on 60 kg eli 6 leiviskää.

Vaihdetaan perussuureiden massa, pituus ja aika mittayksiköt kg, m ja s niiden monikerroiksi μ kg, λ m ja τ s, missä $\lambda, \mu, \tau > 0$ ovat *mielivaltaisista*. Silloin heilahdusajan mittaluku P on jaettava luvulla τ , punnuksen massan mittaluku m luvulla μ ja langan pituuden mittaluku l luvulla λ . Vakion g mittayksikkö on m/s^2 SI-yksiköissä, joten sen mittaluku on jaettava luvulla λ/τ^2 . Koska mittayksikköjen muuttaminen ei saa muuttaa heilurin käyttäytymistä, ei sitä kuvaavan yhtälönkään tule muodoltaan muuttua. Siis

$$\tau^{-1}P = f(\mu^{-1}m, \lambda^{-1}l, \lambda^{-1}\tau^2g) \text{ kaikilla } \lambda, \mu, \tau > 0. \quad (2.2)$$

Valitaan nyt $\mu = m$, $\lambda = l$ ja $\tau = \sqrt{l/g}$, jolloin

$$P\sqrt{\frac{g}{l}} = f(1, 1, 1) = C \text{ eli } P = C\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.3)$$

missä C on jokin vakio. Sen arvo jäi nyt määräämättä, mutta jos mittaamme yhden yksinkertaisen heilurin heilahdusajan ja langan pituuden, saamme kaavasta (2.3)

laskettua vakion C ja niin meillä on yleinen kaava kaikille yksinkertaisille heilureille. Tässä tapauksessa tiedämme heilurin liikeyhtälön ja osaamme sen ratkaistakin (jolloin saamme, että $C = 2\pi$), mutta merkittävää on, että (2.3) saatiin *ilman* tietoa tai oletuksia Newtonin laeista¹. Huomaa, että heilurin heilahdusajan lauseke $P = Cl^{1/2}g^{-1/2}$ on potenssitulo eli saatiin allometrinen yhtälö.

2.2 Suureet ja mittayksiköt

Tarkastellaan tavallista (massapisteiden) mekaniikkaa. Siinä suureet riippuvat toisistaan seuraavan kaltaisten yhtälöiden kautta:

$$F = ma, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{tai} \quad W = \int_0^t F(x) dx. \quad (2.4)$$

Tavallisesti mekaniikassa pidetään *perussuureina* kappaleen massaa, pituutta ja aikaa. Niiden avulla määritellään muut suureet kuten keskimääräinen nopeus $\bar{v}$ ajanhetkien t_0 ja t_1 välillä ja (hetkellinen) nopeus $v(t)$: jos $s(t)$ on kappaleen sijainti (tai kulkema matka) hetkellä t , niin

$$\bar{v} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \quad \text{ja} \quad v(t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{s(\tau) - s(t)}{\tau - t}.$$

Perussuureita ei määritellä². Tavallisia mekaniikan perussuureita merkitään M , L ja T samassa järjestyksessä kuin yllä, ja niiden joukkoa $\{M, L, T\}$ sanotaan *perussuurejärjestelmäksi*.

Yllä käsiteltiin mekaniikan eri suureiden välisiä suhteita. Entä suureen sisäinen rakenne? Tarkastellaan koululuokan terveystarkastusta, jossa oppilaat muun muassa punnitaan. Vaaka on digitaalinen, ja nappia painalla voi vaihtaa vaa'an massayksikön kilogrammasta paunoiksi tai takaisin. Jos massayksikkö vaihdetaan toiseksi, muuttuu vaa'an näyttämä numeroarvo. Näin ollen oppilaan massaa esittää³ *kahden* muuttujan kuvaus

$$m: B \times U_M \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

missä B on luokan oppilaiden joukko ja U_M massayksiköiden joukko. Edelleen tällä kuvauksella on seuraava ominaisuus:

$$m(b, \mu u) = \mu^{-1} m(b, u) \quad \text{kaikilla } b \in B, \quad u \in U_M \quad \text{ja} \quad \mu > 0.$$

Massayksiköiden joukossa on siis oltava määritelty positiivisella reaaliluvulla μ kertominen eli μ -monikerran ottaminen massayksiköstä.

Jokainen fysiikan teoria⁴ T sisältää (äärettömän) joukon Q_T *suureita*, jotka riippuvat toisistaan kaavan (2.4) kaltaisten yhtälöiden kautta. Teorian T *perussuureiden* joukoksi Q_T^0 sanotaan niiden teoriassa T määrittelemättömien suureiden joukkoa, joiden avulla muut teorian T suureet määritellään. Jokainen fysikaalinen järjestelmä luonnehditaan reaaliarvoisten funktioiden avulla. Jos $A_1, A_2, \dots, A_n$

1. Voidaan luopua oletuksesta, että heilurin heilahduskulma on pieni. Käyttämällä heilahduskulman mittayksikkönä kiinteästi radiaaneja saadaan massa-, pituus- ja aikayksiköitä vaihtelemalla, että $P = g(\phi_0)\sqrt{l/g}$, missä g on tuntematon positiivinen kuvaus ja $\phi_0 \in]0, \pi[$ heilurin heilahduskulma ääriasennossaan. Heilurin liikeyhtälöä ei osata ratkaista, mutta silti siitä voidaan ratkaista heilahdusaika P , jolloin nähdään, että

$$g(\phi_0) = \sqrt{2} \int_0^{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \phi - \cos \phi_0}} d\phi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2. Oikeammin: niitä ei määritellä eksplisiittisesti. Mekaniikka kokonaisuutena teorianakennelmana määrittelee implisiittisesti myös perussuureensa, ks. Mario Bunge, *Philosophy of Physics*. Reidel, Dordrecht 1973.

3. Esittää-verbin käytön takana on pyrkimys noudattaa tieteellistä realismia, jonka mukaan kappaleen massa ei *ole* kuvaus m , vaan abstraktio m esittää todellisuuden oliota tai olion ominaisuutta.

4. Fysiikka koostuu *eri* teorioista kuten klassinen mekaniikka, sähköoppi, lämpöoppi, suppea suhteellisuusteoria, yleinen suhteellisuusteoria, ..., ks. Bunge, m.t..

suure	dimensio	perustelu	yksikkö
nopeus	$LT^{-1} = M^0LT^{-1}$	$v = s/t$	m/s
kiihtyvyys	$LT^{-2} = M^0L^1T^{-2}$	$a = v/t$	m/s ²
voima	$M^1L^1T^{-2}$	$F = ma$	N=kg m/s ²
energia	$M^1L^2T^{-2}$	$W = \frac{1}{2}mv^2$	J=Nm
työ	$M^1L^2T^{-2}$	$W = Fl$	J=Nm
teho	$M^1L^2T^{-3}$	$P = W/t$	W=J/s
taajuus	$T^{-1} = M^0L^0T^{-1}$	$\nu = 1/t$	Hz=1/s
pinta-ala	$L^2 = M^0L^2T^0$	$A = \pi r^2$	m ²
paine	$M^1L^{-1}T^{-2}$	$p = F/A$	Pa=N/m ²

Taulukko 2.1: Joidenkin mekaniikan suureiden dimensiot perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$ ja yksiköt SI-järjestelmässä.

ovat fysikaalisen järjestelmän piirteitä (atomeja, magneettikenttiä, nopeuksia, ...), niin on olemassa epätyhjä joukko U_P ja kuvaus

$$P: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times U_P \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (2.5)$$

siten että tämä kuvaus kuvaa jokaisen joukon $A_1 \times \dots \times A_n$ alkion tiettyä ominaisuutta. Kuvausta P sanotaan *mittaluvuksi* ja joukkoa U_P *P-mittayksiköiden* joukoksi. Funktion P arvo riippuu mielivaltaisesta mittayksiköstä $u \in U_P$ siten, että

$$P(a, \lambda^{-1}u) = \lambda P(a, u) \text{ kaikilla } a \in A_1 \times \dots \times A_n, u \in U_P, \lambda > 0. \quad (2.6)$$

Suureen ei tarvitse olla mitattavissa: riittää, että sitä kuvaa positiiviarvoinen funktio, jolla on ominaisuudet (2.5)-(2.6) ja jota kutsutaan mittaluvuksi. Lukija pohtinee, mikä tavallisissa ilmauksissa $F = ma$ ja $m = 60 \text{ kg}$ esiintyvät m tai kg ovat. Lyhin vastaus on sanoa, että $F = ma$ on mittalukuyhtälö, joka sitoo voiman, massan ja kiihtyvyyden mittaluvut. Yksiköt ovat käsitteellisiä konstruktioita: voisimme sopia, että kilogramma on $(1, 0, 0)$ ja leiviskä on $(10, 0, 0)$; ne olisivat tällöin siis vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ alkioita, jolloin yksiköstä toiseen siirtymisen vaatima monikerran ottaminen olisi määritelty.

2.3 Dimensiokuvaus

Tarkastellaan tavallista mekaniikkaa, kun perussuurejärjestelmä on $\{M, L, T\}$. Koulussa opetetaan testaamaan fysikaalisen ongelman ratkaisun oikeellisuutta sillä, onko kaavoissa oikealla ja vasemmalla puolella samat "laadut", onko kysyttyä kiihtyvyyttä laskettaessa saatu vastaukseksi edes jotakin, jonka yksikkö on m/s². Edellisen jakson lopussa sanottiin, että mekaniikan mittayksiköitä voitaisiin pitää kolmi-dimensioisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreina. Silloin mekaniikan suure on sekin kolmiulotteisen vektoriavaruuden vektori, ja tuttu ympyrän pinta-alan kaava $A = \pi r^2$ on vektoreiden välinen yhtälö, joka toteutuu täsmälleen silloin kun vektorit A ja πr^2 ovat yhtä pitkiä ja samansuuntaisia.

Mekaniikan jokaiseen suureeseen liitetään *dimensio*, jonka avulla suureet ja kauduvat samankaltaisten suureiden luokkiin. Kappaleiden massat ovat yhtä lajia, niiden nopeudet toista. Merkitään tätä vastaavuutta kuvauksella $s \mapsto [s]$, joka kuvaa jokaisen mekaniikan suureen perussuureiden potenssituloksi. Esimerkiksi kappaleiden massan arvo tässä kuvauksessa on M eli $M^1L^0T^0$. Niiden nopeuksien arvo on L/T eli $M^0L^1T^{-1}$ ja vastaavasti niiden kiihtyvyyksien arvo on L/T^2 eli $M^0L^1T^{-2}$. Kaikkien voimien arvoksi puolestaan valitaan $M^1L^1T^{-2}$ kaavan $F = ma$ perusteella. Taulukossa 2.1 on joidenkin mekaniikan suureiden dimensiot ja SI-yksiköt.

Olkoot $M_1, M_2, \dots, M_m$ teorian T perussuureet ja S jokin sen suure siten, että mittaluvuille pätee

$$S = f(M_1, M_2, \dots, M_m), \quad (2.7)$$

missä $f: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$. *Bridgmanin aksiooma* sanoo, että suureen S kahden eri arvon mittalukujen suhde ei muutu, kun niitä vastaavien perussuureiden mittayksiköt vaihdetaan λ_i^{-1} -kertaisiksi eli

$$\frac{S}{S'} = \frac{f(M_1, \dots, M_m)}{f(M'_1, \dots, M'_m)} = \frac{f(\lambda_1 M_1, \dots, \lambda_m M_m)}{f(\lambda_1 M'_1, \dots, \lambda_m M'_m)} \quad (2.8)$$

kaikilla $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$. Bridgmanin aksiooma siis sanoo esimerkiksi, että Villen ja Kallen massojen mittalukujen suhde on $1/2$, käytettiinpä sitten massan mittayksikkönä kilogrammaa, paunaa tai leiviskää. Samoin heidän vuorokaudessa kuluttamiensa energiamäärien suhde ei riipu käytetyistä mittayksiköistä.

Seuraavan lauseen avulla määrittelemme suureen *dimension*.

2.3.1 Lause. *Olkoot $M_1, \dots, M_m$ perussuureita ja S kaavalla (2.7) annettu suure sekä $f: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ sellainen, että kuvaukset $f(\cdot, 1, \dots, 1)$, $f(1, \cdot, 1, \dots, 1)$, $\dots$, $f(1, \dots, 1, \cdot)$ ovat Lebesgue-integroituvia jokaisessa määrittelyjoukkonsa kompaktissa osajoukossa⁵. Tällöin*

$$S = C \prod_{i=1}^m M_i^{a_i}, \text{ missä } a_i \in \mathbb{R} \text{ ja } C > 0 \text{ kaikilla } i = 1, \dots, m, \quad (2.9)$$

jos ja vain jos Bridgmanin aksiooma pätee.

Todistus. Olkoon kaava (2.9) voimassa. Kun perussuureiden M_j mittayksiköt muutetaan λ_j^{-1} -kertaisiksi, niin niiden mittaluvut tulevat λ_j -kertaisiksi. Silloin

$$\begin{aligned} \frac{S}{S'} &= \frac{f(\lambda_1 M_1, \lambda_2 M_2, \dots, \lambda_m M_m)}{f(\lambda_1 M'_1, \lambda_2 M'_2, \dots, \lambda_m M'_m)} = \frac{C \prod_{i=1}^m (\lambda_i M_i)^{a_i}}{C \prod_{i=1}^m (\lambda_i M'_i)^{a_i}} \\ &= \frac{C \prod_{i=1}^m M_i^{a_i}}{C \prod_{i=1}^m M_i'^{a_i}} = \frac{f(M_1, M_2, \dots, M_m)}{f(M'_1, M'_2, \dots, M'_m)} \end{aligned}$$

eli Bridgmanin aksiooma pätee.

Olkoon Bridgmanin aksiooma voimassa. Silloin kaava (2.8) pätee jokaiselle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+$. Valitaan $\lambda_1 = 1/M'_1, \dots, \lambda_m = 1/M'_m$, jolloin

$$f(M_1, \dots, M_m) f(1, \dots, 1) = f\left(\frac{M_1}{M'_1}, \dots, \frac{M_m}{M'_m}\right) f(M'_1, \dots, M'_m).$$

Merkitään $\beta = 1/f(1, \dots, 1)$, $x_1 = M_1/M'_1, \dots, x_m = M_m/M'_m$ ja $y_1 = M'_1, \dots, y_m = M'_m$, jolloin $M_1 = x_1 y_1, \dots, M_m = x_m y_m$ ja

$$f(x_1 y_1, \dots, x_m y_m) = \beta f(x_1, \dots, x_m) f(y_1, \dots, y_m) \quad (2.10)$$

kaikilla $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}_+$. Valitaan $x_2 = x_3 = \dots = y_m = 1$, $x_1 = x$ ja $y_1 = y$, jolloin

$$f(xy, 1, \dots, 1) = \beta f(x, 1, \dots, 1) f(y, 1, \dots, 1) \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Käytetään hyväksi seuraavaa tulosta⁶: jos $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ ja

$$g(xy) = \beta g(x) g(y) \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}_+,$$

niin silloin on olemassa vakio $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että

$$g(x) = \beta^{-1} x^\alpha \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}_+$$

5. Merkitään niiden kuuluvan joukkoon $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$. On kyse mitallisista kuvauksista $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, joille $\int_a^b |g(x)| dx$ on olemassa ja äärellinen jokaisella $a, b \in]0, \infty[$. Esimerkiksi paloittain jatkuvat kuvaukset ovat mitallisia.

6. Osoita tämä, jos g on jatkuvasti derivoituva.

Näin on olemassa vakio $a_1 \in \mathbb{R}$, jolle pätee

$$f(x_1, 1, \dots, 1) = \beta^{-1} x_1^{a_1} \text{ kaikilla } x_1 \in \mathbb{R}_+.$$

Päätellään samoin muiden kuvauksen f muuttujien suhteen, jolloin saadaan, että on olemassa vakiot $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(1, \dots, 1, x_j, 1, \dots, 1) = \beta^{-1} x_j^{a_j} \text{ kaikilla } x_j \in \mathbb{R}_+ \text{ ja } j = 1, \dots, m.$$

Sovelletaan nyt kaavaa (2.10), jolloin

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= f(x_1 \cdot 1, 1 \cdot x_2, \dots, 1 \cdot x_m) = \beta f(x_1, 1, \dots, 1) f(1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \beta \beta^{-1} x_1^{a_1} f(1 \cdot 1, x_2 \cdot 1, 1 \cdot x_3, \dots, 1 \cdot x_m) \\ &= x_1^{a_1} \beta f(1, x_2, 1, \dots, 1) f(1, 1, x_3, \dots, x_m) \\ &= x_1^{a_1} \beta \beta^{-1} x_2^{a_2} f(1 \cdot 1, 1 \cdot 1, x_3 \cdot 1, 1 \cdot x_4, \dots, 1 \cdot x_m) = \dots \\ &= x_1^{a_1} \dots x_{m-1}^{a_{m-1}} f(1, \dots, 1, x_m) = \beta^{-1} x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}. \end{aligned}$$

m.o.t.

2.3.2 Määritelmä. *Olkoon Bridgmanin aksiooma voimassa, suure S annettu yhtälöllä (2.7) ja $f: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ siten, että $f(\cdot, 1, \dots, 1), \dots, f(1, \dots, 1, \cdot) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$. Suureen S dimensio on*

$$[S] := \prod_{i=1}^m M_i^{a_i}$$

missä esiintyvät reaalityluvut a_i antaa kaava (2.9).

Mekaniikassa perussuureina pidetään tavallisimmin massaa M , pituutta L ja aikaa T . Kaikki mekaniikan suureet eivät kuitenkaan ole niin yksinkertaisia kuin S kaavassa (2.7). Esimerkiksi kappaleen (hetkellisen) nopeuden mittaluku $v(t)$ hetkellä t on derivaatta

$$v(t) = x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{(t+h) - t},$$

missä $x(t)$ on kappaleen sijainnin mittaluku hetkellä t . Toisaalta kertymäsuureet ovat vastaavasti integraaleja muista suureista. Integraalikin on raja-arvo, joten määrittelimme kaikkien integraalin tai derivaatan avulla määriteltyjen suureiden dimensiot samoiksi kuin sen suureen dimensio, josta vastaava rajankäynti tehdään. Siten esimerkiksi hetkellisen nopeuden dimensio on LT^{-1} . Fysiikan teorioissa ei esiinny muunlaisia suureita kuin perussuureita, niistä kaavan (2.7) mukaisesti johdettuja suureita tai näistä rajankäynnillä johdettuja suureita. Siten meillä on kuitenkin fysiikan teorialle T , sen suureiden joukolla Q_T ja sen perussuureiden joukolla $Q_T^0 = \{M_1, \dots, M_m\}$ yksikäsitteinen kuvaus $[\cdot]: Q_T \rightarrow \langle M_1, \dots, M_m \rangle$, $S \mapsto [S]$, missä

$$\langle M_1, \dots, M_m \rangle := \left\{ \prod_{i=1}^m M_i^{b_i} \mid b_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sanomme kuvausta $[\cdot]$ *dimensiokuvaukseksi*. Jos suurelle S pätee $[S] = 1$, niin sanomme, että S on *dimensioton*.

2.3.3 Lause. *Dimensiokuvaus toteuttaa:*

1. $[C] = 1$ kaikilla $C \in \mathbb{R}_+$.
2. $[S^a R^b] = [S]^a [R]^b$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $S, R \in Q_T$.
3. Joukko $\langle M_1, \dots, M_m \rangle$ on m -ulotteinen vektoriavaruus seuraavien laskutoimitusten suhteen:

$$\left(\prod_{i=1}^m M_i^{a_i}, \prod_{i=1}^m M_i^{b_i} \right) \mapsto \prod_{i=1}^m M_i^{a_i + b_i} \text{ ja } \left(\lambda, \prod_{i=1}^m M_i^{a_i} \right) \mapsto \prod_{i=1}^m M_i^{\lambda a_i}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Jos $C = CM_1^0 \dots M_m^0$, niin $[C] = M_1^0 \dots M_m^0 = 1$.

Olkoot suuret S ja D annettu ilman rajankäyntiä perussuureiden avulla, ja

$$[S] = M_1^{a_1} \dots M_m^{a_m}, [R] = M_1^{b_1} \dots M_m^{b_m},$$

missä $a_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Silloin on olemassa $C, D \in \mathbb{R}_+$ siten, että

$$S^a R^b = (CM_1^{a_1} \dots M_m^{a_m})^a (DM_1^{b_1} \dots M_m^{b_m})^b = C^a D^b M_1^{aa_1+bb_1} \dots M_m^{aa_m+bb_m},$$

joten

$$\begin{aligned} [S^a R^b] &= M_1^{aa_1+bb_1} \dots M_m^{aa_m+bb_m} \\ &= (M_1^{a_1} \dots M_m^{a_m})^a (M_1^{b_1} \dots M_m^{b_m})^b = [S]^a [R]^b. \end{aligned}$$

Jos S tai R on annettu rajankäynnillä, saadaan väite tarkastelemalla olioita, joista raja-arvo otetaan.

Viimeisen kohdan osoitus on suoraviivainen joskin pitkä, ks. Vektorit ja matriisit -kurssi. **m.o.t.**

Ihmisen aistiminen noudattaa psykofyysistä lainalaisuutta, jonka mukaan aistimuksen voimakkuus on suoraan verrannollinen ärsykkeen logaritmiin. Joitakin siihen perustuvia mitta-asteikoita käytetään yhä (äänenvoimakkuuden ilmoittaminen desibeleissä ja tähtien kirkkauden magnitudeissa). Nämä mittaluvut eivät toteuta Bridgmanin aksioomaa kuten ei myöskään lämpötilan Celsius- tai Fahrenheit-asteikko. Kaikille näille suureille on toki olemassa asteikot, joilla mittaluku toteuttaa Bridgmanin aksiooman: lämpötilalle absoluuttinen asteikko, jonka mittayksikkö on 1 K (Kelvin), tähtien kirkkaus voidaan ilmoittaa suoraan tähden säteilytehon avulla, ...

2.4 Dimensiohomogeenisuus

2.4.1 Määritelmä. Olkoot $M_1, \dots, M_m$ teorian T perussuureet ja $X_1, \dots, X_n$ sen suureita. Matriisia $A = (a_{ij})$ sanotaan suureiden $X_1, \dots, X_n$ dimensiomatriisiksi perussuurejärjestelmässä $\{M_1, \dots, M_m\}$, jos

$$\prod_{j=1}^m M_j^{a_{ij}} = [X_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Sen riveinä on kunkin suureen dimensiossa esiintyvät eksponentit.

Mekaniikan perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$ suureiden nopeus v , kiihtyvyys a , liike-energia E_k ja paine p dimensiot ovat $[v] = M^0 L^1 T^{-1}$, $[a] = M^0 L^1 T^{-2}$, $[E_k] = M^1 L^2 T^{-2}$ ja $[p] = M^1 L^{-1} T^{-2}$, joten niiden dimensiomatriisi on A ,

$$\begin{array}{c|ccc} A & M & L & T \\ \hline v & 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 1 & -2 \\ E_k & 1 & 2 & -2 \\ p & 1 & -1 & -2 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kun eläimiä tarkastellaan mekaanisena oliona, on perussuureita ainakin yksi enemmän. Lisäsuure on lämpötila ja sitä vastaa symboli Θ . Silloin tavallinen perussuurejärjestelmä on $\{M, L, T, \Theta\}$, jossa dimensiokuvaus on eri kuin mekaniikan tavallisessa perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$. Esimerkiksi eläimen ruumiinlämpötilan θ_e dimensio on $[\theta_e] = \Theta = M^0 L^0 T^0 \Theta^1$, liike-energian E_k dimensio on yhä $[E_k] = M^1 L^2 T^{-2}$ ja tehon $[P] = M^1 L^2 T^{-3}$. Lämmönjohtavuuskertoimen k dimensio nähdään sen SI-yksiköstä W/Km : $[k] = [P]/[\theta_e][L] = M^1 L^1 T^{-3} \Theta^{-1}$. Näiden

suureiden dimensiomatriisi on

$$\begin{array}{c|cccc} A & M & L & T & \Theta \\ \hline \theta & 0 & 0 & 0 & 1 \\ E_k & 1 & 2 & -2 & 0 \\ P & 1 & 2 & -3 & 0 \\ k & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jos oletetaan, että liike- ja lämpöenergia eivät muutu toisikseen, niin silloin perussuureita on peräti viisi, ja perussuurejärjestelmä on $\{M, L, T, \Theta, Q\}$, missä Q vastaa lämpöenergiaa. Silloin dimensiokuvaus on jälleen toinen kuin edellä, ja on tunnistettava kahdenlaista tehoa: mekaanista tehoa $P_k = dE_k/dt$ ja lämmitystehoa $P_t = dQ/dt$. Suureiden θ_e , E_k , P_k , P_t ja k dimensiomatriisiksi A tulee

$$\begin{array}{c|ccccc} A & M & L & T & \Theta & Q \\ \hline \theta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ E_k & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ P_k & 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ P_t & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ k & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

sillä lämmönjohtumislain nojalla

$$[P_t] = [k][l^2] \frac{[\theta]}{[l]}.$$

2.4.1 Perussuurejärjestelmästä toiseen siirtyminen

Tarkastellaan mekaniikkaa kahden eri perussuurejärjestelmän kannalta; ne olkoot $\{M, L, T\}$ ja $\{F, L, T\}$. Dimensiokuvaus riippuu käytetystä perussuurejärjestelmästä, joten suureen S dimensiolle on kaksi eri dimensiokuvausta, $[\cdot]_M$ ja $[\cdot]_F$. Perussuureiden M, L ja T dimensiomatriisi perussuureiden $\{F, L, T\}$ suhteen on $\mathcal{T}$,

$$\begin{array}{c|ccc} \mathcal{T} & F & L & T \\ \hline M & 1 & -1 & 2 \\ L & 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{eli} \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sillä $[M]_F = [F/g]_F = [F]_F/[g]_F = F/LT^{-2} = F^1L^{-1}T^2$. Olkoon suureen S dimensio perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$ $M^{\alpha_1}L^{\alpha_2}T^{\alpha_3}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. Lasketaan sen dimensio perussuurejärjestelmässä $\{F, L, T\}$:

$$\begin{aligned} [S]_F &= [CM^{\alpha_1}L^{\alpha_2}T^{\alpha_3}]_F = [M]_F^{\alpha_1}[L]_F^{\alpha_2}[T]_F^{\alpha_3} = (FL^{-1}T^2)^{\alpha_1}L^{\alpha_2}T^{\alpha_3} \\ &= F^{\alpha_1}L^{-\alpha_1+\alpha_2}T^{2\alpha_1+\alpha_3} = F^{\alpha'_1}L^{\alpha'_2}T^{\alpha'_3}, \end{aligned}$$

missä matriisien avulla kirjoitettuna

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 \end{pmatrix} = \alpha \mathcal{T}.$$

Sovelletaan löydettyä muunnoskaavaa liike-energiaan E_k , jonka dimensio perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$ on $[E_k]_M = M^1L^2T^{-2}$ eli $\alpha = (1, 2, -2)$. Matriisien kertolasku antaa

$$\alpha' = \alpha \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

joten $[E_k]_F = F^1L^2T^0$. Sama tulos saadaan vaatimalla, että liike-energia on jonkin voiman tekemä työ jollakin matkalla eli $E_k = \int_0^l F(x) dx$.

Dimensiomatriisia $\mathcal{T}$ voidaan pitää siirtymämatriisina yhdestä perussuurejärjestelmästä toiseen. Tältä osin perussuurejärjestelmä on analoginen kannan käsitteelle lineaarialgebrassa. Edellä lisäsimme perussuureiden joukkoon uuden perussuureen olettamalla, että mekaaninen ja lämpöenergia eivät muutu toisikseen. Silloin siirtymämatriisi ei vastaa bijektiivistä lineaarikuvausta eikä tällainen siirtyminen yhdestä perussuurejärjestelmästä toiseen ole analoginen kannanvaihdolle⁷.

Tarkastellaan seuraavaksi suureita $X_1, X_2, \dots, X_n$ perussuurejärjestelmässä $\{M_1, \dots, M_m\}$, jossa niiden dimensiomatriisi olkoon A . Toinen perussuurejärjestelmä olkoon $\{N_1, \dots, N_p\}$. Perussuureiden $M_1, \dots, M_m$ dimensiomatriisi $\mathcal{T}$ perussuureiden $N_1, \dots, N_p$ suhteen osoittautuu jälleen siirtymämatriisiksi:

$$A' = AT, \quad (2.11)$$

missä A' on suureiden $X_1, \dots, X_n$ dimensiomatriisi perussuureiden $N_1, \dots, N_p$ suhteen.

2.4.2 Dimensiohomogeenisuuden periaate

Dimensiohomogeenisuuden periaate sanoo, että mittalukuyhtälön muoto ei muutu, vaikka perussuureita $M_1, \dots, M_m$ vastaavat yksiköt muutetaan λ_i^{-1} -kertaisiksi, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, m$. Jos siis suureet $X_1, \dots, X_n$ sitoo yhtälö

$$f(X_1, \dots, X_n) = 0, \quad (2.12)$$

ja dimensiomatriisi on (a_{ij}) , niin

$$f\left(\prod_{j=1}^m \lambda_j^{a_{1j}} X_1, \dots, \prod_{j=1}^m \lambda_j^{a_{nj}} X_n\right) = 0 \text{ kaikilla } (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m.$$

Dimensiohomogeenisuuden periaate muistuttaa Einsteinin suhteellisuusteoriaa: luonnonlakien muotojen on oltava invariantteja yksikönmuutosten suhteen. Ilmiö ei saa riippua mielivaltaisista yksiköistä. Oletetaan, että kaavasta (2.12) voidaan ratkaista ensimmäinen suure. Jollakin kuvauksella $F: \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ on siis voimassa

$$X_1 = F(X_2, \dots, X_n).$$

Yksiköiden muutoksen jälkeenkin on oltava niin, että suure X_1 kasvaa, kun X_2 kasvaa, jos niin oli alkuperäisissäkin yksiköissä. Samoin X_1 :n muutosnopeuden X_2 :n suhteen täytyy olla samaan suuntaan kasvava ennen ja jälkeen yksiköiden vaihdoksen, sillä myös se on suure⁸. Näin jokaisen kuvauksen F osittaisderivaatan tulee käyttäytyä. Viimeistään tämä huomio tehnee dimensiohomogeenisuuden periaatteen uskottavaksi.⁹

Dimensiohomogeenisuuden periaatteen mukaan yhtälön eri puolilla olevien suureiden dimensioiden on oltava samat¹⁰. Siten yhteen saa laskea vain suureita, joilla on sama dimensio. Samoin transsendenttien funktioiden¹¹ muuttujien on oltava dimensiottomia, sillä niiden funktioiden potenssisarjat on päättymättömiä¹². Tämän vuoksi esimerkiksi luonnollisesti kasvavan puun massan lausekkeessa

$$m(t) = m_0 e^{\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

7. Käänteinen toimitus, missä vähennetään perussuureita, vastaa lineaarialgebrassa projektiota.

8. Yksinkertaisuuden vuoksi on oletettu suureiden mittalukujen olevan positiivisia. Reaaliarvoisten mittalukujen ottaminen mukaan käy esimerkiksi niin, että tarkastellaan niiden positiiv- ja negatiivisia ja sallitaan mittaluvun nolla-arvot.

9. Pohdi tapausta, jossa F on yhden muuttujan kuvaus.

10. Olkoon voimassa dimensiohomogeenisesti eläimen pituudelle l ja sen elinajan pituudelle t_e $l - t_e = 0$. Vaihdetaan pituuden mittayksikkö $1/l$ -kertaiseksi ja ajan $1/2t_e$ -kertaiseksi, jolloin seuraa $1 = 2$.

11. Niitä ovat esimerkiksi $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\arcsin$, eksponenttifunktio, $\ln, \dots$

12. ...jolloin ne sisältävät ainakin kaksi termiä. Silloin muuttujan kahden eri potenssin dimensioiden on oltava sama. Se onnistuu vain, jos muuttuja on dimensioton.

täytyy olla $[\alpha] = T^{-1}$.

Huomattava määrä mittausaineistoa esitetään vastoin dimensiohomogeenisuuden periaatetta muodossa $y = f(x)$, missä esimerkiksi y on ampiaspesien määrä neliökilometrin koelalla, x on edellisen kesän sademäärä millimetreissä ja $f(x) = x^2/2$. Tällöin yhtälön vasemman puolen dimensio on L^{-2} , oikean L^2 . Dimensiohomogeenisuuden periaate sallii vain riippuvuuden $f(x) = 1/x^2$. Esitykset $y = f(x)$ voidaan kuitenkin korjata käyttämällä dimensioisia vakioita. Kaavan $y = f(x)$ sijasta tulee kirjoittaa $y/A = f(x/d)$, missä esimerkiksi $A = 1 \text{ km}^2$ ja $d = 1 \text{ m}$. Tällöin kuvaus $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ saa olla millainen hyvänsä, sillä sen muuttuja on dimensioton.

2.5 Buckinghamin π -teoreema

Olkoot $M_1, \dots, M_m$ perussuureita ja $X_1, \dots, X_n$ suureita, joiden dimensiomatriisi on $A = (a_{ij})$. Joukko $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ on n -ulotteinen vektoriavaruus lauseen 2.3.3 kohdan 3 kaavoja vastaavien laskutoimitusten suhteen. Sen osajoukko $\{P_1, \dots, P_p\}$ on *lineaarisesti riippumaton*, jos ja vain jos

$$\prod_{i=1}^p P_i^{\lambda_i} = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0. \quad (2.13)$$

Dimensioanalyysissä dimensiottomat potenssitulot ovat tärkeitä. Lauseen 2.3.3 mukaan potenssitulo $\prod_{i=1}^n X_i^{k_i}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$, on dimensioton, jos ja vain jos

$$1 = \left[\prod_{i=1}^n X_i^{k_i} \right] = \prod_{i=1}^n [X_i]^{k_i} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m M_j^{a_{ij}k_i} = \prod_{j=1}^m M_j^{\sum_{i=1}^n k_i a_{ij}}.$$

Tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun matriisitulo

$$kA = \left(\sum_{l=1}^n k_l a_{li} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Huomaa, että suureiden lineaarisen riippumattomuuden käsite ei tarvitse dimensiota eikä perussuureita. Lineaarialgebrasta tiedetään, että lineaarikuvauksen $\tilde{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k \mapsto kA$ ydin¹³ on $(n-r)$ -ulotteinen vektoriavaruus, missä r on matriisin A aste (eli sen suurimman kääntyvän neliömäisen alimatriisin rivien määrä eli lineaarisesti riippumattomien rivivektoreiden määrä eli lineaarisesti riippumattomien saraktektoreiden määrä). Täten suureista $X_1, \dots, X_n$ voidaan muodostaa $p = n-r$ kpl lineaarisesti riippumattomia dimensiottomia potenssituloja $\pi_1, \dots, \pi_p$. Ne eivät ole yksikäsitteisiä: mikä hyvänsä lineaarikuvauksen $\tilde{A}$ ytimen kanta kelpaa antamaan niiden potenssitulojen eksponentit.

Esitetään dimensioanalyysin tärkein lause.

2.5.1 Lause. (Buckinghamin π -teoreema) *Olkoot $M_1, \dots, M_m$ teorian perussuureita ja $X_1, \dots, X_n$ suureita siten, että dimensiokuvaus $[\cdot]$ on määritelty joukossa $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Merkitään r :llä dimensiomatriisin astetta ja olkoon $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa $p = n-r$ kpl lineaarisesti riippumatonta dimensiottomia potenssituloja $\pi_1, \dots, \pi_p$ ja kuvaus $F: \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ siten että suureet $X_1, \dots, X_n$ sitoo dimensiohomogeeninen yhtälö*

$$f(X_1, \dots, X_n) = 0 \quad (2.15)$$

täsmälleen silloin, kun

$$F(\pi_1, \dots, \pi_p) = 0. \quad (2.16)$$

Jos $r = n$ ja (2.15) on dimensiohomogeeninen, eivät suureet $X_1, \dots, X_n$ riipu toisistaan. Jos $r < n$, $f(\cdot, X_2, \dots, X_n)$ on injektio ja X_1 esiintyy potenssitulossa π_1 , niin $F(\cdot, \pi_2, \dots, \pi_p)$ on injektio.

13. Eli joukko $\{y \in \mathbb{R}^n \mid yA = 0\}$.

2.5.2 Huomautus. *Se, että kuvaus F on ensimmäisen muuttujansa suhteen injektio, on yhtäpitävää sen kanssa, että π_1 voidaan ratkaista muiden dimensiottomien potenssitulojen funktiona eli $\pi_1 = \tilde{F}(\pi_2, \dots, \pi_p)$.*

Jos nimittäin kuvaus $g: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on injektio ensimmäisen muuttujansa suhteen ja jokaisella $y \in \mathbb{R}_+$ pätee $g(x_y, y) = 0$ jollakin $x_y \in \mathbb{R}_+$, niin x_y on yksikäsitteinen. Se on siis kuvauksen $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $y \mapsto x_y$ arvo. Jos taas $x = \tilde{g}(y)$, $\tilde{g}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, niin asetetaan $g(x_1, x_2) = x_1 - \tilde{g}(x_2)$. Se on ensimmäisen muuttujansa suhteen injektio ja $g(x, y) = 0$.

2.5.3 Esimerkki. Sovelletaan Buckinghamin π -teoremaa yksinkertaiseen heiluriin. Perussuureet ovat siis M , L ja T ja relevanteiksi otaksutut suureet P , l , m ja g , jotka sitoo dimensiomogeeninen yhtälö $f(P, m, l, g) = 0$, missä kuvaus f on injektio ensimmäisen muuttujansa suhteen. Muodostetaan dimensiomatriisi A :

$$\begin{array}{c|ccc} A & M & L & T \\ \hline P & 0 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 & 0 \\ g & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dimensiomatriisin aste $r = 3$ ja toisaalta $n = 4$, joten Buckinghamin π -teoreeman nojalla on olemassa tasan yksi¹⁴ dimensioton potenssitulo π_1 siten, että järjestelmää kuvaa yhtälö $F(\pi_1) = 0$. Koska F injektiona ei ole vakio, niin $\pi_1 = C^2$, missä $C > 0$ on jokin vakio. Potenssitulon

$$\pi_1 = \prod_{i=1}^4 X_i^{k_i} = P^{k_1} m^{k_2} l^{k_3} g^{k_4}$$

eksponentit k_i ratkaistaan yhtälöstä $kA = 0$ eli $A^t k^t = 0$ (t niin kuin transpoosi). Siis

$$\begin{cases} k_2 & & & = 0 \\ & k_3 & +k_4 & = 0 \\ k_1 & & -2k_4 & = 0. \end{cases}$$

Ratkaisut ovat $k = (2\lambda, 0, -\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, joista valitaan $k = (2, 0, -1, 1)$. Siten saadaan jälleen yksinkertaisen heilurin heilahdusajaksi

$$P = C \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2.5.4 Esimerkki. Tarkastellaan seuraavaksi taloustieteellistä ongelmaa. Valmisbetonitehtailija olettaa, että betonin menekki $\dot{V}$ (kuutiometri/vrk) riippuu vain betonin yksikköhinnasta p (euro/kuutiometri), asuntolainojen korosta r (1/vuosi), paikkakunnan rakentamattomien tonttien pinta-alasta A_0 (hehtaari) ja sen asukkaiden kokonaistuloista S (euro/kuukausi). Siis $\dot{V} = f(p, r, A_0, S)$.

Käytetään perussuurejärjestelmää $\{L, T, R\}$, missä R vastaa rahaa. Dimensiomatriisi on

$$\begin{array}{c|ccc} A & L & T & R \\ \hline \dot{V} & 3 & -1 & 0 \\ p & -3 & 0 & 1 \\ r & 0 & -1 & 0 \\ A_0 & 2 & 0 & 0 \\ S & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Mikä hyvänsä tulon π_1 potenssi kelpaa myös, mutta ei ole kahta lineaarisesti riippumatonta dimensioutonta potenssituloa.

Siinä on viisi riviä ja sen aste on kolme, joten lineaarisesti riippumattomia potenssituloja saadaan kaksi. Yhtälön $kA = 0$ kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua on esimerkiksi $k = (1, 1, 0, 0, -1)$ ja $k = (0, 1, 1, 3/2, -1)$, joten kaksi lineaarisesti riippumatonta dimensiota potenssituloa on

$$\pi_1 = \frac{\dot{V}p}{S} \quad \text{ja} \quad \pi_2 = \frac{prA_0^{3/2}}{S}.$$

Buckinghamin π -teoreeman nojalla pätee, että π_1 on jokin funktio $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ potenssitulosta π_2 , jolloin

$$\dot{V} = \frac{S}{p} \phi\left(\frac{prA_0^{3/2}}{S}\right). \quad (2.17)$$

Dimensioanalyysillä ei pääse tämän pidemmälle, mutta paljastui sentään, että tuntemattoman neljän muuttujan funktion f sijasta riittää kokeellisesti määrätä *vain yhden* muuttujan kuvaus ϕ .

Oletetaan, että betonin menekki ei riipu vapaan rakennusmaan pinta-alasta A_0 (sitä on yllin kyllin). Tällöin suureita yksi vähemmän, mutta dimensiomatriisin aste on yhä kolme:

$$\begin{array}{c|ccc} A & L & T & R \\ \hline \dot{V} & 3 & -1 & 0 \\ p & -3 & 0 & 1 \\ r & 0 & -1 & 0 \\ S & 0 & -1 & 1 \end{array} \quad \text{eli} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siten saadaan saadaan vain yksi π -luku π_1 . Yksi yhtälön $kA = 0$ ratkaisu on $k = (1, 1, 0, -1)$, joten $\pi_1 = \dot{V}pS^{-1}$. Se voidaan varsin helposti löytää myös suoraan dimensiomatriisia katsomalla. Buckinghamin π -teoreeman nojalla π_1 on yhtäsuuri kuin vakio $C \in \mathbb{R}_+$, jolloin

$$\dot{V} = C \frac{S}{p}.$$

Tulos on sikäli uskottava, että tuotteen menekki kasvaa, jos sen ostajien käytettävissä oleva rahamäärä kasvaa tai jos sen hinta laskee. Sama pätee myös yhtälön (2.17) mukaan pitkin käyrää, jolla π_2 on vakio.

2.5.5 Esimerkki. Tehtailija¹⁵ pohtii, miten paljon hän tarvitsee työvoimaa aikayksikköä kohti. Merkitään tätä suuretta N . Perussuureet ovat R , R_a , R_k , R_e ja T . Niistä R vastaa rahaa ja sen mittayksikkö on euro, R_a vastaa tehtyä työtä (mies-työtunti), R_k vastaa tehtaaseen sijoitettua kiinteää pääomaa (laitteet, rakennukset), R_e vastaa tuotetta (pyykkipoika) ja T vastaa aikaa (tunti). Tehtailija arvioi, että työvoiman tarve riippuu vain palkkatasosta w , jonka dimensio $[w] = RR_a^{-1}$, tuotteen yksikköhinnasta p , $[p] = RR_e^{-1}$, kiinteästä pääomasta K , $[K] = R_k$ ja tuotantotekniikan indeksistä c_α , joka esiintyy yhtälössä

$$u = c_\alpha N^\alpha K^{1-\alpha}, \quad \alpha \in]0, 1[$$

missä u on tuotantovauhti, $[u] = R_e T^{-1}$, ja N on työllistäminen, $[N] = R_a T^{-1}$. Tehtailija olettaa, että yhtälö

$$f(N, w, p, K, c_\alpha) = 0$$

on dimensiohomogeeninen ja kuvaus f on ensimmäisen muuttujansa suhteen injektio. Muodostetaan jälleen dimensiomatriisi A :

$$\begin{array}{c|ccccc} A & R & R_a & R_k & R_e & T \\ \hline N & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ w & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ K & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_\alpha & 0 & -\alpha & \alpha - 1 & 1 & \alpha - 1. \end{array}$$

15. Frits J. de Jong, *Dimensional analysis for economists*, North Holland, Amsterdam 1967, ss. 56–59.

Koska $n = 5$ ja dimensiomatriisin aste on 4, on olemassa vain yksi dimensioton potenssitulo π_1 , ja pätee $F(\pi_1) = 0$ eli $\pi_1 = C$, missä $C > 0$ on vakio. Ratkaisemalla yhtälö $kA = 0$ saadaan

$$\pi_1 = \frac{N}{K} \left(\frac{w}{pc_\alpha} \right)^{1/(1-\alpha)} = C \text{ eli } N = CK \left(\frac{pc_\alpha}{w} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Työvoiman kysynnällä on siis ominaisuudet

$$N \propto K; \quad N \rightarrow 0, \text{ kun } \frac{p}{w} \rightarrow 0; \quad N \rightarrow \infty, \text{ kun } \frac{p}{w} \rightarrow \infty.$$

Koko kansantalouteen sovellettuna tämä tulos *näyttäisi* osoittavan, että investoinnit tuotantolaitoksiin ja palkkatason lasku vähentävät tehokkaasti työttömyyttä.

Olisi voitu käyttää vain kahta perussuuretta: R ja T . Silloin olisi samastettu dimensioltaan neljä eri arvosuuretta R , R_a , R_e ja R_k . Siinä tapauksessa dimensiottomia potenssituloja olisi saatu ainakin kolme, ja niin olisi saatu epämääräisempi tulos

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0.$$

Tämän vuoksi kannattaa käyttää mahdollisimman monta eri perussuuretta.

Biologian tai talouden ongelmassa on usein mahdollista tunnistaa useampaa lajia aikaa: mekaaninen (sekunti), biologinen (sydämenlyönti), psykologinen. Seuraavassa esimerkissä tunnistetaan kahta eri lajin pituutta: luotisuoran suuntainen ja sitä vastaan kohtisuora pituus.

2.5.6 Esimerkki. *Kapillaari-ilmiö.* Olkoon pystysuoran ohuen putken säde r ja upotettakoon sen pää nesteeseen, jonka tiheys on ρ ja pintajännitys γ . Halutaan ratkaista nestepinnan nousukorkeus h painovoimakentässä, jossa vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys on g . Dimensiomatriisi on

A	M	L	T
h	0	1	0
r	0	1	0
ρ	1	-3	0
γ	1	0	-2
g	0	1	-2

Buckinghamin π -teoreeman avulla saadaan (harjoitustehtävä!), että

$$h = r\phi\left(\frac{r^2\rho g}{\gamma}\right),$$

missä $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ on tuntematon funktio.

Tarkastellaan tilanteen geometriaa hieman huolellisemmin. Jaetaan pituus pystysuoraan ja vaakasuoraan komponenttiin Z ja R . Nyt h ja g vaikuttavat Z -suunnassa, ρ on taas symmetrinen joka suunnassa ja r vaikuttaa R -suunnassa. Mitä taas pintajännitykseen γ tulee, se määritellään voimana pinnan tangentin suuntaiseen tasoon kuuluvaa pituusyksikköä kohti, joten sen dimensio on $MZT^{-2}R^{-1}$. Dimensiomatriisi on nyt

A	M	R	Z	T
h	0	0	1	0
r	0	1	0	0
ρ	1	-2	-1	0
γ	1	-1	1	-2
g	0	0	1	-2

Buckinghamin π -teoreeman avulla saadaan (harjoitustehtävä!), että

$$h = C \frac{\gamma}{g\rho r},$$

missä $C > 0$ on jokin vakio.

2.5.1 Buckinghamin π -teoreeman todistus.

Lauseen 2.6 nojalla suureet $X_1, \dots, X_n$ ja $M_1, \dots, M_m$ muodostavat n - ja m -ulotteiset vektoriavaruudet

$$\begin{aligned}\langle X_1, \dots, X_n \rangle &= \{X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}, \\ \langle M_1, \dots, M_m \rangle &= \{M_1^{b_1} \cdots M_m^{b_m} \mid b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Lisäksi dimensiokuvaus

$$[\cdot]: \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \langle M_1, \dots, M_m \rangle$$

on lineaarinen, joten *dimensiolauseen*¹⁶ nojalla

$$\dim \langle X_1, \dots, X_n \rangle = \dim N([\cdot]) + \dim R([\cdot]),$$

missä $N([\cdot])$ on dimensiokuvauksen *ydin* ja $R([\cdot])$ on sen arvojoukko,

$$\begin{aligned}N([\cdot]) &= \{X \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle \mid [X] = 1\}, \\ R([\cdot]) &= \{[X] \mid X \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle\}.\end{aligned}$$

Olkoon A suureiden $X_1, \dots, X_n$ dimensiomatriisi perussuureiden $M_1, \dots, M_m$ suhteen. Koska sen aste on r , niin siinä on r lineaarisesti riippumatonta riviä ja siten $\dim R([\cdot]) = r$. Koska $\dim \langle X_1, \dots, X_n \rangle = n$, niin dimensiottomia lineaarisesti riippumattomia potenssituloja on $p = n - r$ kappaletta.

Olkoon $r < n$. Numeroidaan $X_1, \dots, X_n$ ja $M_1, \dots, M_m$ uudestaan siten, että dimensiomatriisi on

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_r \end{pmatrix}$$

missä A_r on $r \times r$ -matriisi, jonka determinantti eroaa nolasta. Johdetaan suureista $X_1, \dots, X_n$ uudet suureet $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ potenssituloina:

$$\tilde{X}_i = \prod_{k=1}^n X_k^{b_{ik}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

ja merkitään

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_r \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Kuvaus $L: \langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ on lineaarinen ja sen matriisi on B . Suureiden $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ dimensiomatriisi on $\tilde{A} = BA$, sillä

$$[\tilde{X}_i] = \prod_{k=1}^n [X_k]^{b_{ik}} = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n M_j^{a_{kj}b_{ik}} = \prod_{j=1}^m M_j^{\sum_{k=1}^n a_{kj}b_{ik}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Merkitään $p \times p$ -yksikkömatriisia I_p ja valitaan

$$B_{11} = I_p, \quad B_{12} = -A_{12}A_r^{-1}, \quad B_{21} = 0, \quad B_r = A_r^{-1}.$$

Silloin $\det B = 1/\det A_r \neq 0$, joten kuvaus L on bijektio. Edelleen¹⁷

$$\begin{aligned}\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) &= \begin{pmatrix} I_p & -A_{12}A_r^{-1} \\ 0 & A_r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_r^{-1}A_{21} & A_{12} - A_{12}A_r^{-1}A_r \\ A_r^{-1}A_{21} & A_r^{-1}A_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & I_r \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

16. Ks. Vektorit ja matriisit -kurssi. Luku $k \in \mathbb{N}$ on vektoriavaruuden V dimensio, jos ja vain jos on olemassa lineaarisesti riippumattomat vektorit $e_1, \dots, e_k$ siten, että $V = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

17. Totea oikeaksi käytetty matriisien laskusääntö, että tulomatriisi saadaan laskemalla tekijöidensä alimatriiseja kuin ne olisivat matriisin alkioita.

Koska kuvaus L on bijektio ja matriisin A aste on r , niin on oltava, että $\tilde{A}_{11} = 0$, sillä muuten matriisin $\tilde{A}$ aste olisi suurempi kuin r . Kuvauksen L käänteiskuvauksen L^{-1} matriisi on $C := B^{-1}$,

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} I_p & -B_{12}B_r^{-1} \\ 0 & B_r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & A_{12} \\ 0 & A_r \end{pmatrix}.$$

Määritellään kuvaus

$$\tilde{f}: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = f\left(\prod_{k=1}^n \tilde{X}_k^{c_{1k}}, \dots, \prod_{k=1}^n \tilde{X}_k^{c_{nk}}\right).$$

Koska $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ toteuttavat kaavat (2.18)–(2.19) ja $f(X_1, \dots, X_n) = 0$, niin $\tilde{f}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = 0$.

Jos perussuureen M_j mittayksiköt muutetaan λ_j^{-1} -kertaiseksi, $j = 1, \dots, m$, niin suureiden $\tilde{X}_j$ mittaluvut muuttuvat $\prod_{k=1}^m \lambda_k^{\tilde{a}_{jk}}$ -kertaisiksi. Suureiden X_j mittaluvut muuttuvat $\prod_{k=1}^m \lambda_k^{a_{jk}}$ -kertaisiksi. Siten yhtälön $f(X_1, \dots, X_n) = 0$ dimensiohomogeenisuudesta seuraa, että yhtälö $\tilde{f}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = 0$ on dimensiohomogeeninen. Siksi pätee, että

$$\tilde{f}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p, \lambda_{m-r+1}\tilde{X}_{p+1}, \dots, \lambda_m\tilde{X}_n) = 0 \text{ kaikilla } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+.$$

Valitaan $\lambda_{m-r+1} = 1/\tilde{X}_{p+1}, \dots, \lambda_m = 1/\tilde{X}_n$ ja merkitään $\pi_1 = \tilde{X}_1, \dots, \pi_p = \tilde{X}_p$, jolloin

$$\tilde{f}(\pi_1, \dots, \pi_p, 1, \dots, 1) = 0.$$

Asetetaan $F = \tilde{f}(\cdot, \dots, \cdot, 1, \dots, 1)$. Jos f on injektio ensimmäisen muuttujansa suhteen, myös F on sellainen.

Olkoon $r = n$. Lisäämällä perussuureita, joista suureet $X_1, \dots, X_n$ eivät riipu, voidaan olettaa, että $n = m$. Yllä oleva päättely käy sillä erolla, että $A_r = A$, $\dim N([\cdot]) = 0$ ja $[X_j] \neq 1$ kaikilla $j = 1, \dots, n$. Saadaan, että

$$\tilde{f}(\lambda_1\tilde{X}_1, \dots, \lambda_n\tilde{X}_n) = 0 \text{ kaikilla } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+,$$

mistä seuraa, että $\tilde{f}$ on vakio, jolloin myös f on vakio ja niin suureet $X_1, \dots, X_n$ eivät riipu toisistaan.

Buckinghamin π -teoreema¹⁸ on nyt todistettu. Sille on lukuisia muita todistuksia, joista mainittakoon lyhyt ja abstrakti Erkki Laitisen todistus¹⁹, joka perustuu dualiteetin käsitteeseen, ja Stanley Corrsinin geometrinen todistus (1950).

2.6 Dimensioanalyysikone

Buckinghamin π -teoreeman soveltaminen eli dimensioanalyysin tekeminen on suoraviivaista laskemista: kun oleelliset suureet on valittu ja niiden dimensiot on selvitetty, on kyse lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisesta, joka on omiaan annettavaksi tietokoneohjelman tehtäväksi. Siihen on käytettävissä Tuula Ripatin laatima Dimensioanalyysikone-niminen ohjelma, joka on käyttöohjeineen sivulla

<http://www.math.jyu.fi/~vmho/Dimensioanalyysikone/dimensioanalyysi.html>

Ohjelmalle voidaan antaa dimensiomatriisi, jolloin ohjelma laskee siitä π -luvut. Ohjelmassa on myös valmiina eri aloilla esiintyviä suureita, joista voidaan valita tarkasteltavat suureet, jolloin ohjelma muodostaa dimensiomatriisin ja laskee π -luvut. Jos aiheesta on olemassa vakiintuneita π -lukuja (esimerkiksi virtausmekaniikassa Reynoldsin luku), ohjelma valitsee π -luvuksi vakiintuneen π -luvun aina, kun se on mahdollista. Voidaan myös lisätä ja tallentaa omia suureluetteloita halutuista aiheista sekä muokata perussuurejärjestelmiä.

18. E. Buckingham, Phys. Rev. **4**, 345 (1914).

19. Arkhimedes, 2/1985, ss. 117–119.

Ohjelmasta on olemassa kaksi versiota, jotka molemmat löytyvät ohjelman sivulta. Täydellisen version saa käyttöön tallentamalla ohjelman omalle koneelle. Lisäksi ohjelmasta on selaimessa toimiva versio, josta omien suureiden tallentaminen puuttuu. Ohjelman asentaminen ja ajaminen on toteutettu Java-ohjelmointikielellä. Ohjelman ajamiseksi tarvitaan uudehko versio Java Runtime Environment-ohjelmistosta²⁰. Selaimessa toimivan version ajamiseksi selaimessa on oltava Java Plug In ja lisäksi Java laitettuna päälle. Java Plug In tulee JRE:n version 1.4.2 mukana, jonka voi ladata ja asentaa ohjelman sivulta löytyvästä linkistä. Dimensioanalyysikone toimii ainakin seuraavilla selaimilla: IE 6.0, Netscape 7.0, Mozilla 1.3, Opera.

2.7 Pienoismaalleista

Lentokoneiden, laivojen, satamalaitteiden ja muun sellaisen rakentaminen on niin kallista, että suunnitelmien toimivuus on syytä testata pienoismallein ennenkuin ryhdytään rakentamaan täysimittaista prototyyppiä. Mutta miten saada mallikoe vastaamaan todellista tilannetta? Tässä tarvitaan dimensioanalyysiä.

Dimensioanalyysin käyttö mallikokeessa perustuu yksikönmuutosinvarianssiin, mutta nyt sitä käytetään nurin päin: annetaan yksiköiden olla rauhassa, mutta muutetaan tilanteeseen liittyviä mittalukuja eli rakennetaan pienoismalli. Jotta samat lait pätsivät sekä pienoismallille että prototyypille, tulee tilanteeseen liittyvien dimensiottomien lineaarisesti riippumattomien potenssitulojen eli π -lukujen saada samat arvot niin pienoismallille kuin prototyypille.

Selvitetään asiaa esimerkillä. Yksinkertaisen heilurin heilahdusaika P riippuu vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyydestä g ja langan pituudesta l . Dimensioanalyysi antaa täsmälleen yhden π -luvun, joka on $\pi_1 = P^2 g / l$. Jos rakennetaan malliheiluri, pätee prototyypille

$$\left(\frac{P^2 g}{l}\right)_p = \left(\frac{P^2 g}{l}\right)_m \quad \text{eli} \quad \frac{P_m^2 g_m}{l_m} = \frac{P_p^2 g_p}{l_p},$$

missä p ja m viittaavat prototyyppiin ja malliin. Jos tarkastellaan vain maapallolla olevia heilureita, niin $g_p = g_m$, ja

$$\frac{P_m^2}{l_m} = \frac{P_p^2}{l_p}.$$

Jos nyt mitataan yhden heilurin —pienoismallin— pituus ja heilahdusaika, voidaan laskea prototyypin heilahdusaika sen pituudesta.

Todellisissa mallikokeissa tilanne on monimutkaisempi, sillä yleensä π -lukuja on useita ja niiden kaikkien sovittaminen samoiksi mallille ja prototyypille on hankalaa ja usein taloudellisesti tai fysikaalisesti mahdotonta. Tarkastellaan laivan runkoon kohdistuvaa vastusvoimaa f , jonka oletetaan riippuvan vain laivan nopeudesta v , laivan tyypillisestä mitasta d (pituudesta tai leveydestä), laivan syvyydestä h , vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyydestä g , veden tiheydestä ρ ja veden kinemaattisesta viskositeettikerroimesta²¹ ν . Siis

$$f = \phi(v, d, h, g, \rho, \nu).$$

Dimensioanalyysi antaa $7 - 3 = 4$ π -lukua, joiksi valitaan Reynoldsin luku $Re = vd/\nu$, Frouden luku v^2/gd , luku d/h ja luku $f/(\rho v^2 h d)$, joka on verrannollinen

20. Ohjelma toimii ainakin JRE:n versiolla 1.4.0 ja 1.4.2. Ohjelman sivun alalaidasta löytyvä zip-paketti da.zip tulee tallentaa omalle koneelle ja purkaa johonkin hakemistoon. Hakemistoon pitäisi nyt ilmestyä jar-paketti da.jar sekä hakemisto data . Kun JRE on asennettu, ohjelma käynnistyy antamalla hakemistossa komento java -jar da.jar . Uusimmissa Windows-käyttöjärjestelmissä (ainakin 2000 ja XP) ohjelma käynnistyy myös kaksoisklikkaamalla da.jar -kuvaketta.

21. Kinemaattinen viskositeettikerroin on (dynaaminen) viskositeettikerroin μ jaettuna nesteen tiheydellä, $\nu = \mu/\rho$, ks. harjoitus 17. Sen dimensio perusuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$ on $L^2 T^{-1}$.

vastuskertoimeen $C_f = f/(P_{st}A)$, missä $P_{st} = \rho v^2/2$ on ns. patopaine ja A on laivan poikkipinta-ala. Nyt siis

$$C_f = \psi(Re, Fr, d/h),$$

missä $\psi: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Jos halutaan määrittää prototyypin vastuskerroin pienoismallin avulla, on niiden kummankin π -lukujen saatava samat arvot. Luku d/h on sama kummallekin, jos ne ovat samanmuotoisia eli geometrisesti similaareja. Jos mallikokeet tehdään maapallolla (mikä on kustannussyistä luultavaa), niin $g_m = g_p$. Vaatimuksesta, että Frouden luvut ovat samat, seuraa ehto

$$\left(\frac{v_m}{v_p}\right)^2 = \frac{d_m}{d_p}. \quad (2.20)$$

Siitä, että Reynoldsin lukujen on oltava samat, seuraa puolestaan ehto

$$\frac{v_m}{v_p} = \frac{\nu_m}{\nu_p} \frac{d_p}{d_m}. \quad (2.21)$$

Heti nähdään, että mikäli mallikoe tehdään vedessä, jolloin $\nu_m = \nu_p$, on ehtoja (2.20) ja (2.21) mahdotonta saada toteutumaan, ellei mallista tehdä prototyypin kokoista. Entä jos mallia uitettaisiin jossakin muussa nesteessä? Ratkaistaan viskositeettikertoimien suhde yhtälöistä (2.20) ja (2.21), jolloin

$$\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{d_m}{d_p}\right)^{3/2}. \quad (2.22)$$

Veden kinemaattinen viskositeettikerroin lämpötilassa 10°C ja normaalipaineessa on $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, elohopean normaalipaineessa ja lämpötilassa 100°C on $1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, joten näillä nesteillä

$$\frac{d_m}{d_p} = \left(\frac{\nu_m}{\nu_p}\right)^{2/3} \approx 0,16.$$

Näin 300-metrinen laivan pienoismallina tulisi uittaa 50-metristä alusta elohopeapätsissä. Käytännössä taloudellisesti mahdotonta, mutta ongelma voidaan kiertää jakamalla vastusvoima kahteen osaan, Reynoldsin luvusta²² riippuvaan virtausvastukseen, joka osataan käsitellä teoreettisesti ns. rajapintateorian avulla, ja Frouden luvusta riippuvaan aaltovastukseen, jota voidaan tutkia pienoismallikokeilla, joissa nesteeksi kelpaa halpa ja myrkytön vesi.

Edellisessä tarkastelussa vaadittiin, että π -lukujen tulee olla samat sekä prototyypille, että mallille. Aina voidaan siirtyä köyhempään perussuurejärjestelmään, jolloin π -lukujen määrä kasvaa. Näin kävi nesteen nousukorkeuden tarkastelussa perussuurejärjestelmissä $\{M, R, Z, T\}$ ja $\{M, L, T\}$. Kuitenkin π -lukujen $\pi_1, \dots, \pi_p$ samuutta tulee vaatia vain, jos yhtälössä

$$F(\pi_1, \dots, \pi_p) = 0$$

kuvaus F on (paikallisesti) injektio jokaisen muuttujansa suhteen. Buckinghamin π -teoreeman todistuksesta nähdään, että näin on, jos kuvaus f yhtälössä

$$f(X_1, \dots, X_n) = 0$$

on p :n ensimmäisen muuttujansa suhteen injektio ja suureiden $X_{p+1}, \dots, X_n$ dimensiomatriisin aste on $n - p$.

22. Reynoldsin ja Frouden luvut esitellään seuraavassa jaksossa.

2.8 Joitakin vakiintuneita π -lukuja

Dimensioanalyysissä periaatteessa kaikki dimensiottomat lineaarisesti riippumattomat potenssitulot kelpaavat π -lukuiksi, mutta etenkin virtausmekaanisissa ongelmassa joukko π -lukuja on niin vakiintuneita, että ne ovat saaneet oman nimen ja ne on järkevää valita π -lukuiksi aina, kun se vain käy päinsä. Silloin helpotetaan —joskus jopa vältetään kokonaan— yhtälön $kA = 0$ ratkaisemista.

Reynoldsin luku Re liittyy ρ -tiheyksisen virteen liikkeeseen nopeudella v putkessa tai laveassa raossa, jonka paksuus on d ;

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu},$$

missä μ on virteen dynaaminen viskositeettikerroin ja $\nu = \mu/\rho$ kinemaattinen viskositeettikerroin. Reynoldsin luvun fysikaalinen merkitys nähdään lausekkeesta

$$Re = \frac{\rho v^2 d^2}{\mu v / d \times d^2} \propto \frac{\text{dynaaminen paine} \times \text{pinta-ala}}{\text{viskoottinen leikkausjännitys} \times \text{pinta-ala}} \propto \frac{\text{hitausvoima}}{\text{kitkavoima}}.$$

Näin Reynoldsin luku kuvaa kitka- ja hitausvoimien suhdetta virteessä. Empiirinen lainalaisuus on, että virtaus on kerroksittaista eli laminaarista, kun likimain²³ $Re < 2300$ ja pyörteistä eli turbulenttia, kun likimain $Re > 2300$.

Frouden luku Fr kuvaa hitaus- ja painovoiman suhdetta virteessä:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g d}} = \sqrt{\frac{\rho v^2 \times d^2}{\rho g d^3}} \propto \sqrt{\frac{\text{hitausvoima}}{\text{painovoima}}}.$$

Machin luku M kuvaa hitausvoiman ja kaasun puristuvuuteen liittyvien voimien suhdetta:

$$M = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\rho v^2}{\rho c^2}},$$

missä c on äänennopeus.

Lämpönsiirtoilmiöiden tarkasteluissa käytetään usein perussuurejärjestelmää $\{M, L, T, H, \Theta\}$, missä H on lämpömäärän (energian) dimensio ja Θ lämpötilan dimensio. Tällöin oletetaan, että lämpö ei muutu mekaaniseksi energiaksi eikä päinvastoin. Dimensioanalyysi voi antaa π -lukuiksi *Nusseltin luvun* Nu , *Prandtlin luvun* Pr tai *Péclet'n luvun* Pe ,

$$Nu = \frac{h d}{\kappa}, \quad Pr = \frac{c \mu}{\kappa} \quad \text{ja} \quad Pe = \frac{v d c \rho}{\kappa},$$

missä h on lämpövirrantiheys ja κ on lämmönjohtavuuskerroin, jotka esiintyvät Fourier'n lämmönjohtavuuslaissa

$$h = -\kappa \frac{d\theta}{dx};$$

θ on lämpötila, c virteen ominaislämpö, x paikkakoordinaatti, v virtauksen nopeus ja ρ virteen tiheys.

2.9 Huomioita dimensioanalyysistä

Dimensioanalyysin teoriaa edellä luonnostellessa ei vaadittu suureilta mitattavuutta: riitti että niillä on vain joitakin mitattavien suureiden ominaisuuksia. On ilmeistä, että dimensiohomogeenisuus ei rajoitu vain fysiikkaan, vaan dimensiohomogeenisia yhtälöitä voidaan rakentaa minkä tahansa inhimillisen tiedon piiriin kuuluvien suureiden välille, kunhan vain noiden suureiden dimensioiden tunnetaan. Tehtäilijae-simerkissämme yhtenä suureena oli raha, joka on arvon mitta. Voisimme kuvitella

23. Raja ei ole tarkka eikä kiinteä, vaan riippuu esimerkiksi putken tai raon muodosta.

dimensioanalyysiä sovellettavan muihinkin arvosuureisiin kuten kauneuteen, pyhyyteen. . .

Millä edellytyksillä sitten dimensioanalyysin antamat tulokset ovat tosia tai käyttökelpoisia? Dimensioanalyttisen päättelyn yleinen kulku on seuraava:

- (1) Järjestelmän oleelliset suureet ovat $X_1, \dots, X_n$, jotka sitoo dimensiohomogeeninen yhtälö.
- (2) Perussuurejärjestelmässä $\{M_1, \dots, M_m\}$ suureen X_i dimensio on $[X_i] = \prod_{j=1}^m M_j^{a_{ij}}, i = 1, \dots, n.$ (DA)
- (3) Järjestelmää kuvaa yhtälö $F(\pi_1, \dots, \pi_p) = 0.$

Kyseessä on tavallinen deduktiivinen päättely, jonka premissit ovat (1) ja (2): kun on nähty ongelman kannalta oleelliset suureet, valittu perussuureet ja määritetty oleellisten suureiden dimensiot valitussa perussuurejärjestelmässä, voidaan johtopäätöksen (3) laskeminen jättää yksinkertaisen tietokoneohjelman tehtäväksi. Todellinen vaikeus piilee premissien löytämisessä: jos lähtökohdat ovat päättömiä, ei johtopäätökseltä pidä odottaa sen enempää. Tarvitaan hyvä fyysikko, taloustieteilijä . . . , jonka intuitio ja kokemus opastavat hänet arvaamaan kohtuullisen hyvin perussuureet ja oleelliset suureet dimensioineen.

Tehtailijaesimerkissä tarkasteltiin mikrotalouden ongelmaa ja tarjottiin sen ratkaisua suoraan makrotalouteen: työttömyys voidaan poistaa sijoituksin tuotantolaitoksiin ja laskemalla palkkoja. Makrotaloudessa kuitenkin palkkatason lasku vähentää kuluttajien ostovoimaa, mikä puolestaan vähentää tuotteen kysyntää, mikä laskisi sen hintaa. Näin ollen tulos, joka pätee yhdelle tehtaalle, ei välttämättä yleistykään koko kansantalouteen kaikkine vuorovaikutuksineen ja takaisinkytkentöineen.

Dimensioanalyysi ei ole salatiedettä, vaan oiva deduktiivinen menetelmä tehdä implisiittinen näkemys eksplisiittiseksi.

2.10 Harjoitustehtäviä

1. Väitetään, että ns. isokenkäiset ajavat autoillaan vauhdikkaammin kuin pienikenkäiset. "Todista" heiluriesimerkin yksikönmuutostarkastelulla, että se ei voi pitää paikkaansa. Oleta, että auton nopeus v (metri/sekunti) riippuu polttoaineen kulutuksesta $\dot{V}$ (kuutiometri/sekunti) ja kuljettajan kengännumerosa, jota esittää kengän pituus l (metri). Mikä on johtopäätöksesi?
2. Totea määritelmään vedoten, että perussuureiden M, L, T kaikkien potenssitulojen joukko

$$\langle M, L, T \rangle = \{M^\alpha L^\beta T^\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

muodostaa vektorialiavaruuden lauseen 2.3.3 kohdan 3 laskutoimitusten suhteen eli siitä ei pääse kertolaskulla tai potenssiin korottamalla pois.

3. Määrää kappaleen potentiaalienergian E_p ja siihen vaikuttavan voiman F dimensiot perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$, kun $E_p = mgh$ ja $F = mg$ (h on kappaleen korkeus maan pinnasta, m sen massa ja $g = 9,81 \text{ m/s}^2$).
4. Määrää kappaleen massan m , potentiaalienergian E_p ja siihen vaikuttavan voiman F_g dimensiot perussuurejärjestelmässä $\{F, L, T\}$, missä F vastaa voimaa. Massa on nyt *johdettu* suure, ja yhtälöstä $F_g = mg$ saadaan $[m] = [F_g]/[g]$.
5. Muodosta yksinkertaisen heilurin suureiden m, l, g ja P dimensiomatriisi perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$.
6. Muodosta kappaleen sijainnin (korkeuden) h , nopeuden v , kiihtyvyyden g , massan m , kokeman voiman $F_g = mg$ ja potentiaalienergian $E_p = mgh$ dimensiomatriisi
 - (a) perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$,

(b) perussuurejärjestelmässä $\{F, L, T\}$.

7. Muodosta yksinkertaisen heilurin suureista m, l, g ja P potenssitulo

$$\pi_1 = m^\alpha l^\beta g^\gamma P^\delta,$$

ja määrää luvut $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ siten, että π_1 on dimensioton eli $[\pi_1] = 1$.

8. Olkoot $M_1, \dots, M_m$ ja $N_1, \dots, N_n$ perussuureita ja $\mathcal{T}$ suureiden $M_1, \dots, M_m$ dimensiomatriisi perussuurejärjestelmässä $N_1, \dots, N_n$. Perussuurejärjestelmiä $\{M_1, \dots, M_m\}$ ja $\{N_1, \dots, N_n\}$ sanotaan *ekvivalenteiksi*, jos ja vain jos $n = m$ ja $\det \mathcal{T} \neq 0$. Osoita, että mekaniikan perussuurejärjestelmät $\{M, L, T\}$ ja $\{F, L, T\}$ ovat ekvivalentteja.
9. Olkoon l kosmonautin pituus, d kosmonautin paksuus, g vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyys ja P kosmonautin sydämenlyöntien väli. Osoita, että nuo suureet ovat lineaarisesti riippumattomia eli että pätee

$$l^\alpha d^\beta g^\gamma P^\delta = C, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, C > 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Huomaa, että l, d, g, P ovat *muuttujia*, joille saat valita kaikki positiiviset arvot.

10. Jatketaan edellistä tehtävää. Oletetaan, että avaruuslennoille pääsevät vain sellaiset oliot, joille $l = 6d$. Totea, että silloin suureet l, d, g, P eivät ole lineaarisesti riippumattomia. Ovatko suureet d, g, P lineaarisesti riippumattomia, entä l ja d ?
11. Tarkastellaan pitkän kaasukuplan nousua pystysuorassa olevassa nesteputkessa. Oletetaan, että neste ja kaasu ovat homogeenisia ja likimain kokoonpuristumattomia ja että kitkalla (viskositeetilla) ei ole oleellista merkitystä. Tällöin on luonnollista otaksua, että kaasukuplan nousunopeus v riippuu vain putken halkaisijasta d , vapaan putoamisliikkeen kiihtyvyydestä g , kaasun tiheydestä ρ_k ja nesteen tiheydestä ρ_n eli

$$v = f(d, g, \rho_k, \rho_n).$$

Määrää suureiden v, d, g, ρ_n ja ρ_k dimensiomatriisi perussuurejärjestelmässä $\{M, L, T\}$.

12. Jatketaan edellistä tehtävää. Hae kaksi lineaarisesti riippumatonta potenssituloa π_1 ja π_2 käyttäen yhtälöä $A^t k^t = 0$. Ratkaise se Gaussin-Jordanin menetelmällä²⁴ ja pyri siihen, että yhdessä dimensiottomassa potenssitulossa on tekijä v ja toisessa sitä ei ole. Mitä Buckinghamin π -teoreema antaa kuplan nousunopeudeksi? Onko saamasi tulos uskottava?
13. Oletetaan, että auton nopeus v riippuu vain kuljettajan kengän koosta l , auton polttoaineen kulutuksesta $\dot{V}$, polttoaineen hinnasta p (euroa/litra) ja kuljettajan tuloista s (euroa/kk). Siis $v = f(l, \dot{V}, p, s)$. Käytä perussuurejärjestelmää $\{M, L, T, R\}$, missä R vastaa rahaa. Määrää Buckinghamin π -teoreemalla lauseke auton nopeudelle.
14. Johda Buckinghamin π -teoreemalla kapillaari-ilmiön tarkastelussa esiintynyt kaava nesteen nousukorkeudelle:

$$h = r\phi\left(\frac{r^2 \rho g}{\gamma}\right).$$

15. Jaetaan pituuden dimensio L kahteen komponenttiin R ja Z . Johda Buckinghamin π -teoreemalla nesteen nousukorkeuden kaava

$$h = C \frac{\gamma}{g\rho r},$$

missä $C > 0$ on vakio. Onko kaava uskottava? Mitä on jätetty huomiotta (katso tarkkaan nestepintaa juomalasissa lähellä lasin reunaa)? Onko tulos silti uskottava tai käyttökelpoinen? Onko kaava ristiriidassa edellisen tehtävän kaavan kanssa?

24. Lineaarinen yhtälöryhmä kirjoitetaan matriisiksi, jota muokataan rivioperaatioin kohti muotoa, jossa vasemmassa laidassa on yksikkömatriisi.

16. Olkoot $m \times n$ - ja $n \times p$ -matriisit

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad H = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

Osoita, että

$$GH = \begin{pmatrix} G_{11}H_{11} + G_{12}H_{21} & G_{11}H_{12} + G_{12}H_{22} \\ G_{21}H_{11} + G_{22}H_{21} & G_{21}H_{12} + G_{22}H_{22} \end{pmatrix},$$

kunhan kaikki yllä esiintyvät alimatriisien tulot ja summat ovat määriteltyjä.

17. Viskositeettikerroin μ esiintyy yksiulotteisen kokoonpuristumattoman Newtonin virteen liikeyhtälössä

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

missä x on paikkakoordinaatti ($[x] = L$), t aika ja p paine. Nopeus v riippuu sekä ajasta t että paikasta x ja

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h, x) - v(t, x)}{h}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(t, x+k) - v(t, x)}{k}, \dots$$

Määrittää viskositeettikertoimen dimensio perussuurejärjestelmissä $\{M, L, T\}$ ja $\{F, L, T\}$.

18. Olkoon potenssitulo $X = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$ dimensioton perussuurejärjestelmässä $\{M_1, \dots, M_m\}$ ja olkoon $\{M'_1, \dots, M'_m\}$ ekvivalentti perussuurejärjestelmä. Osoita, että X on dimensioton perussuurejärjestelmässä $\{M'_1, \dots, M'_m\}$. Miten tulosta voidaan käyttää dimensioanalyysin laskujen tarkastamiseen?
19. *Reynoldsin luku* Re nesteen tai kaasun virtaukselle putkessa määritellään $Re = \rho v d / \mu$, missä ρ on virteen tiheys, v sen nopeus, μ sen viskositeettikerroin ja d on putken halkaisija. Määrittää Reynoldsin luvun dimensio perussuurejärjestelmissä $\{M, L, T\}$ ja $\{F, L, T\}$.
20. Ratkaise dimensioanalyysikoneella tehtävät 1, 3, 5 ja 6a.
21. Ratkaise dimensioanalyysikoneella tehtävät 11, 12 ja 13.
22. Ratkaise dimensioanalyysikoneella tehtävät 14 ja 15.
23. Syvällä pinnan alla kokoonpuristumattomassa nesteessä uivan sukellusveneen liikevastusvoima f riippuu vain nesteen tiheydestä ρ , viskositeetista μ ($[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$), sukellusveneen nopeudesta v ja poikkileikkauspinta-alasta A . Dimensioanalyysi näyttäisi antavan

$$\frac{f}{\rho v^2 A} = \phi\left(\frac{\rho v A}{\mu}\right),$$

missä $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ on jokin tuntematon kuvaus.

- (a) Onko $p = 2$ oikea dimensiottomien lineaarisesti riippumattomien potenssitulojen eli π -lukujen määrä? Miksi?
- (b) Ovatko löydetty π -luvut oikeat? Jos eivät, niin korjaa ne.
- Älä käytä dimensioanalyysikoneetta äläkä ratkaise yhtälöä $kA = 0$.
24. (a) Ratkaise dimensioanalyysikoneella edellisen tehtävän vastusvoiman lauseke.
- (b) Sukellusveneen pienoismalli tehdään geometrisesti similaaristi suhteessa 1:10 eli kaikki pituudet pienennetään kymmenesosaan. Valmiin sukellusveneen nopeus v on 15 solmua. Millä nopeudella pienoismallia tulee vetää merivedessä? Jos tuo nopeus voitaisiin saavuttaa, niin mikä olisi pienoismallin ja valmiin sukellusveneen liikevastusvoimien suhde?
25. Veneen vastusvoima f riippuu vain veden tiheydestä ρ , veneen nopeudesta v , veneen leveydestä d , viskositeettikertoimesta μ ja putoamiskiihtyvyydestä g .

- (a) Hae dimensioanalyysikoneella vastusvoiman lauseke. Käytä siinä kuuluisia π -lukuja.
 - (b) Jos rakennetaan veneestä pienoismalli, niin mitä relaatioita prototyypin ja pienoismallin tulee toteuttaa?
26. Jatketaan edellistä tehtävää. Jos pienoismalli on geometrisesti similaari suhteessa 1:20 ja prototyypin nopeus $v = 10$ m/s, niin millä nopeudella pienoismallia on kuljetettava? Jos prototyyppi ui 20-asteisessa vedessä, niin määrää sen virteen kinemaattinen viskositeettikerroin, jossa pienoismallia on uitetava.

Luku 3

Erikokoisten eläinten fysiikkaa

Tässä luvussa tarkastellaan kolmea erilaista eläinten similariteettia ja niiden yhteyttä eläinten suorituskykyyn ja elinaikaan.

3.1 Geometrinen ja dynaaminen similariteetti

Geometrisella similariteetilla tarkoitetaan pituuksien suhteiden samuutta. Jos eläimen oleelliset mitat ovat pituus l , paksuus d ja pään halkaisija d_k , niin eläimet 1 ja 2 ovat geometrisesti similaareja, jos¹

$$\left(\frac{d}{l}\right)_1 = \left(\frac{d}{l}\right)_2 \text{ ja } \left(\frac{d_k}{l}\right)_1 = \left(\frac{d_k}{l}\right)_2. \quad (3.1)$$

Dynaamisella similariteetilla tarkoitetaan eläimissä esiintyvien oleellisten voimien suhteiden samuutta. Jos eläimille oleelliset voimat ovat hitausvoima ma , painovoima mg (m on eläimen massa), niin eläimet 1 ja 2 ovat dynaamisesti similaareja, kun

$$\left(\frac{mg}{ma}\right)_1 = \left(\frac{mg}{ma}\right)_2. \quad (3.2)$$

Olkoon l eläimen tyypillinen pituus ja m sen massa. Eläinten tiheys on likimain sama kuin veden tiheys, joten geometrisesti similaareille eläimille pätee

$$l \propto m^{1/3}. \quad (3.3)$$

Tehdään ero mekaanisen ja biologisen ajan välille samoin kuin edellisessä luvussa tehtiin ero mekaaniselle energialle ja lämpöenergialle. Olkoon t_m mekaaninen aika, esimerkiksi eläimen jalan heilahdusaika. Se määräytyy mekaniikan lainalaisuuksien mukaan. Jos eläimet ovat dynaamisesti similaareja, niin niiden kiihtyvyyden $a \propto l/t_m^2$ on oltava vakio (sama kuin g), ja siten

$$t_m \propto m^{1/6} \quad (3.4)$$

Biologisena aikana pidetään esimerkiksi eläimen sydämenlyöntien väliä tai elinaikaa. On havaittu, että eläinten vastinlihasten supistumisnopeudet ovat vakioita. Toisaalta ne ovat suoraan verrannollisia osamäärään l/t_b , joten geometrisesti similaareille eläimille pätee

$$t_b \propto m^{1/3}. \quad (3.5)$$

Näin eläimen koon kasvaessa biologinen aika hidastuu ja hidastuu nopeammin kuin mekaaninen aika.

Käytetään perussuurejärjestelmää $\{M, L, T_b, T_m\}$. Oletetaan, että tarkasteltava eläimeen liittyvä suure S riippuu vain suureista m, l, t_b, t_m eli

$$S = f(m, l, t_b, t_m).$$

1. Tällöin myös $(d_k/d)_1 = (d_k/l)_1/(d/l)_1 = (d_k/l)_2/(d/l)_2 = (d_k/d)_2$.

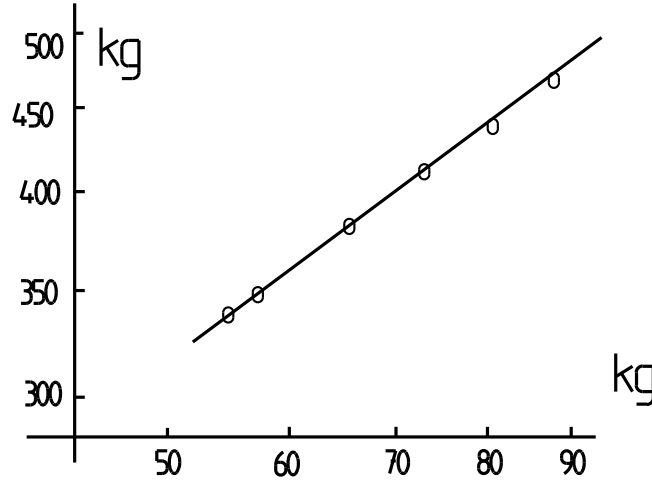
Tällöin Buckinghamin π -teoreemassa $n = 5$ ja $r = 4$, joten π -lukuja on vain yksi, ja siksi on olemassa dimensioton positiivinen vakio C siten, että

$$S = C m^\alpha l^\beta t_b^\gamma t_m^\delta \quad (3.6)$$

joillakin $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nuo kertoimet määräytyvät suureen S dimensiosta: jos $[S] = M^\alpha L^\beta T_b^\gamma T_m^\delta$, niin $S = C m^\alpha l^\beta t_b^\gamma t_m^\delta$. Olkoon S lihasvoima f , jolloin sen dimensio on MLT_b^2 , sillä aika on nyt biologista. Siten $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = -1$ ja $\delta = 0$ eli kaavojen (3.3) ja (3.5) nojalla

$$f = C m l t_b^{-2} \propto m^{2/3}. \quad (3.7)$$

Tämä tulos on hyvin tarkka saman lajin sisällä kuten kuvassa 3.1. Siinä on esitetty painonnoston yhteistuloksen (työntö, tempaus, punnerrus) maailmanennätys nostajan massan funktiona². Fysiologisesti tulos on uskottava, sillä eläinten liikuntali-
hassolujen paksuus ja supistusvoima ovat vakioita ja solut ovat lihaksen mittaisia. Siten lihasvoima on suoraan verrannollinen solujen määrään, joka puolestaan on suoraan verrannollinen lihaksen poikkileikkauksen pinta-alaan.



Kuva 3.1: Painonnoston yhteistulosten maailmanennätyksiä painoluokittain.

Tarkastellaan eläimen sydämen sykettä ν . Sen dimensio on T_b^{-1} , joten geometrisen similariteetin vallitessa

$$\nu \propto t_b^{-1} \propto m^{-1/3}.$$

Mitä suurempi eläin, sitä levollisemmin sen sydän sykkii. Parigrammaisen päästäisen sydän lyö 10 kertaa sekunnissa, 5000-kilogrammaisen norsun sydän kerran kahdessa sekunnissa, joten geometrinen similariteetti antaa niiden sydämensykeiden suhteeksi liian paljon (harjoitustehtävä). Nokkahiiren ja elefantin mittasuhteet ovat kuitenkin hieman erilaiset, joten ne eivät ole tarkkaan geometrisesti similaareja.

Eläimen aineenvaihdunnan tehon P dimensio on $M^1 L^2 T_b^{-3}$ sillä aika on jälleen biologista. Siten kaavojen (3.3) ja (3.5) nojalla

$$P \propto m l^2 t_b^{-3} \propto m^{2/3}, \quad (3.8)$$

mikä on sama massariippuvuus kuin lihasvoimalla. Tulos on sikäli uskottava, että aineenvaihdunta liittyy keuhkojen, verisuonten, ruoansulatuskanavan pinta-alaan: jos $P \propto A$, niin kaavan (3.3) nojalla $P \propto m^{2/3}$. Kuitenkin on havaittu *Kleiberin lain*

$$P \propto m^{3/4} \quad (3.9)$$

2. M. Lietzke: Relation between weight-lifting totals and body weight. Science 124 (1956), 486–487.

pätevän harvoja poikkeuksia lukuunottamatta läpi koko eläinkunnan yksisoluisista eliöistä nisäkkäisiin asti³.

3.2 Elastinen ja staattinen similariteetti

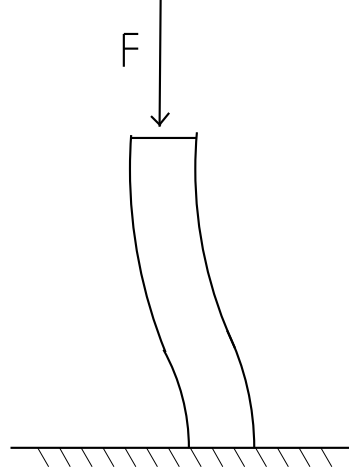
Eläimen tukirangan on noudatettava yleisiä kimmo- ja lujuusopin lainalaisuuksia. Tarkastellaan suurta luuta pystyssä olevana kimmoisana sauvana, joka on kiinnitetty alapäästään ja jonka pituus on l ja paksuus d , ks. kuva 3.2. Sauvan yläpään keskikohtaan vaikuttaa voima F suoraan alaspäin. Jos sauvan yläpäättä poikkeutetaan hieman vaakasuuntaan, se palaa alkuasentoonsa, kunhan sauvaa kuormittava voima F ei ole liian suuri. Kasvatetaan voimaa F ja toistetaan sauvan yläpään poikkeuttamista. Tietystä voiman F arvosta F_n alkaen sauvan yläpää ei palaudu alkuasentoonsa, vaan jää sivuun. On tapahtunut sauvan *nurjahtaminen*. Kimmo-opin mukaan⁴ pätee

$$F_n = k \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (3.10)$$

missä E on luun kimmokerroin (riippuu siis sauvan materiaalista), k sauvan kiinnitystavasta riippuva dimensioton vakio ja I on sauvan jäyhyysmomentti, joka riippuu vain sauvan poikkileikkauksen geometriasta. Pyöreälle homogeeniselle putkelle, jonka sisäsäde on r ja ulkosäde on R , pätee⁵

$$I = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}.$$

Umpinaiselle homogeeniselle pyöreälle sauvalle on siksi $I = \pi d^4/64$.



Kuva 3.2: Keskeisesti voimalla F puristetun suoran sauvan kimmainen nurjahdus.

Olkoon luun nurjahdusvoiman F_n ja sitä puristavan voiman (painovoiman) F_g suhde vakio eli $F_n \propto F_g$. Koska $I \propto d^4$, niin $F_n \propto Il^{-2} \propto d^4 l^{-2}$. Toisaalta $F_g \propto ld^2$, joten

$$l^3 \propto d^2 \text{ eli } d \propto l^{3/2}. \quad (3.11)$$

Sanotaan, että *elastinen similariteetti* on voimassa, jos tyypillisen pituuden l ja paksuuden d välillä pätee riippuvuus (3.11).

3. Huomaa, että Kleiberin laki pätee lajien suhteen. Lajien sisällä pätee riippuvuus $P \propto m^{2/3}$ kuten kuvassa 3.1.

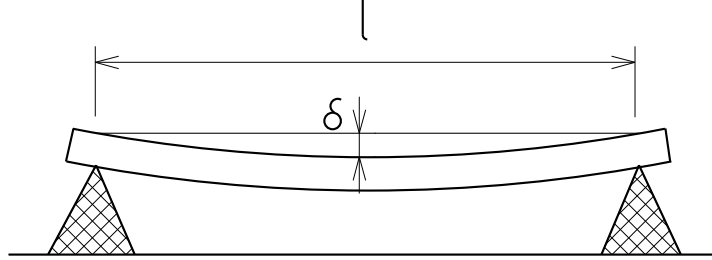
4. A. Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi II, WSOY Helsinki 1970, ss. 674–676.

5. A. Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi I, WSOY Helsinki 1969, s. 206.

Tarkastellaan seuraavaksi päistään tuettua vaakasuoraa palkkia, jonka pituus on l , paksuus d ja taipuma δ , ks. kuva 3.3. Palkin taipumalle pätee⁶

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{F}{EI} l^3, \quad (3.12)$$

missä E on palkin kimmokerroin ja I sen jäyhyysmomentti. Oletetaan, että palkin taipuman ja sen pituuden suhde on vakio. Koska $F = F_g \propto ld^2$ ja $I \propto d^4$, niin jälleen kaava (3.11) toteutuu. Näin kaksi yksinkertaista maalla seisovan selkärankaisten eläimen mallia johtaa elastiseen similariteettiin.



Kuva 3.3: Tasaisesti kuormitettu kaksitukinen palkki, jonka tukien väli on l ja taipuman suurin arvo δ .

Staatillisen similariteetin sanotaan vallitsevan, jos eläimen tyypillinen pituus l ja paksuus d toteuttavat

$$d \propto l^2. \quad (3.13)$$

Kuvan 3.3 palkin rikkoutumatta kestävä suurin taivutusjännitys on⁷

$$\sigma_c = \frac{F_c l h}{16I}, \quad (3.14)$$

missä h on palkin poikkileikkauspinnan korkeus, $I = dh^3/12$ jäyhyysmomentti ja F_c maksimijännityksen aiheuttava voima. Oletetaan, että $h \propto d$, $F_c/F_g =$ vakio ja luuaineksen kestävyys on vakio. Silloin

$$ld^2 \propto F_g \propto F_c \propto \frac{I}{lh} \propto \frac{d^3}{l},$$

mistä staattinen similariteetti (3.13) seuraa.

Koska lihasvoima f on suoraan verrannollinen lihaksen poikkipinta-alaan ja lihaksen supistumisnopeus v on vakio, niin lihasteholle P pätee

$$P = fv \propto d^2. \quad (3.15)$$

Jos oletetaan, että perusaineenvaihdunnan teho on suoraan verrannollinen lihastehoon, saadaan perusaineenvaihdunnan tehon massariippuvuus laskemalla d^2 . Osamäärä m/P ilmaisee ajan, jossa kudosmäärä m kuluttaa energiansa. Se on luonnollista tunnistaa biologiseksi ajaksi t_b . Toisaalta edellä todettiin lihassolujen vakioisen supistumisnopeuden perusteella, että $t_b \propto l$. Muistetaan, että eläimen massa $m \propto ld^2$, ja laaditaan näiden tietojen perusteella taulukko 3.1

Huomataan, että Kleiberin lain selitykseksi riittää olettaa, että eläimet ovat elastisesti similaareja ja perusaineenvaihdunnan teho on suoraan verrannollinen lihastehoon. Kumpikin oletus on luonnollinen maalla eläville selkärankaistille. Muille eläimille —kuten linnuille tai kaloille— Kleiberin laki jää selittämättä. Elastinen similariteetti selittää tarkimmin myös päästäisen ja norsun sydämenlyöntien välisen

6. A. Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi I, s. 249.

7. A. Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi I, ss. 358, 206.

similariteetti	d	m	l	d	$P \propto d^2$	$t_b \propto m/P$
geometrinen	l	l^3	$m^{1/3}$	$m^{1/3}$	$m^{2/3}$	$m^{1/3}$
elastinen	$l^{3/2}$	l^4	$m^{1/4}$	$m^{3/8}$	$m^{3/4}$	$m^{1/4}$
staattinen	l^2	l^5	$m^{1/5}$	$m^{2/5}$	$m^{4/5}$	$m^{1/5}$

Taulukko 3.1: Eläimen pituuden l , paksuuden d , massan m , lihastehon P ja biologisen ajan t_b riippuvuuksia eri similariteettien vallitessa.

ajan erot. Taulukosta 3.1 nähdään, että niin l kuin m/P antavat saman massariippuvuuden biologiselle ajalle.

Tarkastellaan vielä hieman toisella tavalla eläinten sydämensykyttä eli sydämen lyöntitaajuutta ($\nu \propto 1/t_b$). Lähdetään kokeellisesti havaitusta Kleiberin laista. Aineenvaihdunnan teho on suoraan verrannollinen elimistön hapenkulutukseen, joka on suoraan verrannollinen yhden sydämenlyönnin aikana aorttaan virtaavaan verimäärään. Se lienee suoraan verrannollinen sydämen massaun, joka lienee suoraan verrannollinen eläimen massaun m . Sydämen aikayksikössä pumpattaava verimäärä Q on sen lyöntitaajuuden ja yhden lyönnin aikana pumpatun verimäärän tulo, jolloin $Q \propto m\nu$. Elimistön on saatava happea määrä $\propto m^{3/4}$, joten $m\nu \propto m^{3/4}$, mistä seuraa jälleen elastisen similariteetin mukainen

$$\nu \propto m^{-1/4}.$$

Biologiset ajat sydämenlyöntien väli ja elinaika molemmat noudattavat riippuvuutta $t \propto m^{1/4}$, joten jokaiselle nisäkkäälle niiden osamäärä on sama vakio, ja siten jokaisen nisäkkään elinaikana sen sydän lyö yhtä monta kertaa —puolitoista miljardia kertaa.

3.3 Juokseminen tasaisessa tai mäkisessä maastossa

Tarkastellaan juoksemista voimakkaasti yksinkertaistaen ja yritetään selvittää eläimen etenemisnopeuden v riippuvuutta sen massasta m . Olkoon eläimen pituus l , noudattakoon se elastista similariteettia ja olkoon eläimen jalkojen pituus l_j suoraan verrannollinen sen pituuteen l . Kaksi- tai nelijalkaisen eläimen liikkeessä tasaisella pinnalla energiaa kuluu raajojen heilutteluun teholla P ,

$$P \propto \frac{J\omega^2/2}{t_a}, \quad (3.16)$$

missä $J = m_j l_j^2/3$ on eläimen jalan hitausmomentti lonkka- tai olkavivelen suhteen, m_j on jalan massa, ω on jalan (pyörimis-)liikkeen kulmanopeus, $\omega \approx v/l_j$. Askelaika $t_a = s/v$, kun s on askeleen pituus. Pelkän jalkojen heiluttelun yhden askeleen verran oletetaan siis kuluttavan energiaa määrän, joka on suoraan verrannollinen jalkojen liike-energiaan niiden heilahtaessa.

Koska $s \propto l_j \propto l \propto m^{1/4}$ ja $m_j \propto m$, niin yhtälöstä (3.16) saadaan, että

$$P \propto \frac{m_j l_j^2 v^2 / l_j^2}{s/v} \propto \frac{mv^3}{l} \propto m^{3/4} v^3. \quad (3.17)$$

Toisaalta käytettävissä on tehoa määrä P_m , joka on likimain suoraan verrannollinen perusaineenvaihdunnan tehoon, jolloin Kleiberin lain mukaan $P_m \propto m^{3/4}$. Jos liikutaan maksimaalisella teholla ($P = P_m$), niin

$$v^3 \propto P_m^{-3/4} \propto m^{3/4} m^{-3/4} = 1$$

eli tasamaalla juoksevan eläimen maksimaalinen nopeus ei riipu sen massasta.

Tarkastellaan seuraavaksi juoksemista ylämäkeen. Jalkojen heiluttamisen lisäksi energiaa kuluu eläimen massakeskipisteen nostamiseen painovoimakentässä. Nostamiseen tarvittava teho $P_n = mgv \sin \alpha$, missä α on ylämäen nousukulma. Siten $P_n \propto mv$. Osa käytettävissä olevasta tehosta kuluu jalkojen heiluttamiseen, mutta jyrkähkössä mäessä valtaosa tehosta kuluu massakeskipisteen nostamiseen, joten $P_n \propto P_m$, jolloin Kleiberin lain nojalla

$$v \propto P_m m^{-1} \propto m^{-1/4}.$$

Näin massiivisempi eläin juoksee hitaammin ylämäkeen. Sama riippuvuus saadaan myös kiipeämiselle pystysuoraan ylöspäin, sillä siihen tarvittava teho $P_n = mgv$. Siten orava kiipeää vikkelämmin puuhun kuin kissa tai ihminen.

3.4 Käveleminen ja hyppiminen

Tarkastellaan seuraavaksi eläimen kävelyä. Olkoon edelleen eläimen massa m , pituus l ja jalan pituus l_j . Tavallisessa kävelyssä jälkeen jäänyt jalka nostetaan ilmaan taivuttamalla sitä hieman, jolloin se pääsee heilahtamaan vapaasti eteen. Jalan heilahdusaika eli askelaika t_a on luvun 2 johdannon perusteella suoraan verrannollinen jalan pituuden neliöjuureen. Askelpituus s on suoraan verrannollinen jalan pituuteen, joka on suoraan verrannollinen eläimen pituuteen, joten kävelevän eläimen vauhti on

$$v = \frac{s}{t_a} \propto \frac{l_j}{\sqrt{l_j}} = \sqrt{l_j} \propto \sqrt{l}. \quad (3.18)$$

Näin suuret eläimet kävelevät nopeammin kuin pienet. Tämä poikkeaa juoksun tuloksesta, koska juoksussa jalan lihakset joutuvat tekemään työtä jalan liikuttamiseksi. Suurilta eläimiltä kuluu pieniä eläimiä enemmän energiaa, kun ne juoksevat. Käytetty yksinkertaistettu kävelyn malli olettaa, että kävellessä ei energiaa kulu lainkaan. Kitka ja liikehäviöt kävellessä kuluttavat toki hieman energiaa, mutta vähän verrattuna juoksemisen energiantarpeeseen. Jos elastinen similariteetti vallitsee, niin $l \propto m^{1/4}$, joten

$$v \propto \sqrt{m^{1/4}} = m^{1/8}. \quad (3.19)$$

Nopeuden massariippuvuus on kuitenkin varsin heikko: jos massojen suhde on 10, niin nopeuksien suhde on 1,26.

Tarkastellaan m -massaisen eläimen hyppäämistä suoraan ylöspäin. Sen lihasvoima f on suoraan verrannollinen lihasten poikkileikkauspinta-alaan, joten elastisen similariteetin vallitessa $f = \alpha(m^{3/8})^2 = \alpha m^{3/4}$, missä $\alpha > 0$ on vakio. Newtonin toisen lain mukaan eläimen kiihtyvyys sen ponnistaessa on siten

$$a = \frac{f - mg}{m} = \alpha m^{-1/4} - g. \quad (3.20)$$

Ponnistusmatka s hyppyssä on suoraan verrannollinen eläimen pituuteen, joten elastisen similariteetin nojalla

$$s \propto l \propto m^{1/4}. \quad (3.21)$$

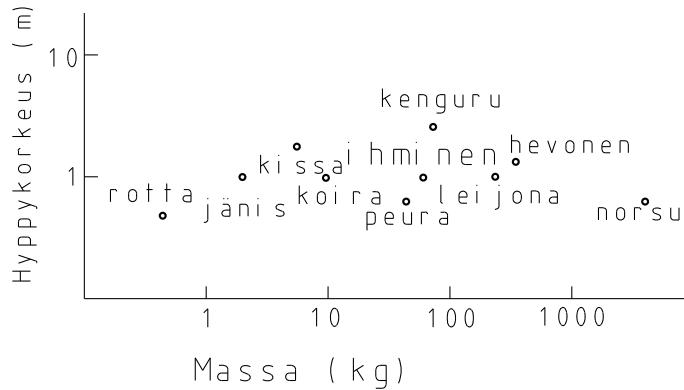
Eläimen lähtönopeus eli nopeus ponnistuksen päättyessä on⁸

$$v = \sqrt{2as} \propto \sqrt{(\alpha m^{-1/4} - g)m^{1/4}} = \sqrt{\alpha - gm^{1/4}}. \quad (3.22)$$

Ponnistuksen päätyttyä eläimeen vaikuttavat vain painovoima ja ilmanvastus. Jos jälkimmäinen on mitätön, niin hypyn korkeus on

$$h = \frac{v^2}{2g} \propto \alpha - gm^{1/4}. \quad (3.23)$$

Ponnistusta varten eläin kyykistyy, joten ponnistumatkaa ei tule laskea hypyn korkeuteen, jona tulee pitää eläimen massakeskipisteen kohoamismatkaa⁹. Siten pieni voi ponnistaa maasta korkeammalle kuin suuri! Jos $m \approx 0$ eli $gm^{1/4} \ll \alpha$, niin hyppykorkeus ei riipu massasta. Kuvassa 3.4 on joidenkin nisäkkäiden hyppykorkeuksia. Norsun heikkoa tulosta selittää kaavan (3.23) lisäksi se, että norsu joutuu käyttämään lihaksiaan luustonsa tukemiseen.



Kuva 3.4: Joidenkin nisäkkäiden suurin hyppykorkeus massan funktiona

Pienillä eläimillä ($l \leq 10$ cm) ilmanvastuksen osuus on merkittävä. Tavallisesti ilmanvastus on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, joten eläimen liikeyhtälö on sen ponnistuksen päätyttyä hetkellä $t = 0$

$$my''(t) = -\frac{1}{2}\rho C_D A y'(t)^2 \operatorname{sgn} y'(t) - mg, \quad t > 0, \quad (3.24)$$

missä¹⁰ $y(t)$ on eläimen massakeskipisteen korkeus hetkellä t mitattuna sen korkeudesta ponnistuksen päättyessä, $\rho > 0$ on ilman tiheys, $C_D > 0$ on vastuskerroin ja A eläimen poikkileikkauspinta-ala kohtisuoraan hypyn suuntaa vastaan. Yhtälön (3.24) oikean puolen ensimmäinen termi vastaa ilmanvastusta ja toinen painovoimaa. Alkuehdot ovat

$$y(0) = 0 \quad \text{ja} \quad y'(0) = v. \quad (3.25)$$

8. Tasaisesti kiihtyvälle liikkeelle saadaan liikeyhtälön $my''(t) = ma$ ratkaisuna

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 + y'(0)t + y(0), \quad t \geq 0.$$

Hyppy alkaa levosta ja origosta eli $y'(0) = 0$ ja $y(0) = 0$. Siten hetkellä t sijainti $s = y(t) = at^2/2$ ja nopeus $v = y'(t) = at$, joten $s = v^2/2a$ eli $v = \sqrt{2as}$.

9. Korkeushypyssä vaaditaan, että hyppääjä ylittää riman. Massakeskipisteen nousu on noin metrin vähemmän kuin riman korkeus. Vauhdillisessa korkeushypyssä hyppääjä käyttää ponnistuksen lisäksi kehoonsa varastoitunutta liike-energiaa.

10. Merkkikuvauksen sgn määritelmä on

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{jos } x < 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0. \end{cases}$$

Alkuarvotehtävän (3.24)–(3.25) ratkaiseminen on helppoa muuttujien separointimenetelmällä, sillä yhtälössä ei esiinny kuvausta $y(t)$. Merkitään

$$z(t) = \frac{y'(t)}{g} \quad \text{ja} \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho C_D A g}{2m}},$$

jolloin yhtälöstä (3.24) tulee hypyn nousuvaiheen $0 < t < t_1$ ($y'(t_1) = 0$) aikana

$$\frac{z'(t)}{1 + \beta^2 z(t)^2} = -1 \quad \text{kaikilla } t \in]0, t_1[.$$

Integroimalla saadaan

$$\frac{1}{\beta} \arctan \beta z(t) = c_0 - t \quad \text{kaikilla } t \in]0, t_1[$$

missä vakion $c_0 \in \mathbb{R}$ määrää alkuehto $z(0) = y'(0)/g = v/g$. Siten

$$y'(t) = g z(t) = \frac{g}{\beta} \tan \beta(c_0 - t) \quad \text{ja} \quad c_0 = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{\beta v}{g}.$$

Välillä $[0, c_0]$ $y'(t) > 0$ ja $y'(c_0) = 0$, joten hetkellä $t = c_0$ hyppy on lakipisteessään. Integroimalla saadaan, että

$$y(t) = \frac{g}{\beta^2} \ln \cos \beta(c_0 - t) + c_1 \quad \text{kaikilla } t \in [0, c_0],$$

missä vakio $c_1 \in \mathbb{R}$ voidaan laskea alkuehdosta $y(0) = 0$. Joka tapauksessa hypyn korkeus on

$$\begin{aligned} h = y(c_0) - y(0) &= \frac{g}{\beta^2} (\ln \cos 0 - \ln \cos \beta c_0) \\ &= -\frac{g}{\beta^2} \ln \cos \arctan \frac{\beta v}{g} = -\frac{g}{\beta^2} \ln \frac{g}{\sqrt{g^2 + (\beta v)^2}} \\ &= \frac{g}{2\beta^2} \ln \left(1 + \frac{\beta^2 v^2}{g^2} \right) = \frac{m}{\rho C_D A} \ln \left(1 + \frac{\rho C_D A v^2}{2mg} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Koska $\ln(1+x) \approx x$ kaikilla $x \approx 0$ ja $\ln(1+u) < u$ kaikilla $u > 0$, niin

$$h \approx \frac{m}{\rho C_D A} \frac{\rho C_D A v^2}{2m} = \frac{v^2}{2g}, \quad \text{jos } \frac{1}{2} \rho C_D A v^2 \ll mg, \quad (3.27)$$

$$h < \frac{m}{\rho C_D A} \frac{\rho C_D A v^2}{2mg} = \frac{v^2}{2g} \quad \text{aina.} \quad (3.28)$$

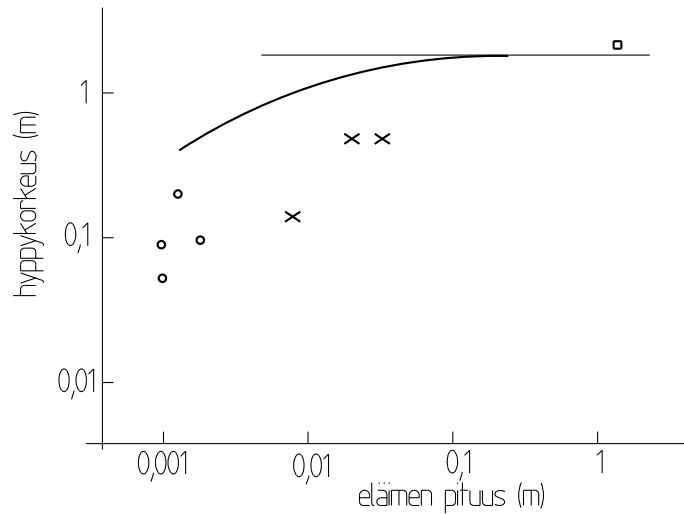
Merkitään $h_m = v^2/2g$ ja olkoon e hyppyyn käytettävissä oleva energia eläimen massayksikköä kohti. Silloin

$$mgh_m = \frac{1}{2}mv^2 = em \quad \text{eli} \quad h_m = \frac{v^2}{2g} = \frac{e}{g}. \quad (3.29)$$

Jos ilmanvastusta ei ole, niin hyppy saavuttaa korkeuden h_m , ja silloin tietylle korkeudelle hyppäämiseen tarvittava energia massayksikköä kohti ei riipu eläimen koosta (massasta). Ilmanvastuksen huomioon ottava kaava (3.26) on suureen h_m avulla kirjoitettuna

$$h = \frac{m}{\rho C_D A} \ln \left(1 + \frac{\rho C_D A h_m}{m} \right) < h_m. \quad (3.30)$$

Kuvassa 3.5 näkyy ilmanvastuksen vaikutus. Jos eläimellä on hyppyyn käytettävissä 20 J/kg, niin hypyn korkeus on enintään 2 m (suora viiva). Kaarevalla viivalla on piirretty kaavan (3.30) antama tulos. Kirppujen hypätessä Reynoldsin luku on



Kuva 3.5: Eläimen hypyn korkeus eläimen pituuden funktiona. Kokeelliset arvot ovat kirpulle (○), heinäsirkalle (×) ja leopardille (□).

niin pieni ($Re < 100$), että vastuskerroin riippuu nopeudesta ja niin häviöt ovat suurempia kuin kaavan (3.30) mukaan.

Tarkastellaan ihmisen hyppäämistä, jolloin ilmanvastus voidaan jättää huomiotta. Ponnistaessa tehty työ fs muuttuu liike-energiaksi $mv^2/2$. Hypyn korkeus $h = h_m = fs/mg$. Ponnistumatka on likimain $0,3l$, missä l on ihmisen pituus. Tavallisen harjaantumattoman ihmisen lihasvoima $f \approx mg$, joten vauhdittomassa korkeushypyssä hän hyppää korkeudelle $h \approx l/3$. Tämä on massakeskipisteen nousukorkeus hypyssä. Hyppykorkeutta saadaan kasvatettua ottamalla vauhtia ja käyttämällä jalkoja joustavana seipäänä tai erillistä pitkää seivästä apuvälineenä. Tällöin suuri osa vaakasuoraan etenevän hyppääjän liike-energiasta saadaan käytettyä massakeskipisteen nostamiseen. Ihminen pystyy juoksemaan parhaimmillaan $v \approx 10$ m/s, joten juoksuun varastoitunut liike-energia riittää nostamaan seiväshyppääjän enintään korkeudelle

$$h = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg} = \frac{v^2}{2g} \approx 5 \text{ m}.$$

Pituushypyssä hypyn pituus on $L = v^2 \sin 2\gamma/g$, missä v on lähtonopeus ponnistuksen päättyessä ja γ on ponnistuskulma. Pisimmälle pääsee, kun $\gamma = \pi/4$, jolloin nopeudella $v \approx 10$ m/s saadaan hypyn pituudelle yläarvio $L \approx 10$ m.

Ihmisen ponnistumatka vauhdittomassa korkeushypyssä on $s \approx 0,5$ m ja hyppykorkeus $h \approx 0,5$ m. Keskimääräisen kiihtyvyyden ponnistuksessa tulee siksi olla vähintään $a = gh/s \approx g$. Heinäsirkan ($m = 3$ g) hypyn ponnistumatka on noin 3 cm ja hypyn korkeus noin 50 cm, joten keskimääräisen kiihtyvyyden ponnistuksessa tulee olla ainakin $50/4 \text{ g} \approx 12g$. Kirppu ($m \approx 0,5$ mg) kiihdyttää vieläkin kiivaammin: sille $a \approx 100g$. Ennätys on sepillä, $a \approx 400g$.

Näin suuria kiihtyvyyksiä ei voida saavuttaa lihasten suoran supistamisen avulla, sillä lihassolujen supistumisnopeus on vakio, ja siksi kirpun lihasten supistumisaika on 10 ms. Kirpun ponnistustus tapahtuu alle yhden millisekunnin aikana. Ennen loikkaa kirppu varastoi lihastyöllä energiaa katapulttimekanismiinsa (hyppyjalkojen resiliini). Ponnistaessaan se vain laukaisee lihaksilla katapulttinsa, jolloin se saavuttaa kiihdyttävän voiman, joka on satakertainen sen omaan painoon verrattuna.

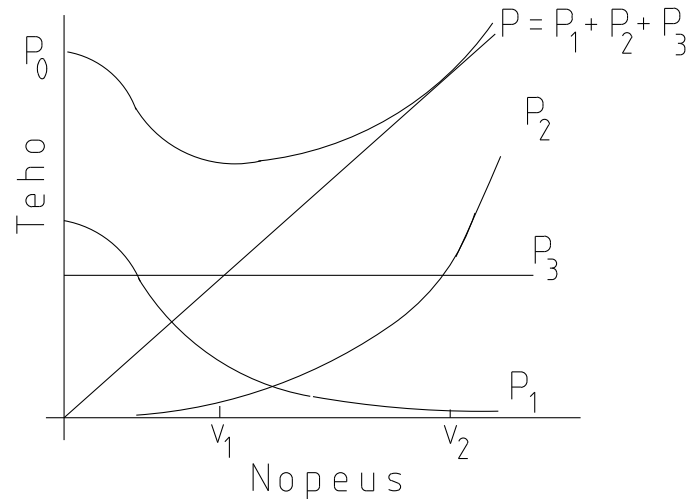
3.5 Ilmaliikunta

Eläimet liikkuvat kolmella eri perustavalla ilmassa: liitäen, lentäen ja lelutellen. *Liidossa* eläimen siivet tai lentimet eivät liiku, vaan eläin käyttää hyväkseen nousevia ja laskevia ilmavirtauksia tai tyytyy liito-oravan tavoin vain pidentämään hyppyään. Suurimmat linnut ($m \approx 10$ kg) liikkuvat pääasiassa liitäen. *Lento* perustuu siipien räpyttämiseen ja siinä eläin etenee. Nisäkkäistä vain lepakot lentävät, nykymate-lijoista ei yksikään lennä. Varhainen kondorityyppinen lintu teratornis on suurin tunnettu lentämään tai liitämään kyennyt lintu. Sen siipien kärkiväli oli 5–7,6 m, massa $m \approx 20$ kg, ja se kuoli sukupuuttoon 100 000 vuotta sitten. Liitolisko pteranodon oli saman kokoinen kuin teratornis, mutta suurin tunnettu ilmaliikuntaan kyennyt eläin on sen sukulainen quetzalcoatlus, jonka siipien kärkiväli oli 13 m ja massa 100 kg. Se kuoli sukupuuttoon 65 miljoonaa vuotta sitten. Lentokyvottomät strutsit voivat saavuttaa 170 kilogramman massan ja 2,5 metrin pituuden. Nykylin-nuista lähes kaikki kykenevät lentämään. Lentävien nykylintujen massa vaihtelee 3 grammasta 10 kilogrammaan. Vain pienimmät linnut (esimerkiksi kolibri) kykenevät *lekuttelemaan* eli lentämään paikallaan pysyen. Lentäviä tai lekuttelevia hyönteisiä tunnetaan 750 000 lajia, joista pienimmät ovat massaltaan $25 \mu\text{g}$ ja suurimmat 25 g.

Linnun lentäessä tehoa kuluu:

1. Määrä P_1 sen alapuolella olevan ilman piiskaamiseen liikkeelle alaspäin, jol-loin syntyy ylöspäin vaikuttava ja gravitaation kumoava voima.
2. Vartalon ilmanvastuksen voittamiseen määrä P_2 , joka kasvaa nopeasti linnun nopeuden kasvaessa,
3. Siipien ilmanvastuksen voittamiseen määrä P_3 , joka on ensimmäisessä ap-proksimaatiossa riippumaton linnun nopeudesta.

Kuvassa 3.6 on esitetty tehot P_1 , P_2 ja P_3 linnun lentonopeuden v funktiona.



Kuva 3.6: Lentämiseen tarvittava teho $P = P_1 + P_2 + P_3$ nopeuden funktiona. Teho P_1 kuluu painovoiman, teho P_2 vartalon ilmanvastuksen ja teho P_3 siipien ilmanvastuksen voittamiseen. Teho P_0 tarvitaan lekutteluun.

Mitä nopeammin lintu lentää, sitä enemmän se leikkaa ilmaa siivillään aikayksikössä ja siten ilman saama nopeus alaspäin pienenee. Tämä selittää, miksi painovoiman voittamiseen tarvittava teho P_1 pienenee nopeuden kasvaessa (harjoitustehtävä). Nopeudella v_1 tehoa kuluu vähiten ja lintu pysyy annetulla energiamäärällä E kauiten ilmassa, sillä lentoaika $t = E/P$. Tämä nopeus sopii saalistaval-le linnulle, mutta muuton aikana on tärkeämpää päästä annetulla ravintomäärällä mahdollisimman pitkälle eli hakea lentomatkan $s = vt = Ev/P$ suurinta arvoa. Se

saavutetaan, kun P/v on pienin, jolloin

$$\frac{P'(v)}{v} - \frac{P(v)}{v^2} = 0 \text{ eli } P(v) = P'(v)v.$$

Siten pisin lentomatka saavutetaan nopeudella $v_2 > v_1$, ja se voidaan määrätä graafisesti hakemalla tehokäyrän tangentti, joka kulkee origon kautta. Ne leikkaavat pisteessä $(v_2, P(v_2))$.

Linnun lentäessä sen siipeen vaikuttaa nostovoima

$$f_L = \frac{1}{2}C_L\rho Av^2, \quad (3.31)$$

missä $C_L > 0$ on nostokerroin, $\rho > 0$ ilman tiheys $A > 0$ siiven pinta-ala ja v etenemisnopeus. Nostovoiman on kumottava painovoima eli $f_L = mg$, missä m on linnun massa. Siten etenemisnopeus

$$v = \left(\frac{2mg}{C_L\rho A}\right)^{1/2} \propto m^{1/6}, \quad (3.32)$$

jos $A \propto m^{2/3}$. Tähän verrannollisuuteen päästään olettamalla lintujen noudattavan geometrista similariteettia, jolloin $A \propto l^2$ (l on linnun siipien kärkiväli) ja $l \propto m^{1/3}$. Mitä massiivisempi tai suurempi lintu, sitä nopeammin sen on lennettävä ja sitä suuremman lähtönopeuden ja pidemmän kiitoradan se tarvitsee päästäkseen maasta tai vedestä lentoon.

Linnun vartalon ilmanvastus on

$$f_D = \frac{1}{2}C_D\rho A_B v^2, \quad (3.33)$$

missä $C_D > 0$ on vastuskerroin ja $A_B > 0$ vartalon liikettä vastaan kohtisuoran poikkileikkauspinnan ala. Geometrisen similariteetin toteutuessa $A_B \propto l^2$, ja etenemiseen tasaisella nopeudella v kuluu siten vartalon osalta teho

$$P_2 = f_D v = \frac{1}{2}C_D\rho A_B v^3 \propto A_B v^3 \propto m^{2/3}(m^{1/6})^3 = m^{7/6}. \quad (3.34)$$

Tämä teho kasvaa nopeammin massan funktiona kuin linnun lihaksistaan saama teho $P_m \propto m^{2/3}$, joten lentävien eläimien massalla on yläraja¹¹. Maapallolla se on noin 12 kg. Sitä massiivisempien eläinten on liidettävä ja lihasvoimin ne voivat tehdä vain lyhyitä lennonpyrähdyksiä, joissa hetkellisesti lihasteho on suuri.

Tarkastellaan lekuttelua eli ilmaliiikuntaa, jossa eläin pysyy paikallaan. Tyyppillistä se on mehiläisille ja kärpäisille; linnuista vain pienimmät kykenevät siihen. Lekuttelussa eläin piiskaa siivillään alapuolellaan olevaa ilmaa alaspäin. Siitä aiheutuu nostava voima¹² $f_n = \rho A v^2$, missä A on alaspäin liikkuvan ilmapatsaan poikkileikkausala ja v sen nopeus. Oletetaan yksinkertaisuudeksi nopeuden v pysyvän vakiona siiven iskun ajan. Jos m -massainen eläin pysyy ilmassa, niin $f_n = mg$, jolloin

$$v = \left(\frac{mg}{\rho A}\right)^{1/2}.$$

Lekutteluun kuluva teho on siten

$$P_0 = f_n v = \frac{(mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho A}} \propto \frac{m^{3/2}}{m^{1/3}} = m^{7/6}, \quad (3.35)$$

11. Massalla olisi yläraja myös elastisen similariteetin toteutuessa, jolloin $P \propto M^{3/4}$. Huomaa, että maanisäkkäiden tarkastelussa oletettiin, että niiden lihasteho on suoraan verrannollinen perusaineenvaihdunnan tehoon. Linnuille tämä ei päde: niiden lihasteho $\propto m^{2/3}$, mutta perusaineenvaihdunnan teho on Kleiberin lain mukaisesti $\propto m^{3/4}$.

12. Voiman lauseke voidaan johtaa seuraavasti. Yhteen siiveniskuun kulukoon aika t_1 . Siipi lyö siinä liikkeelle ilmamassan $m_1 = \rho A v t_1$. Voima, joka tarvitaan, on $f_n = m_1 v / t_1 = \rho A t_1 v v / t_1 = \rho A v^2$.

sillä geometrisen similariteetin nojalla jälleen $A \propto m^{2/3}$, sillä A on likimain siiven pinta-ala.

Havaintoaineiston nojalla siiven pinta-ala $A_s \approx am^{2/3}$ ja käytettävissä oleva teho $P_m \approx bm^{2/3}$, missä $a \approx 0,1 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2/3}$ ja $b \approx 20 \text{ W kg}^{-2/3}$. Pitkään leluttelevan linnun tai hyönteisen suurin mahdollinen massa saadaan tällöin ehdosta $P_0 \leq P_m$:

$$\frac{(mg)^{3/2}}{\sqrt{\rho 2am^{2/3}}} \leq bm^{2/3} \implies m \leq \frac{2\rho ab^2}{g^3} \approx 100 \text{ g}.$$

3.6 Vesiliikunnasta

Maalla ja ilmassa liikkuvat eläimet joutuvat ponnistelemaan painovoimaa vastaan: tasamaalla juoksemisen ja kävelemisen sekä seisoskelun tarkempi analyysi paljastaa että niissäkin lihastehoa kuluu painovoiman voittamiseen. Merkittävä teho siihen kuluu ilmaliikunnassa, kiipeämisessä ja juoksemisessa ylämäkeen. Vedessä elävillä otuksilla on toisin. Painovoimalla on niille merkitystä vain suunnistamisen kannalta (tasapainoaisti) ja epäsuorasti hydrostaattisen paineen kautta (kalan pintaan kohdistuva vedenpaine on suoraan verrannollinen sen yläpuolella olevan vesipatsaan korkeuteen). Vesiharjoittelu on ollut halpa keino totuttaa avaruuslentäjät painottomuuteen. Vedessä liikkujien on kuitenkin tehtävä maa- ja ilmaliikkuja enemmän työtä väliaineen vastuksen voittamiseksi.

Vesieläinten koko vaihtelee laajasti. Pienimpien bakteerien ja sinivalaan masojen suhde on 10^{-25} . Virteessä liikkumisessa tärkeä suure on Reynoldsin luku $Re = lv/\nu$, missä l on eläimen pituus, v etenemisnopeus ja ν virteen kinemaattinen viskositeettikerroin. Vedelle $\nu \approx 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (10°C). Reynoldsin luku vaihtelee bakteerien arvosta 10^{-8} sinivalaiden arvoon 10^8 .

Reynoldsin luku on suoraan verrannollinen hitausvoimien ja kitkavoimien suhteeseen (ks. luku 2.7). Jos siis Reynoldsin luku on hyvin pieni ($Re \ll 1$), niin hitausvoimat ovat mitättömiä kitkavoimiin verrattuna. Sellaisessa maailmassa elävät munasolua kohti ponnistelevat siittiöt. Ihminen voi havainnollistaa sitä itselleen uimalla jähmeässä siirapissa liikuttaen raajojaan nopeuksilla, jotka ovat alle 1 cm/min .

Tarkastellaan seuraavaksi vain suurten merieläinten uintia. Valaat ja delfiinit uivat heiluttamalla aaltomaisesti vartaloaan ja pyrstöään pystysuunnassa. Kaloilla tämä liike tapahtuu vaakasuunnassa. Kalojen uinti koostuu kahdesta liiketyypistä: kestouinnista ja alle 20 sekuntia kestävästä syöksystä. Kaloilla on kolmenlaisia lihaksia: punaisia (5–20 % lihaksista), valkoisia ja jonkin verran niiden välimuotoa. Punaisia lihaksia kalat käyttävät kestouinnissa, valkoisia syöksyissä.

Uiden liikkuvaan eläimeen kohdistuva vastusvoima tulee *kitkavastuksesta* f_f ja *painevastuksesta* f_p . Edellinen aiheutuu veden viskositeetista ja se on suoraan verrannollinen uimarin kokonaispinta-alaan A ja etenemisnopeuden neliöön; jälkimmäinen aiheutuu veden siirtämisestä syrjään uimarin tieltä ja siten se on suoraan verrannollinen uimarin poikkileikkauspinta-alaan A_p ja etenemisnopeuden neliöön. Yhtälöinä

$$f_f = \frac{1}{2}C_f \rho A v^2 \quad \text{ja} \quad f_p = \frac{1}{2}C_p A_p \rho v^2, \quad (3.36)$$

missä C_f ja C_p ovat kitka- ja painevastuskerroin ja ρ veden tiheys. Vastusvoima on siten

$$f = f_f + f_p = \frac{1}{2}C_D A \rho v^2, \quad (3.37)$$

missä C_D on kokonaisvastuskerroin. Virtaviivaiselle kalalle pätee geometrinen similariteetti (siltoin $A \propto l^2 \propto A_p$) ja $C_D \approx 1,2 C_f$.

Yhtälö (3.37) saadaan myös dimensioanalyysin avulla seuraavasti. Oletetaan, että vastusvoima riippuu vain veden tiheydestä ρ , dynaamisesta viskositeettikerroimesta μ , kalan leveydestä d , nopeudesta v ja pituudesta l eli $f = \phi(\rho, l, v, \mu)$,

missä $\phi: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+$, sillä geometrisen similariteetin nojalla $l \propto d$. Buckinghamin π -teoreeman avulla saadaan (harjoitustehtävä!), että

$$\frac{f}{\rho v^2 l^2} = \hat{\psi}\left(\frac{\rho v l}{\mu}\right) = \hat{\psi}(Re),$$

missä $\hat{\psi}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, sillä $\nu = \mu/\rho$. Koska kalan kokonaispinta-ala $A \propto l^2$, niin

$$f = \frac{1}{2}\psi(Re)\rho A v^2, \quad (3.38)$$

missä $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Määritellään kokonaisvastuskerroin C_D kaavalla

$$C_D := \frac{f}{\frac{1}{2}\rho v^2 A}, \quad (3.39)$$

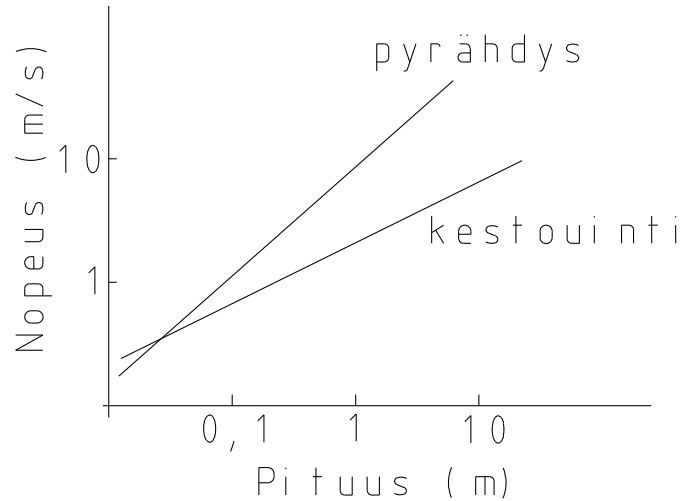
jolloin yhtälön (3.38) nojalla

$$C_D = \psi(Re)$$

eli kokonaisvastuskerroin C_D riippuu Reynoldsin luvusta. Vastusvoiman voittamiseen tarvitaan teho

$$P = f v = \frac{1}{2} C_D \rho A v^3. \quad (3.40)$$

Kun $Re > 10^6$, on virtaus pyörteistä ja runsaasti voimia kuluttavaa (C_D on suuri), eikä pitkäaikainen uinti ole mahdollista. Reynoldsin luku kasvaa, kun kalan pituus tai etenemisnopeus kasvavat. Siksi suuret kalat välttävät pyörteisyyttä uimalla kestointia hitaasti, ks. kuva 3.7.



Kuva 3.7: Kalojen etenemisnopeus kalan pituuden funktiona.

Kala käyttää etenemiseensä tehon $P_m = am^b$, missä $b \in \mathbb{R}_+$, a on positiivinen dimensioinen vakio ja m on kalan massa. Vakioiden a ja b arvojen määrittäminen on vaikeaa, koska vastusvoima on hankala mitata. Allometriselle eksponentille b on esitetty eri arvoja lukujen 0,67 ja 1,0 välistä. Joka tapauksessa kalan pinta-ala $A \propto l^2$ ja $m \propto l^3$, joten asettamalla $P = P_m$ saadaan yhtälöistä $P_m = am^b$ ja (3.40) kalan etenemisnopeudelle

$$C_D^{1/3} v \propto l^{(3b-2)/3}. \quad (3.41)$$

Kokonaisvastuskerroin $C_D \propto Re^{-1/2}$, kun virtaus on laminaarinen. Jos virtaus on turbulentti, niin $C_D \propto Re^{-1/5}$. Näillä perusteilla saadaan (harjoitustehtävä!):

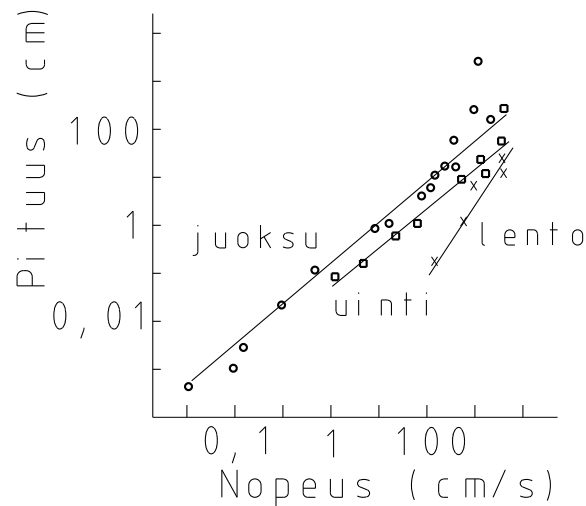
$$v \propto l^\beta, \text{ missä } \beta = \begin{cases} \frac{3}{5}(2b-1), & \text{jos kerroksittainen virtaus,} \\ \frac{3}{14}(5b-3), & \text{jos pyörteinen virtaus.} \end{cases} \quad (3.42)$$

Jos $0,78 \leq b \leq 1$, niin $0,33 \leq \beta \leq 0,60$ kerroksittaisen virtauksen tapauksessa ja $0,19 \leq \beta \leq 0,43$ pyörteisen virtauksen toteutuessa. Kuvan 3.7 nojalla kestouinnissa $\beta \approx 0,5$, mikä sopii kerroksittaisen virtauksen arvoihin.

Kuvasta 3.7 nähdään, että lyhytkestoissa syöksyissä $\beta \approx 0,88$. Silloin kalojen syöksynopeus on likimain suoraan verrannollinen niiden pituuteen; verrannollisuuskertoimeksi on havaittu noin 10 1/s, joten karkeasti kalat syöksähtelevät sekuntinopeudella, joka on niiden pituuden kymmenkerta. Se vaatisi (harjoitustehtävä!), että niiden käyttämän tehon eksponentti $b \approx 1,33$. Siksi syöksyt ovat lyhytkestoisia ja niissä käytetään hyväksi lihaksiin varastoitunutta energiaa.

Merieläinten suurimmat uintinopeudet ovat noin 10 m/s. Sinivalaan ei ole koskaan havaittu pyrähtävän nopeudella 120 m/s, vaikka niin voisi kuvan 3.7 jyrkempää suoraa arvoon $l = 30$ m ekstrapoloimalla arvioida. Pystysuoralla nopeudella $v = 10$ m/s delfiinit hyppäävät korkeudelle $h_m = v^2/2g = 5$ m ilman apuvälineitä.

Kuvassa 3.8 on esitetty maa-, ilma- ja vesieläinten pituus niiden maksiminopeuden funktiona. Kaikissa näissä kolmessa ryhmässä suurimpien eläinten maksiminopeus on likimain sama. Juoksussa ja uinnissa pituuden ja maksiminopeuden riippuvuus on laajalla pituusalueella likimain lineaarinen¹³, sillä kumpikin asteikko on logaritminen ja samanlainen sekä sovitettujen suorien kulmakertoimet on 1.



Kuva 3.8: Eläimen koko sen suurimman etenemisnopeuden funktiona uinnissa ($\circ$), juoksussa ($\square$) ja lennossa ($\times$).

3.7 Harjoitustehtäviä

1. Ovatko metsot, siat ja ihmiset geometrisesti similaareja? Entä lajinsisäisesti?
2. Laske nokkahiiren ja norsun sydämensykkeiden suhde ja mitä sen tulisi olla geometrisen, elastisen ja staattisen similariteetin mukaan.
3. Määritä Kleiberin lain nojalla, kuinka moninkertaiseksi eläimen aineenvaihdunnan teho kasvaa, jos eläimen massa kymmenkertaistuu. Entä aineenvaihdunnan teho massayksikköä kohti?
4. Pohdi tai selvitä kirjallisuuden avulla, mitä eroa on juoksulla, kävelyllä, käynnillä, ravilla ja laukalla. Mitä mahtaa tapahtua, kun koira ravaa peitsaten?
5. Luennon kaava (3.12) olettaa, että kaksitukisen palkin kuorma jakautuu tasaisesti pitkin palkkia. Olkoon palkin poikkileikkaus suorakaide, jonka korkeus on h ja leveys d . Silloin palkin jäyhyysmomentti $I = dh^3/12$, ja palkin suurin taipuma

$$\delta = \frac{5}{32} \frac{(F/l)l^4}{Edh^3} = \frac{5}{32} \frac{ql^4}{Edh^3},$$

13. Jos $y = ax$, niin $\ln y = \ln x + \ln a$.

missä $q = F/l$ on kuorma pituusyksikköä kohti. Päteee siis

$$\delta \propto ql^4 d^{-1} h^{-3}.$$

Katolla on tasaisesti jakautunut pintakuorma (noin $3,0 \text{ kN/m}^2$.) Kattoa kannattavat lankut toimivat kaksitukisina palkkeina, joilla on tasaisesti jakautunut kuorma q . Jos palkkien etäisyys on k (keskikohdasta keskikohtaan), niin näytää, että $q \propto k$.

6. Rakennat kattoa. Rakennepiirustusten mukaan kattolankut ovat T24-luokan lankkuja, joiden mitat ovat $50 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$, jotka asetetaan syrjälleen ja joiden etäisyys on 600 mm . Käytettävissäsi on kuitenkin vain T24-luokan lankkuja, joiden mitat ovat $50 \text{ mm} \times 150 \text{ mm}$. Määrää niiden välinen etäisyys siten, että kattosi taipuu saman verran kuin rakennepiirustusten mukainen katto.
7. Rakennat kattoa. Käytettävissäsi on samat rakennepiirustukset ja puutavara kuin edellisessä tehtävässä, mutta jänneväli l on nyt vain 3000 mm , kun se edellisessä tehtävässä oli 4000 mm . Määrää lankkujen etäisyys siten, että suhteellinen taipuma δ/l on sama kuin edellisessä tehtävässä.
8. Johda lausekkeesta (3.30) eläimen hyppykorkeudelle verrannollisuuskaava, kun eläin on elastisesti similaari ja (a) $A \propto ld$ (b) $A \propto d^2$, missä l on eläimen pituus ja d paksuus.
9. Tee sama kuin edellisessä tehtävässä, kun eläin on geometrisesti similaari.
10. Johda korkeudelle h hyppäävän eläimen ponnistusmatkan s keskimääräiselle kiihtyvyydelle a alaraja $a = gh/s$. (Vihje: tarkastele hyppyä ilman liikehäviöitä ja käytä tasaisesti kiihtyvän liikkeen kaavoja $s = at^2/2$ ja $v = at$; liikehäviöiden kanssa tarvitaan suurempi lähtönopeus ja keskimääräinen kiihtyvyys ponnistuksessa.)
11. Oletetaan, että linnun lentämiseen nopeudella v kuluva teho on P ,

$$P = v^3 - 75v + 400,$$

kun nopeus mitataan yksiköissä m/s . Laske saalistavan ja muuttavan linnun parhaat lentonopeudet eli ne nopeudet, joilla lintu pysyy kauiten ilmassa (saalistus) ja pääsee kauimmaksi (muutto) samalla energiamäärällä E .

12. Johda dimensioanalyysin avulla, että syvällä pinnan alapuolella uivan kalan liikevastus on

$$f = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2, \quad C_D = \psi(Re),$$

missä $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, ρ on veden tiheys, ν veden kinemaattinen viskositeettikerroin, l kalan pituus, v kalan etenemisnopeus ja $Re = lv/\nu$.

13. Osoita, että jos kalat uisivat kestouintia nopeudella $v \propto l^{0,88}$, niin niiden käyttämälle teholle $P = am^b$ pätee $b \approx 1,33$.
14. Selvitä merenneitojen fysiologiaa. Uivatko he kuin kalat vai kuin hylkeet ja delfiinit?

Luku 4

Kleiberin laista

Eliöiden perusaineenvaihdunnan teho¹ P on harvoja poikkeuksia vaille suoraan verrannollinen eliön massan potenssiin $3/4$ eli

$$P \propto m^{3/4}. \quad (4.1)$$

Niin yksisoluiset bakteerit, eläimet kuin kasvitkin² noudattavat tätä *Kleiberin lakia*. Luvussa 3.1 suoraviivainen dimensioanalyysin soveltaminen antoi kuitenkin

$$P \propto m^{2/3}. \quad (4.2)$$

Samaan tulokseen päätyi biologi Max Rubner 1883. Hänen päättelynsä oli seuraava³. Olkoon l eläimen tyypillinen pituus. Sen pinta-ala $A \propto l^2$, tilavuus $V \propto l^3$ ja massa $m \propto V \propto l^3$. Lämpövirta eläimestä pois $\dot{Q}$ on suoraan verrannollinen eläimen pinta-alaan⁴, joten $\dot{Q} \propto l^2$. Energia säilyy, joten $P = \dot{Q}$, mistä saadaan $P \propto l^2 = (l^3)^{2/3} \propto m^{2/3}$. Rubner siis oletti, että eläimet ovat geometrisesti similaareja.

Luvussa 3.2 selitettiin, miksi maalla liikkuvat selkärangaiset noudattavat Kleiberin lakia: perusteltiin, että ne ovat elastisesti similaareja (eläimen paksuus $d \propto l^{3/2}$), ja oletettiin, että niiden lihasteho on suoraan verrannollinen niiden perusaineenvaihdunnan tehoon. Linnuille ja kaloille Kleiberin laki jäi selittämättä.

Katsotaanpa, miten Rubnerin selitys muuttuu, jos geometrinen similariteetti korvataan elastisella similariteetillä. Eläimen massa on suoraan verrannollinen sen tilavuuteen V , ja $V \propto ld^2 \propto \lambda(l^{3/2})^2 = l^4$. Yhä $P = \dot{Q} \propto A$, joten Kleiberin laki toteutuu, jos ja vain jos $A \propto m^{3/4} = (l^4)^{3/4} = l^3 = (l^{3/2})^2 \propto d^2$. Lieriölle

$$A = \pi dl + \frac{\pi}{2} d^2,$$

missä vain jälkimmäinen termi on muotoa d^2 . Kleiberin laki saadaan vain olettamalla ensimmäinen termi mitättömäksi. Silloin lämpö karkaisi vain eläimen päästä⁵!

4.1 Fraktaaliputkisto

Suurenergiafyysikko Geoffrey B. West sekä biologit James H. Brown ja Brian H. Enquist etsivät yhdessä selitystä Kleiberin laille. Enquist oli itse löytänyt⁶, että kasvit aina puita myöten noudattavat sitä. Selityksen tuli olla niin yleinen, että se

1. Energia, jonka levossa oleva eliö kuluttaa aikayksikössä.

2. K.J. Niklas: *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*. University of Chicago Press, Chicago 1994.

3. Dana Mackenzie: New clues why size equals destiny. *Science* 284 (1999).

4. Lämpö voi poistua eläimen ulkopinnasta johtuen, säteillen tai kulkeutuen. Kaikissa näissä lämpövirta on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Hikoillessa lämmönhukka on myös suoraan verrannollinen pinta-alaan.

5. Tämän toteuttavat skinheadit eli nahkapäät ja paviaanit.

6. Mackenzie, m.t.

pätisi sekä eläin- että kasvikuntaan. He kiinnittivät huomionsa eläinten verisuoniston ja kasvien johtosolukon rakenteeseen ja tehtäviin. Norsun ja kananpojan hiussonet ovat samankokoisia. Samoin männyn ja päivänkakkaran äärimmäiset johtoputkilot ovat samankokoisia. Useimmat biologiset jakelujärjestelmät ovat haarautuvia putkistoja, joissa joissa putken koko pienenee säännöllisesti jokaisessa haarautumassa. Yksi sellainen on eläinten verisuonisto, toinen kasvien johtosolukko, joka on haarautuva pienten putkien kimppu. Nämä putkistot poikkeavat toisistaan putkien laadun (jäykkä tai kimmoisa), niiden kuljettaman virteen (neste tai kaasu) tai pumppunsa suhteen. Pumppu voi perustua puristustukseen (sydän), imuun (keuhkot), diffuusioon (hyönteiset), osmoosiin tai höyrynpaineeseen (kasvit). Näistä eroista huolimatta eri putkistot toimivat oleellisesti samoin.

West, Brown ja Enquist julkaisivat 1997 artikkelin⁷, jossa he johtivat Kleiberin lain ja 31 muuta lakia putkistojen hydrodynamiiikasta. Heidän mallinsa perustuu kolmeen oletukseen.

1. Eliön suonisto on itsesimilaarisesti haarautuva fraktaali, joka täyttää eliön koko kehon tai tilan⁸.
2. Putkiston pääteosaset (hiussuonet) ovat mitoiltaan vakioita.
3. Energia, joka aikayksikössä tarvitaan ravinnon kuljettamiseen, on pienin mahdollinen⁹.

Tutustutaan nyt Westin, Brownin ja Enquistin malliin kasvien johtosolukon tapauksessa. Siinä putket ovat jäykkiä ja virre kokoonpuristumatonta. Nisäkkäillä verisuonet ovat kimmoisia, mikä vaatii monimutkaisemman tarkastelun¹⁰. Putkiston alussa on yksi iso putki (verisuonistossa aortta, $n_0 = 1$), joka haarautuu n_1 :ksi keskenään samanlaiseksi putkeksi, jotka puolestaan haarautuvat n_2 :ksi keskenään samanlaiseksi putkeksi... Näin jatkuu yhteensä N kertaa äärimmäisiin putkiston osasiin (hiussuonet) asti. Heti k :nnen haarautumisen jälkeen haaraputken säde on r_k , pituus l_k ja paine-ero putken päiden välillä Δp_k . Tilavuusvirran nopeus siinä on $\dot{Q}_k = \pi r_k^2 \bar{u}_k$, missä $\bar{u}_k$ on keskimääräinen virtausnopeus sen poikkileikkauksen läpi. Putkenhaarojen määrä k :n haarautumisen jälkeen on $N_k = n_0 n_1 \cdots n_k$. Koska virre on nyt kokoonpuristumatonta, niin

$$\dot{Q}_0 = N_k \dot{Q}_k = N_k \pi r_k^2 \bar{u}_k = N_c \pi r_c^2 \bar{u}_c \text{ kaikilla } k = 0, 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

missä c viittaa putkiston pääteosasiin (hiussuoniin eli kapillaareihin). Oletuksen 2 mukaan pääteosasilte r_c , l_c ja $\bar{u}_c$ ovat eliön koosta riippumattomia vakioita. Siten myös Δp_c on vakio.

Putkiston haarautumista kuvaavat kertoimet

$$\beta_k := \frac{r_{k+1}}{r_k} \text{ ja } \gamma_k = \frac{l_{k+1}}{l_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.4)$$

West, Brown ja Enquist osoittivat, että pumpun teho on pienin mahdollinen¹¹, kun

$$\beta_k = \beta \in]0, 1[, \gamma_k = \gamma \in]0, 1[\text{ ja } n_k = n \in \mathbb{N} \text{ kaikilla } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.5)$$

Tällöin putkisto on kuin tavallinen itsesimilaari fraktaali¹².

4.1.1 Apulause. *Olkoon (4.5) voimassa. Silloin haarojen määrä kasvaa geometrisesti eli $N_k = n^k$ kaikilla $k = 0, 1, \dots, N$. Lisäksi*

$$r_k = \frac{\beta^k}{\beta^N} r_c \text{ ja } l_k = \frac{\gamma^k}{\gamma^N} l_c \text{ kaikilla } k = 0, 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

7. Geoffrey B. West, James H. Brown ja Brian J. Enquist: A general model for the origin of scaling laws in biology. Science 276 (1997), ss. 122-126.

8. Tällöin suonisto ravitsee organismin jokaisen sopen.

9. Tämä suure on verisuoniston tapauksessa sydämen pumppausteho.

10. Se on Westin, Brownin ja Enquistin mainitussa artikkelissa.

11. West, Brown ja Enquist, mt. Kyseessä on sidottu ääriarvotehtävä. Kohdekuvauksena on pumpun teho $P_h = P_h(n_0, \dots, n_N, r_0, \dots, r_N, l_0, \dots, l_N, m)$. Sidehtoina se, että massa ja $N_1 l_1^3, \dots, N_N l_N^3$ ovat vakioita. Jälkimmäisten vakioisuus seuraa oletuksesta 1.

12. Pääteosasiinsa eli hiussuoniin asti. Aito fraktaaliputkisto jatkaa haarautumistaan loputtomiin.

4.1.2 Apulause. Olkoon $\dot{Q}_0 \propto P$ ja $P \propto m^a$, missä $a \in \mathbb{R}_+$. Silloin haarautumistasojen määrä kasvaa logaritmisesti:

$$N = \frac{a \ln(m/m_0)}{\ln n}, \quad (4.7)$$

missä m_0 on positiivinen vakio siten, että m/m_0 on dimensioton ja $m > m_0$.

Todistus. Harjoitustehtävä¹³.

m.o.t.

Lasketaan putkiston kokonaistilavuus V_b . Apulauseen 4.1.1 nojalla

$$V_b = \sum_{k=0}^N N_k \pi r_k^2 l_k = \sum_{k=0}^N n^k \pi \left(\frac{\beta^k}{\beta^N} r_c \right)^2 \frac{\gamma^k}{\gamma^N} l_c = \sum_{k=0}^N (n\beta^2\gamma)^k \frac{\pi r_c^2 l_c}{(\beta^2\gamma)^N}.$$

Geometrisen summan lausekkeen¹⁴ nojalla

$$V_b = \frac{1 - (n\beta^2\gamma)^{N+1}}{1 - n\beta^2\gamma} \frac{V_c}{(\beta^2\gamma)^N}, \quad (4.8)$$

missä $V_c = \pi r_c^2 l_c$ on vakio ja $n\beta^2\gamma$ ei saa olla yksi.

Tilan täyttävä fraktaaliputkisto on luonnollinen rakenne kaikkien solujen ravitsemiseksi. Putkiston on haarauduttava niin, että kutakin ryhmää soluja ("ruokintasoppi") ruokkii yksi hiussuoni. Koska $l_c \gg r_c$ ja N on suuri, niin ruokintasopen tilavuus on likimain l_c -halkaisijaisen pallon tilavuus $4/3\pi(l_c/2)^3$, joten koko ruokittava tilavuus on sen N_c -kerta. Itsesimilaarin fraktaalien idea on, että sen geometrinen rakenne on sama kaikilla haarautumistasoilla. Siten pikkuvaltimoiden (haarautumistaso k) tulee ravita ruokintasoppea, jonka kokonaistilavuus on likimain $4/3\pi(l_k/2)^3 N_k$. Itsesimilaarisuuden perusteella tämä ei ainakaan suurilla N ja k riipu k :sta. Siten

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{l_k}{2} \right)^3 N_k \approx \frac{4}{3}\pi \left(\frac{l_{k+1}}{2} \right)^3 N_{k+1}$$

ainakin suurilla k . Näin ollen apulauseen 4.1.1 nojalla

$$\gamma = \frac{l_{k+1}}{l_k} \approx \left(\frac{N_k}{N_{k+1}} \right)^{1/3} = \left(\frac{n^k}{n^{k+1}} \right)^{1/3} = n^{-1/3} \text{ kaikilla } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.9)$$

Oletetaan, että putkiston putket ovat jäykkiä ja että yhteinen poikkileikkauspinta-ala ennen ja jälkeen haarautumisen on sama. Tämä on luonnollinen oletus kasvien johtosolukolle, joka on pitkien jäykkien pienten putkien haarautuva kimppu. Tällöin $\pi r_k^2 = n\pi r_{k+1}^2$ kaikilla $k = 0, 1, \dots, N-1$. Näin ollen

$$\beta = \beta_k = \frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2} \text{ kaikilla } k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.10)$$

Nyt saadaan $0 < n\beta^2\gamma = n^{-1/3} < 1$, joten kaavan (4.8) nojalla

$$V_b \approx \frac{V_b}{1 - n^{-1/3}} \frac{1}{(n^{-1}n^{-1/3})^N} \propto (n^N)^{4/3} \propto \dot{Q}_0^{4/3},$$

sillä kaavan (4.3) mukaan $\dot{Q}_0 \propto N_c = n^N$. Virre kuljettaa happea ja ravintoa aineenvaihdunnalle, joten $\dot{Q}_0 \propto P$. Täten $P \propto \dot{Q}_0 \propto V_b^{3/4}$. Oletuksesta 3 seuraa¹⁵, että $V_b \propto m$. Näin saadaan lopulta Kleiberin laki.

13. Muista kaava (4.3). Päättele ensin, että $m^a \propto n^N$, ja kirjoita verrannollisuus yhtälönä verrannollisuuskertoimen avulla.

14. Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $\sum_{k=0}^N x^k = (1 - x^{N+1})/(1 - x)$, kunhan $x \neq 1$.

15. Ks. Westin, Brownin ja Enquistin mainittu artikkeli.

4.2 Fraktaalit pois

Westin, Brownin ja Enquistin artikkeli sai fyysikot hakemaan vielä yksinkertaisempaa selitystä Kleiberin laille. Sehän pätee myös yksisoluisille eliöille, joilla ei ainkaan ilmiselvästi ole verisuoniston kaltaista ravinnonjakeluverkostoa. Toisaalta se on $P \propto m^{3/4} = m^{D/(D+1)}$, missä D on avaruuden dimensio ja m eliön massa. On havaittu, että kaksiulotteiset eläimet (esim. lattamadot) noudattavat sitä. Samoin jokivesistöt toimivat sen mukaan. Näin ollen Kleiberin lain selityksen tulisi olla hyvin yksinkertainen ja yleinen, sillä se pätee niin eläin-, kasvi- kuin kivikunnassa. Fyysikko Jayanth Banavar löysi¹⁶ keinon luopua fraktaaliputkistosta ja yksityiskohtaisista suoniston geometrisista ja fysikaalisista oletuksista. Hän julkaisi 1999 yhdessä fyysikoiden Amos Maritan ja Andrea Rinaldo kanssa artikkelin¹⁷, jossa fraktaaliputkisto leikattiin Okkamin partaveitsellä¹⁸ pois.

Olkoon l tyypillinen D -ulotteisen eliön (tai olion) pituus. Eliön sisäinen ruokintaverkosto ravitsee soppeja, joiden määrä $N \propto l^D$. Keskuslähteestä on ainakin yksi reitti jokaiseen soppeen. Aikayksikössä soppiin päätyy yhteensä ravintomäärä $P \propto N \propto l^D$. Verkoston virremäärä (esim. verimäärä) C riippuu verkoston rakenteesta. Tehokkaimmaksi verkostoksi Banavar ja kumppanit määrittivät sellaiset, joille virremäärä C on pienin¹⁹. He osoittivat, että tehokkaimmille verkostoille $C \propto l^{D+1}$. Tämän jälkeen he vetosivat havaittuun verrannollisuuteen $C \propto m$. Siten

$$P \propto l^D = (l^{D+1})^{D/(D+1)} \propto C^{D/(D+1)} \propto m^{D/(D+1)}.$$

4.3 Fraktaalit takaisin

West, Brown ja Enquist pyrkivät hekin yleistämään tarkasteluaan sopiviksi kaikkiin eliöihin. Niihinkin, joilla ei ole selvää ravinnonkuljetusverkostoa. Heidän artikkelinsa²⁰ 1999 tiivistelmä on: "Fraktaalien kaltaiset verkostot antavat elämälle käytännössä neljännen avaruusulottuvuuden. Tämä on biologian täyttävien 1/4-skaalauslakien syy. Organismit ovat kehittäneet hierarkisia verkostoja, joiden pääteosat ovat samankokoisia. Noita pääteosasia ovat hiussuonet, lehdet, mitokondriat ja oksidaasimolekyylit. Luonnonvalinta on pyrkinyt tekemään aineenvaihdunnan tehon ja sisäisen tehokkuuden molemmat mahdollisimman suuriksi. Edellisessä keino on vaihtopintojen maksimointi, jälkimmäisessä kuljetusmatkojen ja aikojen minimointi. Nämä muotoutumisperiaatteet ovat riippumattomia dynamiikan ja mallien yksityiskohdista, ja niiden tulisi päteä ilmeisesti kaikkiin organismeihin."

4.4 Harjoitustehtäviä

5. Todista apulause 4.1.1.
6. Todista apulause 4.1.2.
7. Osoita, että kasvin johtosolukossa keskimääräinen virtausnopeus on vakio (kullekin kasville).

16. Mackenzie, m.t.

17. Jayanth R. Banavar, Amos Maritan ja Andrea Rinaldo: Size and form in efficient transportation networks. *Nature* 399 (1999), ss.130–132.

18. Vilhelm Okkamilaisen (1285-1349) mukaan tarpeettomia olioita ei tule olettaa olemassaoleviksi. Tätä periaatetta kutsutaan Okkamin partaveitsekseksi.

19. Tämä eroaa Westin, Brownin ja Enquistin oletuksesta, jonka mukaan pumpun (esim. sydämen) teho on pienin mahdollinen.

20. Geoffrey B. West, James H. Brown ja Brian J. Enquist: The fourth dimension of life: fractal geometry and allometric scaling of organisms. *Science* 284 (1999), ss. 1677–1679

Kirjallisuutta

- [1] Jayanth R. Banavar, Amos Maritan & Andrea Rinaldo: *Size and form in efficient transportation networks*. Nature 399 (1999), ss. 130–132.
- [2] Gunnar Bergendal ja Inge Brinck: Linjär algebra. Studentlitteratur, Lund 1968.
- [3] Robert W. Fox ja Alan T. MacDonald: Introduction to Fluid Mechanics. Second ed. J. Wiley & Sons, New York 1978.
- [4] Jyrki Hokkanen, Raimo Keskinen ja Juha Perkkiö: *Johdatus erikokoisten eläinten fysiikkaan*. Arkhimedes 37:4 (1985), ss. 220–230.
- [5] Veli-Matti Hokkanen ja Eero Sarkkinen: *Dimensioanalyysi —salatiedettäkö?* Arkhimedes 37:1 (1985), ss. 40–53.
- [6] E. de St Q. Isaacson ja M. de St Q. Isaacson: Dimensional Methods in Engineering and Physics. Edward Arnold Publishers, Lontoo, 1975.
- [7] Frits J. de Jong: Dimensional Analysis for Economists. North Holland, Amsterdam, 1967.
- [8] Erkki Laitinen: *Dimensioanalyysistä*. Arkhimedes 37:2 (1985), ss. 117–119.
- [9] T.A. MacMahon ja J.T. Bonner: On Size and Life. Scientific American Books Inc, 1983.
- [10] K.J. Niklas: Plant Allometry: The Scaling of Form and Process. University of Chicago Press, Chicago 1994
- [11] Juha Perkkiö, Jyrki Hokkanen ja Raimo Keskinen: *Eläinten liikunnasta ja maksimaalisesta suorituskyvystä*. Arkhimedes 38:1 (1986), ss. 11–20.
- [12] K. Schmidt-Nielsen: Scaling. Why Is Animal Size So Important? Cambridge University Press, Cambridge 1984.
- [13] G.B. West, J. H. Brown, & B. J. Enquist: *A general model for the origin of allometric scaling laws in biology*. Science 276 (1997), ss. 122–126.
- [14] Geoffrey B. West, James H. Brown ja Brian J. Enquist: *The fourth dimension of life: fractal geometry and allometric scaling of organisms*. Science 284 (1999), ss. 1677–1679.
- [15] Steven Vogel: Kissan tassut ja katapultit. Luonnon ja ihmisen mekaaniset maailmat. Terra Cognita, Helsinki 2001.