

Johdatus optimointiin

Veli-Matti Hokkanen

18. joulukuuta 2002

Sisältö

0 Johdanto	v
1 Ääriarvot	1
1.1 Kertausta	1
1.1.1 Reaaliarvoisen kuvauksen globaalit ääriarvot	1
1.1.2 Reaaliarvoisen kuvauksen lokaalit ääriarvot	2
1.1.3 Reaaliarvoisen kuvauksen sidotut ääriarvot	2
1.2 $\mathbb{R}$ -arvoisten kuvausten ääriarvot	3
1.2.1 Laajennettu lukusuora	3
1.2.2 Globaalit ja lokaalit ääriarvot	4
1.2.3 Sidotut ääriarvot	5
1.3 Yleiset optimointitehtävät	6
1.3.1 Relaatiot	6
1.3.2 Järjestysrelaatiot	8
1.3.3 Aidot yleiset ääriarvot	9
1.3.4 Etusijasuhde ja kohdekuvaus	10
1.4 ϵ -ääriarvot	11
2 Ääriarvojen olemassaolo	17
2.1 Kertausta: Weierstraßin lause sekä kuperat ja koverat kuvaukset	17
2.2 Kuvauksen puolijatkuvuus	18
2.3 Weierstraßin lause	29
3 Diskreettiä optimointia	33
3.1 Bellmanin optimaalisuusperiaate	33
3.2 Optimaalisuusyhtälö	35
3.2.1 Sidotut ääriarvotehtävät ja optimaalisuusyhtälö	37
3.2.2 Lineaarinen optimointi ja optimaalisuusyhtälö	37
3.3 Diskreettiä säätöteoriaa	40
3.3.1 Diskonttaus	43
3.3.2 Optimaalinen kuluttaminen ja sijoittaminen	44
3.3.3 Palautuskaavalla määritetty kustannuskuvaus	45
3.3.4 Tuotannon ajoittaminen	47
3.3.5 Tilayhtälön ratkaisun vakaus	48
4 Optimointi sokkona: minimax-lauseita	57
4.1 Peliteoriaa	57
4.1.1 Normaalimuotoinen peli	58
4.1.2 Kahden henkilön nollasummapelit	60

Luku 0

Johdanto

Tämä nidos sisältää Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksessa syyslukukaudella 2002 luennoitun matematiikan valinnaisen cum laude -kurssin luennot ja harjoitustehtävät. Kurssin nimi on Johdatus optimointiin ja sen laajuus on neljä opintoviikkoa. Sen tarkoituksena on tutustuttaa deterministisen optimoinnin peruskäsitteisiin ja -tuloksiin ja valmistaa opiskelijoita kuuntelemaan kevätlukukaudella stokastisen optimoinnin kurssi. Kurssi on tarkoitettu tukemaan myös tietotekniikan laitoksen optimointikursseja (Optimointimenetelmät, Optimointi, Säättöteorian perusteet).

Yleisinä matemaattisina pohjatietoina vaaditaan vain perusosaaminen moniulotteisesta differentiaalilaskennasta (Differentiaali- ja integraalilaskenta 1), joka sisältyy kansantaloustieteen opiskelijoille pakollisiin menetelmäkursseihin (Matematiikan peruskurssi ja Matemaattinen taloustiede 1), joten tämä kurssi soveltuu myös taloustieteiden perus- ja jatko-opiskelijoille.

Ensimmäisessä luvussa kerrataan globaalien ja lokaalien ääriarvojen käsitteet ja yleistetään ne tapaukseen, jossa optimoinnin kohdekuvaus saa arvonsa joukosta $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Seuraavaksi tutustutaan preferenssirelaatioihin ja määritellään yleiset ääriarvotehtävät, joissa kohdekuvauksen arvojoukko on mikä hyvänsä joukko, jonka alkioita voidaan järjestää preferenssirelaatiolla. Ensimmäisessä luvussa tarkastellaan myös ääriarvotehtäviä, joilla ei klassisessa mielessä ole ratkaisua. Yksi tällainen on junalle kiirehtijän ongelma: hän pyrkii minimoimaan junan odotusajan, kun täsmälleen junan lähtöhetkellä sen ovet lukkiutuvat. Minimien sijasta haetaan ϵ -minimejä eli niitä muuttujan arvoja, joilla kohdekuvaus on korkeintaan luvun $\epsilon \in]0, \infty[$ päässä infimumistaan. Reaalilukujen täydellisyysaksiooma takaa, että jokaisella alhaalta rajoitetulla kuvauksella on infimum. Esitetään ja todistetaan Ekelandin lauseen seuraus, jonka mukaan ϵ -minimissä kohdekuvauksen derivaatta on normiltaan pienempi kuin ϵ .

Toisessa luvussa tutustutaan ylä- ja alaraja-arvojen sekä kuvauksen puoli-jatkuvuuden käsitteisiin ja muotoillaan niiden avulla Weierstraßin lause ääriarvojen olemassaolosta.

Kolmannessa luvussa käsitellään diskreetin optimoinnin alkeita. Tarkastellaan tieverkossa liikkumisen kustannusten minimointia ja tutustutaan Bellmanin optimaalisuusperiaatteeseen. Siitä muokataan yleinen optimaalisuusperiaate, jota sovelletaan säättö- eli kontrolliteoriaan, kun aika on diskreetti.

Neljännessä luvussa tarkastellaan ns. minimax-menettelyä optimoinnissa, kun hallussa on vain puutteellinen informaatio eli optimoija ei tiedä kaikkea oleellista. Osa muuttujista ei olekaan optimoijan hallittavissa tai ennustettavissa, jolloin hän olettaa niiden asettuvan hänen kannaltaan huonoimpaan mahdolliseen tilaan. Tällöin katsotaan, että optimoija pelaa kahden henkilön peliä, jossa toisena osapuolena on muu maailma. Peliteorian peruskäsitteisiin ja nollasummapeleihin tutustutaan. Opitaan, että yhteistyöhaluttomien pelaajien tasapaino on satulapiste ja lopuksi esitetään J. von Neumannin lause satulapisteen olemassaolosta.

Luku 1

Ääriarvot

Tässä luvussa kerrataan reaaliarvoisten kuvausten globaalien, lokaalien ja sidottujen ääriarvojen käsitteet ja yleistetään niitä.

1.1 Kertausta

Tarkastellaan aluksi reaaliarvoisia kuvauksia, jotka on määritelty jossakin vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, osajoukossa.

1.1.1 Reaaliarvoisen kuvauksen globaalit ääriarvot

Määritelmä 1.1.1 *Olkoon $n = 1, 2, \dots$, $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä joukko ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f globaali maksimikohta ja $f(x_1)$ on sen globaali maksimi eli suurin arvo, jos*

$$f(x) \leq f(x_1) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.1)$$

Vastaavasti $x_2 \in A$ on kuvauksen f globaali minimikohta ja $f(x_2)$ on sen globaali minimi eli pienin arvo, jos

$$f(x) \geq f(x_2) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.2)$$

Esimerkki.

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $f(x) = x$. Suurin arvo on $f(3) = 3$ ja pienin arvo $f(1) = 1$.
2. Jos $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja $f(x) = x$, niin pienin arvo on $f(0) = 0$ ja suurinta arvoa ei ole.
3. Jos $A = \mathbb{R}$ ja $f(x) = 1/(1 + x^2)$, niin

$$0 < f(x) < \frac{1}{1+0} = 1 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Siten $f(0) = 1$ on suurin arvo. Pienintä arvoa ei ole, sillä $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

4. Jos $A = \mathbb{R}^2$ ja

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{|x_1 x_2|}{1 + x_1^2},$$

niin $f(x) = f(0) = 0$ on pienin arvo ja suurinta arvoa ei ole.

Optimointi on ääriarvotehtävien ratkaisemista. Tällöin on selvitettävä, *onko* tarkasteltavalla kuvauksella ääriarvoja sekä *haettava* ne. Tuttu derivaatan nollakohtien hakeminenhan antaa vasta joukon ääriarvokohtaehdokkaita. Esitetään ensimmäinen ääriarvojen olemassaolotulos.

Lause 1.1.2 Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, epätyhjä äärellinen joukko. Tällöin jokaisella kuvauksella $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on suurin ja pienin arvo.

Todistus. Kuvaus f saa vain äärellisen monta eri reaalilukuarvoa. Niiden joukossa on suurin ja pienin luku. **m.o.t.**

1.1.2 Reaaliarvoisen kuvauksen lokaalit ääriarvot

Lokaalien eli paikallisten ääriarvojen määrittelyyn tarvitaan avoimen joukon tai pisteen ympäristön käsite. Aloitetaan esimerkillä.

Esimerkki. Olkoon $A = \mathbb{R}$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$. Tällöin kuvauksella f ei ole suurinta arvoa, mutta lokaali maksimi sillä on origossa:

$$f(0) = 0 > f(x) = x^2(x^2 - 2) \text{ kun } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \text{ ja } x \neq 0.$$

Olkoot $n = 1, 2, \dots$, $r > 0$ ja $x, z \in \mathbb{R}^n$. Merkitään

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2} \text{ ja } d(x, z) = \|x - z\|.$$

Sanotaan, että $\|x\|$ on vektorin (pisteen) x *normi* ja $d(x, z)$ on vektoreiden (pisteiden) x ja z *etäisyys*. Joukkoa

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$

sanotaan *x-keskiseksi r-säteiseksi avoimeksi palloksi*. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa A sanotaan *avoimeksi*, jos ja vain jos jokainen $x \in A$ on joukon A *sisäpiste* eli on olemassa $\delta_x \in]0, \infty[$ siten, että $B(x, \delta_x) \subset A$.

Määritelmä 1.1.3 Olkoon $n = 1, 2, \dots$, $A \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä joukko ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f lokaali maksimikohta ja $f(x_1)$ on sen lokaali maksimi, jos on olemassa avoin joukko $A_1 \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $x_1 \in A_1$ ja $f(x_1)$ on rajoittumakuvauksen $f|_{A_1}: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f|_{A_1}(x) = f(x)$ suurin arvo.

Piste $x_2 \in A$ on kuvauksen f lokaali minimikohta ja $f(x_2)$ on sen lokaali minimi, jos on olemassa avoin joukko $A_2 \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $x_2 \in A_2$ ja $f(x_2)$ on rajoittumakuvauksen $f|_{A_2}: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ pienin arvo.

Huomaa, että tässä määrittelyssä voitaisiin pisteet x_1 tai x_2 sisältävät avoimet joukot korvata ne-keskisillä avoimilla palloilla ilman, että minimi- ja maksimit muuttuisivat. Tämä ei onnistu kaikissa avaruutta $\mathbb{R}^n$ yleisemmissä joukoissa määritellyille kuvauksille¹.

Esimerkki. Olkoon $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2$. Kuvauksella f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa; $f(0, 0) = 0$ on sen lokaali minimi.

1.1.3 Reaaliarvoisen kuvauksen sidotut ääriarvot

Esimerkki. Mitoita litran vetoinen ja lieiön muotoinen maalitölkki siten, että sen pinta-ala on mahdollisimman pieni! Merkitään tölkin pohjan sädettä r ja korkeutta h . On siis haettava kahden muuttujan kuvauksen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

¹Topologisissa avaruuksissa peruskäsitteenä on joukon avoimuus; avoimia palloja, etäisyyksiä tai normeja ei niissä välttämättä ole lainkaan määritelty.

pienin arvo, kun sen lähtöjoukko rajataan joukoksi

$$S = \{(r, h) \in \mathbb{R}^2 \mid r, h \geq 0, \pi r^2 h = 1\}.$$

Sijoittamalla kuvauksen f lausekkeeseen $h = 1/\pi r^2$ tehtävä palautuu yhden muuttujan ääriarvotehtäväksi, jossa on haettava kuvauksen

$$\phi:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(r) = f(r, h) = 2\left(\pi r^2 + \frac{1}{r}\right),$$

suurin arvo. Tölkkin pinta-ala on siten suurin, kun (desimetreissä)

$$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0,54 \quad \text{ja} \quad h = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} \approx 1,08.$$

Määritelmä 1.1.4 Olkoot $A, S \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjiä joukkoja siten, että $S \subset A$, ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kuvaus; $n = 1, 2, \dots$. Tehtäviä

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ globaalit (vast. lokaalit) maksimit!

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ globaalit (vast. lokaalit) minimi!

sanotaan sidotuiksi globaaleiksi (vast. lokaaleiksi) ääriarvotehtäviksi. Tällöin kuvauksista f kutsutaan kohdekuvaukseksi eli objektifunktioksi ja joukon S esityksissä $S = \{x \in A \mid \dots\}$ kohdassa $\dots$ esiintyviä ehtoja sanotaan rajoitteiksi eli side-ehtoiksi.

Esimerkki. Liikennöitsijä kuljettaa rahtia Jyväskylän ja Konneveden välillä edestakaisin yhdellä kuorma-autolla, jonka kantavuus on 20 tonnia. Rahdista hän saa 10 euroa/tonni. Hänen viikoittaiset kiinteät kulunsa ovat 2000 euroa ja muuttuvat kulunsa euroissa ovat $10v\sqrt{2+x}$, missä v on kuorma-auton keskinopeus (km/h) ja x on keskilasti tonneissa. Viikossa hänen autonsa kuljettaa $7 \times 24v/100$ lastia. Keskinopeus pienenee lastin kasvaessa seuraavasti:

$$v \leq \frac{80}{1 + 0,2\sqrt{x}}.$$

Liikennöitsijä haluaa valita muuttujat x ja v siten, että hänen voittonsa $f(x, v)$ on mahdollisimman suuri. Siten kohdekuvaus on

$$f: [0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, v) = 16,8xv - 10v\sqrt{2+x} - 2000,$$

ja side-ehdot ovat

$$0 \leq x \leq 20, \quad 0 \leq v \leq \frac{400}{5 + \sqrt{x}}.$$

1.2 $\overline{\mathbb{R}}$ -arvoisten kuvausten ääriarvot

Tässä jaksossa yleistetään sekä kuvauksen määrittely- että maalijoukkoa.

1.2.1 Laajennettu lukusuora

Joukkoa $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ merkitään symbolilla $\overline{\mathbb{R}}$ tai $[-\infty, \infty]$ ja sitä sanotaan *laajennetuksi lukusuoraksi*. Merkitään myös $]-\infty, \infty[= \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ja $[-\infty, \infty[= \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Niiden alkioista sovitaan seuraavat merkinnät sekä lasku- ja vertailusäännöt:

1. $-\infty < a < \infty$ eli $-\infty < a$ ja $a < \infty$, jos ja vain jos $a \in \mathbb{R}$.

2. Olkoot $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Silloin $a < b$, jos ja vain jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$ tai $a \in \mathbb{R}$ ja $b = \infty$ tai $a = -\infty$ ja $b \in \mathbb{R}$ tai $a = -\infty$ ja $b = \infty$.
3. Olkoot $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Silloin $a \leq b$, jos ja vain jos $a < b$ tai $b = a$.
4. Olkoot $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Silloin $a = b$, jos ja vain jos $a \leq b$ ja $b \leq a$.
5. $\infty + \infty = \infty$ ja $-\infty - \infty = -\infty$ ja $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
6. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Silloin $a + \infty = \infty + a = \infty$ ja $a - \infty = -\infty + a = -\infty$.
7. Olkoon $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Silloin

$$a \cdot \infty = a\infty = \infty a = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a > 0, \\ -\infty, & \text{jos } a < 0, \end{cases}$$

$$a(-\infty) = -\infty a = \begin{cases} -\infty, & \text{jos } a > 0, \\ \infty, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

Huomaa, että $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$ ja $\infty \cdot 0$ jäivät määrittelemättä²

1.2.2 Globaalit ja lokaalit ääriarvot

Nyt voidaan yleistää globaalien ja lokaalien ääriarvojen käsitteet tavalla, joka tekee sidottujen ääriarvot tehtävien muotoilemisen lyhyeksi. Huomaa, että kuvauksen määrittelyjoukko oletetaan vain epätyhjäksi.

Määritelmä 1.2.1 Olkoon A epätyhjä joukko ja $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuvaus. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f globaali maksimikohta ja $f(x_1)$ on sen globaali maksimi eli suurin arvo, jos

$$f(x) \leq f(x_1) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.3)$$

Vastaavasti $x_2 \in A$ on kuvauksen f globaali minimikohta ja $f(x_2)$ on sen globaali minimi eli pienin arvo, jos

$$f(x) \geq f(x_2) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.4)$$

Esimerkki.

1. Olkoon $A = \mathbb{R}$ ja

$$f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x \in [-1, 1], \\ \infty & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Kuvaus f saavuttaa suurimman arvonsa ∞ , kun $|x| > 1$. Sen pienin arvo on $f(0) = 0$.

2. Olkoot

$$A = \{g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ on jatkuva ja paloittain jatkuvasti derivoituva, } g(0) = 1, g(1) = 1\}, f(g) = \int_0^1 \sqrt{1 + g'(x)^2} dx.$$

Lauseke $f(g)$ on pisteitä $(0, 1)$ ja $(1, 1)$ yhdistävän polun $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, g(x))$ pituus. Koska g' on paloittain jatkuva, integraali saa reaaliarvon tai arvon ∞ epäoleellisena integraalina. Siten $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Joukossa A se on pienin, kun $g(x) = 1$ eli suora on lyhin tie tason kahden eri pisteen välillä (harj. teht.).

²Yleensä ne jäävätkin määrittelemättä, mutta kuperien kuvausten teoriassa sovitaan toisinaan, että $\infty - \infty = -\infty + \infty = \infty$, ks. [2, s. 9].

Lause 1.2.2 *Olkoon A epätyhjä äärellinen joukko. Tällöin jokaisella kuvauksella $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on suurin ja pienin arvo.*

Todistus. Kuvaus f saa vain äärellisen monta eri arvoa joukosta $\overline{\mathbb{R}}$. Niiden joukossa on suurin ja pienin luku. **m.o.t.**

Määritelmä 1.2.3 *Olkoon (X, τ) topologinen avaruus³, $A \subset X$ epätyhjä joukko ja $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuvaus. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f lokaali maksimikohta ja $f(x_1)$ on sen lokaali maksimi jos on olemassa avoin joukko $A_1 \subset X$ siten, että $x_1 \in A_1$ ja $f(x_1)$ on rajoittumakuvauksen $f|_{A_1}: A_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f|_{A_1}(x) = f(x)$ suurin arvo.*

Piste $x_2 \in A$ on kuvauksen f lokaali minimikohta ja $f(x_2)$ on sen lokaali minimi, jos on olemassa avoin joukko $A_2 \subset X$ siten, että $x_2 \in A_2$ ja $f(x_2)$ on rajoittumakuvauksen $f|_{A_2}: A_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pienin arvo.

1.2.3 Sidotut ääriarvot

Määritelmä 1.2.4 *Olko A ja S epätyhjiä joukkoja siten, että $S \subset A$, ja $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuvaus. Tehtäviä*

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ suurin arvo!

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ pienin arvo!

sanotaan sidotuksi globaaleiksi ääriarvotehtäviksi.

Olkoon A lisäksi topologinen avaruus. Tehtäviä

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ lokaalit maksimit!

Hae rajoittumakuvauksen $f|_{A \cap S}$ lokaalit minimit!

sanotaan sidotuksi lokaaleiksi ääriarvotehtäviksi.

Kuvausta f kutsutaan kohdekuvaukseksi eli objektifunktioksi ja joukon S esityksissä $S = \{x \in A \mid \dots\}$ kohdassa $\dots$ esiintyviä ehtoja sanotaan rajoitteiksi eli side-ehdoiksi.

Määritelmä 1.2.5 *Olkoon X epätyhjä joukko ja A joukko. Kuvausta $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sanotaan kelvoksi⁴, jos se ei ole identtisesti ∞ . Kuvausta*

$$I_A: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, I_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x \in A, \\ \infty & \text{jos } x \notin A, \end{cases}$$

sanotaan joukon A indikaattorifunktioksi (joukossa X).

Huomataan, että joukon A indikaattorifunktio epätyhjässä joukossa X on kelpo kuvaus täsmälleen silloin kun $A \cap X \neq \emptyset$.

Lause 1.2.6 *Olko A ja S epätyhjiä joukkoja siten, että $S \subset A$. Jos $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on kelpo kuvaus, niin jokainen kuvauksen f globaali minimikohta sidehdolla $x \in S$ on koko joukossa A määritellyn kuvauksen $f + I_S$ globaali minimikohta. Jos lisäksi $f|_{A \cap S}$ on kelpo kuvaus, niin jokainen kuvauksen $f + I_S$ globaali minimikohta on kuvauksen f globaali minimikohta side-ehdolla $x \in S$.*

³Oletetaan siis, että X on epätyhjä joukko, τ on joukko X :n osajoukkoja, joita sanotaan avoimiksi, ja τ toteuttaa seuraavat ehdot.

1. $\emptyset, X \in \tau$.
2. Jos $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$, niin $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.
3. Jos $A_j \in \tau$ kaikilla $j \in J$ (J mikä hyvänsä epätyhjä joukko), niin $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

Avaruus $(\mathbb{R}^n, \tau')$ on topologinen avaruus, kun τ' on kaikkien joukon $\mathbb{R}^n$ avoimien osajoukkojen joukko.

⁴Engl. proper function, ransk. fonction propre, ven. sobstvennaja funkciya.

Todistus. Olkoon $f(x_1)$ sidotun tehtävän pienin arvo. Tällöin $x_1 \in S$ ja

$$f(x_1) + I_S(x_1) = f(x_1) \leq \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in S, \\ \infty, & \text{jos } x \notin S, \end{cases} = f(x) + I_S(x) \text{ kaikilla } x \in A.$$

eli x_1 on myös kuvauksen $f + I_S$ globaali minimikohta.

Olkoon $x_1 \in A$ kuvauksen $f + I_S$ globaali minimikohta. Koska $f|_{A \cap S}$ ja f ovat kelpoja, niin $x_1 \in A \cap S$ ja siten

$$f|_{A \cap S}(x_1) = f(x_1) = f(x_1) + I_S(x_1) \leq f(x) + I_S(x) = f|_{A \cap S}(x) \text{ kaikilla } x \in S \cap A$$

eli x_1 on kuvauksen f pienin arvo side-ehdolla $x \in S$.

m.o.t.

Edellisen lauseen seurauksena saamme seuraavan tuloksen, jolla sidottu ääriarvotehtävä voidaan palauttaa tavalliseksi ääriarvotehtäväksi.

Lause 1.2.7 *Olkoot A ja S epätyhjiä joukkoja ja $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ kuvaus siten, että $S \subset A$ ja $f|_{A \cap S}$ on kelpo. Silloin seuraavat ääriarvotehtävät*

1. *Hae kuvauksen $f: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pienin arvo side-ehdolla $x \in S$!*
2. *Hae kuvauksen $f + I_S: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pienin arvo!*

ovat yhtäpitäviä eli niiden globaalit minimikohdat ovat samat ja niissä kohdekuvaukset saavat samat arvot.

1.3 Yleiset optimointitehtävät

Tässä jaksossa tarkastellaan optimointitehtäviä, joissa kohdekuvaus ei välttämättä ole reaali- tai $\overline{\mathbb{R}}$ -arvoinen. Sen maalijoukon alkioita kuitenkin voidaan panna mieluisuusjärjestykseen.

1.3.1 Relaatiot

Olkoot X ja Y epätyhjiä joukkoja. Niiden *karteesinen tulo* on

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}. \quad (1.5)$$

Joukon $X \times Y$ epätyhjiä osajoukkoja sanotaan *(2-paikkaisiksi eli binäärisiksi) relaatioiksi* eli *suhteiksi*. Olkoon $S \subset X \times Y$ relaatio. Merkitään

$$\begin{aligned} xSy & \text{ jos ja vain jos } (x, y) \in S, \\ Sx = S(x) &:= \{y \in Y \mid (x, y) \in S\}, \\ D(S) &:= \{x \in X \mid \text{on olemassa } y \in Y \text{ s.e. } (x, y) \in S\} = \{x \in X \mid Sx \neq \emptyset\}, \\ R(S) = S(X) &:= \{y \in Y \mid \text{on olemassa } x \in X \text{ s.e. } (x, y) \in S\}, \\ S^{-1} &:= \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in S\}. \end{aligned}$$

Relaatiota S^{-1} sanotaan relaation S *käänteisrelaatioksi* eli *käänteissuhteeksi*. Joukkoja $D(S)$ ja $R(S)$ sanotaan relaation S *määrittely-* ja *arvojoukoiksi*. Joukkoa Sx sanotaan relaation S *arvoksi pisteessä* $x \in X$.

Esimerkki.

1. Olkoon $X = Y$ kaikkien ihmisten joukko ja merkitään S :llä sukulaisuutta. "Pekka ja Kalle ovat sukua" kirjoitetaan silloin lyhyesti $(\text{Pekka}, \text{Kalle}) \in S$ tai $\text{Pekka} S \text{Kalle}$.
2. Laajennetun lukusuoran $\overline{\mathbb{R}}$ alkioiden tuttu suuruusjärjestys $\leq$ on relaatio.

3. Funktiot eli kuvaukset ovat nekin relaatioita. Itse asiassa kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on relaatio S , jonka määrittelyjoukko $D(S) = X$ ja jonka arvo kussakin pisteessä $x \in D(S)$ on täsmälleen *yhden* alkion sisältävä joukko. Tällöin samastetaan kuvauksen arvo $f(x)$ ja relaation arvo $\{f(x)\}$. Tästä syystä relaatioita kutsutaan toisinaan moniarvoisiksi kuvauksiksi tai moniarvoisiksi operaattoreiksi.

Tarkastellaan vielä Kallen, Pekan ja Villen joukkoa eli lyhyesti $\{K, P, V\}$. Merkitään sukulaisuutta xSy . Yhdessä *mahdollisessa maailmassa* eli *mallissa* pojat ovat veljeksiä, jolloin

$$S = \{(K, K), (K, P), (K, V), (P, K), (P, P), (P, V), (V, K), (V, P), (V, V)\}.$$

Toisessa mahdollisessa maailmassa he ovat serkuksia siten, että

$$S = \{(K, K), (K, P), (P, K), (P, P), (P, V), (V, P), (V, V)\}.$$

Tarkasteltavasta relaatiosta riippuen sellaiset lauseet kuin " xSy kaikilla $x, y \in X$ " voivat olla *tautologioita* eli tosia kaikissa mahdollisissa maailmoissa, *kontingenteja* eli tosia yhdessä ja epätosia toisessa mahdollisessa maailmassa tai *kontradiktioita* eli epätosia kaikissa mahdollisissa maailmoissa.

Määritelmä 1.3.1 Olkoot X ja $S \subset X \times X$ epätyhjiä joukkoja. Suhdetta S sanotaan

1. *refleksiiviseksi*, jos kaikilla $x \in X$ pätee xSx ,
2. *symmetriseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee $xSy \implies ySx$
3. *transitiiviseksi*, jos kaikilla $x, y, z \in X$ pätee xSy ja $ySz \implies xSz$,
4. *antisymmetriseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee xSy ja $ySx \implies x = y$,
5. *heikosti yhtenäiseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee

$$x \neq y \implies xSy \text{ tai } ySx,$$

6. *yhtenäiseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee xSy tai ySx .

Jos relaatio S on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin sitä kutsutaan *ekvivalenssirelaatioksi*.

Esimerkki.

1. Ihmisten välinen lähisukulaisuus on symmetrinen ja refleksiivinen mutta ei transitiivinen eikä heikosti yhtenäinen.
2. Ihmisten välinen aleneva sukulaisuus (isoisä, isä, tytär, tyttärenpoika, ...) on antisymmetrinen, refleksiivinen ja transitiivinen mutta ei symmetrinen eikä heikosti yhtenäinen.
3. Ihmisten välinen rakkaus (pikemminkin eros- kuin agape-lajia⁵) ei ole heikosti yhtenäinen, refleksiivinen, symmetrinen eikä transitiivinen.
4. Laajennetun lukusuoran relaatio $\leq$ on antisymmetrinen, refleksiivinen, transitiivinen ja yhtenäinen.
5. Matematiikan yhtäsuuruusrelaatio $=$ on ekvivalenssirelaatio.
6. Agape-lajin rakkaus ihmisten välillä lienee refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Siis ekvivalenssirelaatio.

⁵Jumalan rakkaus ihmisiin on agape-lajia. Ks. 1. Kor. 13.

1.3.2 Järjestysrelaatiot

Määritelmä 1.3.2 *Olkoon X epätyhjä joukko. Relaatiota $S \subset X \times X$ sanotaan (osittain) järjestykseksi, jos se on antisymmetrinen, refleksiivinen ja transitiiivinen. Jos S on lisäksi yhtenäinen, sanotaan sitä kokonais- eli lineaariseksi järjestykseksi.*

Järjestyksen ja kokonaisjärjestyksen käsitteiden avulla esitetään kyllä tärkeä Zornin lemma⁶, mutta katsotaanpa joitakin esimerkkejä.

Esimerkki.

1. Laajennetun lukusuoran relaatio $\leq$ on kokonaisjärjestys.
2. Osajoukkorelaatio $\subset$ on järjestys.
3. Osajoukkosuhde $\subset$ on lukusuoran välien joukossa $\{] - n, n[\mid n \in \mathbb{N} \}$ kokonaisjärjestys.
4. Esitetään itseään leikkaamaton tason $\mathbb{R}^2$ käyrä parametrimuodossa

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$$

ja sanotaan, että sen piste x on ennen pistettä y eli xSy , jos on olemassa $t, s \in [0, 1]$ siten, että

$$x = (f_1(t), f_2(t)), \quad y = (f_1(s), f_2(s)) \text{ ja } t \leq s.$$

Tällöin S on käyrän pisteiden kokonaisjärjestys.

5. Järjestetään pataljoonan alokkaat heidän pituutensa mukaan: xSy , jos ja vain jos x on lyhyempi tai yhtä pitkä kuin y . Tällöin S on refleksiivinen, transitiiivinen ja yhtenäinen, mutta ei symmetrinen eikä antisymmetrinen.

Viimeinen esimerkki osoittaa, että järjestyksen tai kokonaisjärjestyksen käsite eivät ole aivan sopivia esittämään preferenssejä: antisymmetrisyys on liian rajoittava.

Määritelmä 1.3.3 *Olkoon X epätyhjä joukko. Joukon X suhdetta $\preceq$ sanotaan preferenssi- eli etusijasuhdeksi jos se on refleksiivinen, transitiiivinen ja yhtenäinen. Tällöin $x \preceq y$ luetaan “ y on parempi tai yhtä hyvä kuin x ”.*

Esimerkki.

1. Olkoon $n = 1, 2, \dots$. Tarkastellaan joukkoperhettä⁷

$$X = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ on rajoitettu Jordanin joukko} \}.$$

Merkitään Jordanin joukon A tilavuutta $V(A)$, missä

$$V(A) = \int_A 1 \, dx.$$

Sanotaan, että $A \preceq B$, jos ja vain jos $V(A) \leq V(B)$. Tällöin $\preceq$ on joukon X refleksiivinen, transitiiivinen ja yhtenäinen relaatio. Antisymmetrinen se ei ole, joten se on etusijasuhde, mutta ei osittain- tai täysinjärjestys.

⁶Eli jokaisessa ylhäältä rajoitetussa järjestetyn joukon täysin järjestetyssä osajoukossa on maksimaalinen alkio.

⁷Jordanin joukko A on sellainen joukko, jonka reuna ∂A on nollamittainen Lebesguen mielessä eli jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa kompaktit välit $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

$$\partial A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ ja } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \epsilon,$$

missä $\lambda(I_k)$ on välin I_k tilavuus.

2. Olkoon (X, σ, μ) mitta-avaruus⁸. Mitallisista joukoista $A, B \subset X$ sanotaan, että $A \preceq B$, jos ja vain jos $\mu(A) \leq \mu(B)$. Jälleen $\preceq$ on etusijasuhde mitallisten joukkojen perheessä σ , mutta ei osittain- tai täysinjärjestys.
3. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alkioista $x, y \in X$ sanotaan, että $x \preceq y$, jos ja vain jos $f(x) \leq f(y)$. Tällöin $\preceq$ on etusijasuhde joukossa X .

Nyt voidaan määritellä yleiset ääriarvot.

Määritelmä 1.3.4 *Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja, $\preceq$ joukon B etusijasuhde ja $f: A \rightarrow B$. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f globaali etusijakohta ja $f(x_1)$ on sen globaali etusija eli paras arvo, jos*

$$f(x) \preceq f(x_1) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.6)$$

Vastaavasti $x_2 \in A$ on kuvauksen f globaali takasijakohta ja $f(x_2)$ on sen globaali takasija eli huonoin arvo, jos

$$f(x_1) \preceq f(x) \text{ kaikilla } x \in A. \quad (1.7)$$

Seuraavaksi voitaisiin määritellä yleiset lokaalit ja sidotut ääriarvotehtävät. Jätetään se lukijan tehtäväksi.

1.3.3 Aidot yleiset ääriarvot

Lukusuoralla on kolme relaatiota: $\leq$, $<$ ja $=$. Tähän asti on puhuttu vain etusijasuhdesta $\preceq$, koska sen avulla voidaan määritellä lukusuoran relaatioiden $<$ ja $=$ vastineet.

Määritelmä 1.3.5 *Olkoon X epätyhjä joukko ja $\preceq$ sen etusijasuhde. Määritellään joukon X suhteet $\prec$ ja $\sim$ kaavoin*

$$x \prec y, \text{ jos ja vain jos } x \preceq y \text{ ja ei } y \preceq x, \quad (1.8)$$

$$x \sim y, \text{ jos ja vain jos } x \preceq y \text{ ja } y \preceq x. \quad (1.9)$$

Suhdetta $\prec$ sanotaan joukon X aidoksi etusijasuhdeksi eli aidoksi preferenssirelaatioksi; $x \prec y$ luetaan "y on parempi kuin x". Suhdetta $\sim$ sanotaan joukon X samasijasuhdeksi eli indifferenssirelaatioksi; $x \sim y$ luetaan "x on yhtä hyvä kuin y".

Esimerkki. Rajoitetut Jordanin joukot ovat $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, ovat yhtä hyviä, jos niiden tilavuus on sama. Joukko A on parempi kuin joukko B , jos edellisen tilavuus on jälkimmäisen tilavuutta suurempi.

Lause 1.3.6 *Olkoon X epätyhjä joukko ja $\preceq$ sen etusijasuhde. Relatio $\sim$ on ekvivalenssirelaatio. Relatio $\prec$ on transitiivinen ja heikosti yhtenäinen, mutta ei yhtenäinen, symmetrinen eikä refleksiivinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä.

m.o.t.

Nyt voidaan määritellä yleiset aidot ääriarvot.

Määritelmä 1.3.7 *Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja, $\preceq$ joukon B etusijasuhde ja $f: A \rightarrow B$. Piste $x_1 \in A$ on kuvauksen f globaali aito etusijakohta ja $f(x_1)$ on sen globaali aito etusija eli aito paras arvo, jos*

$$f(x) \prec f(x_1) \text{ kaikilla } x \in A \setminus \{x_1\}. \quad (1.10)$$

⁸Ks. mitta- ja integraaliteorian kurssi; X on epätyhjä joukko, σ on tietynlainen perhe (σ -algebra) sen osajoukkoja, joita sanotaan mitallisiksi joukoiksi, ja $\mu: \sigma \rightarrow [0, \infty]$ on tietyt ehdot toteuttava kuvaus. Arvoa $\mu(A)$ sanotaan joukon $A \in \sigma$ mitaksi.

Vastaavasti $x_2 \in A$ on kuvauksen f globaali aito takasijakohta ja $f(x_2)$ on sen globaali aito takasija eli aito huonoin arvo, jos

$$f(x_1) \prec f(x) \text{ kaikilla } x \in A \setminus \{x_1\}. \quad (1.11)$$

Vastaavasti voidaan määritellä yleiset aidot lokaalit ja sidotut ääriarvot. Jätetään se lukijan tehtäväksi.

1.3.4 Etusijasuhde ja kohdekuvaus

Taloustieteissä on vilkkaasti keskusteltu, onko olemassa hyödyn tai mielihyvän käsitettä numeerisena kuvauksena, onko kuluttajan hyöty esimerkiksi

$$U(q) = pq - P(q),$$

hänen kuluttaessaan nopeudella q tiettyä tuotetta, jonka yksikköhinta on p ; tässä $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esittäisi kuluttajan mielihyvää. Juurikaan ei kiistetä sitä, etteikö kuluttajalla olisi mieltymyksiä, joiden perusteella hän käyttäytyy, ja että ne muodostaisivat preferenssirelaation⁹. On siis ongelmallista, seuraako etusijasuhteen olemassaolosta numeerisen mittalukukuvauksen olemassaolo: jos osataan panna esineet kauneusjärjestykseen, niin onko silloin kauneus samankaltainen mitattava suure mittayksiköineen kuin alokkaiden pituus?

Seuraava lause sanoo, milloin yleinen globaali ääriarvotehtävä palautuu globaaliksi ääriarvotehtäväksi, jonka kohdekuvaus on $\overline{\mathbb{R}}$ -arvoinen.

Lause 1.3.8 *Olko X ja Y epätyhjiä joukkoja, $\preceq$ joukon Y etusijasuhde ja kuvaukset $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ siten, että*

$$x \preceq y, \text{ jos ja vain jos } g(x) \leq g(y) \text{ kaikilla } x, y \in Y. \quad (1.12)$$

Tällöin yleinen globaali ääriarvotehtävä, jonka kohdekuvaus on f , on yhtäpitävä sen globaalin ääriarvotehtävän kanssa, jonka kohdekuvaus on

$$g \circ f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto g(f(x)).$$

Todistus. Yhtäpitävyydellä tarkoitetaan tässä sitä, että globaalit etusijakohdat vastaavat globaaleja maksimikohtia ja globaalit takasijakohdat globaaleja minimikohtia. Itse todistus on triviaali. **m.o.t.**

Kysymystä, onko olemassa kuvausta $g: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, joka esittäisi *annetun* joukon Y etusijasuhteen $\preceq$ kaavan (1.12) mukaisesti, sanotaan *metrisointiongelma*ksi. Kuvauksen g olemassaolo ei käytännössä riitä, vaan sen lauseke tulisi *tietää*. Kuvaukselta g vaaditaan yleensä vielä lisäominaisuuksia. Senhän tulisi vastata alokkaiden järjestämisesimerkissä esiintynyttä alokkaan pituutta, siis mittalukukuvaukselta: kaksi metrinpituista alokasta on yhteensä yhtä pitkä kuin yksi kaksimetrisen alokas.

Kuvauksen g olemassaolo ja lisäominaisuudet voivat yhdessä olla *lähes* riittävä vastaus käytännön metrisointiongelmaan¹⁰. Tarkastellaan esimerkiksi kvantitatiivisen massan käsitteen konstruointia ideaalisesta orsivaa'asta.

Määritelmä 1.3.9 *Olko X epätyhjä joukko, $\preceq$ sen suhde ja $\diamond: X \times X \rightarrow X$ kahden muuttujan kuvaus. Kolmikkoa $(X, \preceq, \diamond)$ sanotaan *ideaaliseksi orsivaa'aksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:*

⁹Yksi syy intoon kiistää mielihyvää- tai hyötyfunktion olemassaolo on ns. aleneva rajahyödyn laki: nälkäiselle ensimmäiset leipäpalat ovat mieluisimmat. Jos vielä asetetaan tavoitteeksi ihmisten yhteishyödyn kasvattaminen, olisi silloin tavoiteltava tasaista tulonjakoa ja siten tulonsiirtoja pienituloisille.

¹⁰Ks. Ilkka Niiniluoto: Approksimaatio ja idealisaatio teorianmuodostuksessa, Arkhimedes, 1A (1986), ss. A38–A48.

1. Suhde $\preceq$ on joukon X etusijasuhde.
2. Jokaisella $a, b, c \in X$ pätee $a \diamond (b \diamond c) \sim (a \diamond b) \diamond c$.
3. Jokaisella $a, b, c \in X$ pätee

$$a \preceq b \iff a \diamond c \preceq b \diamond c \iff c \diamond a \preceq c \diamond b.$$

4. Jokaisella $a, b \in X$ pätee $a \prec a \diamond b$.
5. Jos $a \prec b$, niin kaikille $c, d \in X$ on olemassa positiivinen $n \in \mathbb{N}$ siten, että $na \diamond c \preceq nb \diamond d$, missä tulot na ja nb on määritelty induktiivisesti kaavoin $1a = a$ ja $(k+1)a = ka \diamond a$.

Nimitys "orsivaaka" on luonteva, koska voidaan ajatella, että alkiot $a, b, c, d \in X$ ovat fysikaalisia kappaleita, laskutoimitus $a \diamond b$ vastaa sitä, että kappaleet a ja b pannaan samaan orsivaa'an kuppiin. Merkintä na , $n \in \mathbb{N}$, vastaa sitä, että yhteen kuppiin pannaan n kappaletta punnusta a . Toisaalta $a \prec b$ kertoo sen, että alempana on kuppi, jossa on a . Jos taas $a \sim b$, on orsi tasan vaaka-asennossa. Tällöin on uskottavaa, että ehdot 1-5 ovat voimassa ainakin idealisoivien oletusten vallitessa: esimerkiksi vaaka on kitkaton ja kuppeihin mahtuu mielivaltaisia määriä kappaleita.

Lause 1.3.10 Kolmikko $(X, \preceq, \diamond)$ ideaalinen orsivaaka, jos ja vain jos on olemassa kuvaus $f: X \rightarrow]0, \infty[$ siten, että kaikilla $a, b \in X$ pätee:

1. $a \preceq b$, jos ja vain jos $f(a) \leq f(b)$.
2. $f(a \diamond b) = f(a) + f(b)$.

Kuvaus f on yksikäsitteinen positiivista kerrointa vaille: jos $g: X \rightarrow]0, \infty[$ toteuttaa ehdot 1 ja 2, niin $g = \alpha f$ jollakin $\alpha \in]0, \infty[$.

Todistus. Ks. Krantz et al¹¹, s. 74. Vrt. geometrian kurssin janamitan olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistukseen. **m.o.t.**

1.4 ϵ -ääriarvot

Tarkastellaan junalle kiirehtijän ongelmaa. Junan ovet lukkiutuvat ja se lähtee tasan ajanhetkellä $t = 0$. Kiirehtijä haluaa minimoida odotusaikansa $f(t)$, missä t on hänen asemalaiturille saapumishetkensä. Jos hän myöhästyy, joutuu hän odottamaan seuraavaa junaa. Siis kohdekuvaus on

$$f:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} -t, & \text{jos } t < 0, \\ 2-t & \text{jos } 0 \leq t < 1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Tällä relevantilla globaalilla mininointitehtävällä ei ole pienintä arvoa, joten on määriteltävä uusi ääriarvon käsite.

Määritelmä 1.4.1 Olkoon X epätyhjä joukko, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $\epsilon \in]0, \infty[$. Piste $x_1 \in X$ on kuvauksen f ϵ -maksimikohta ja $f(x_1)$ ϵ -maksimi, jos

$$f(x_1) \geq \sup\{f(x) \mid x \in X\} - \epsilon.$$

Piste $x_0 \in X$ on kuvauksen f ϵ -minimikohta ja $f(x_0)$ ϵ -minimi, jos

$$f(x_0) \leq \inf\{f(x) \mid x \in X\} + \epsilon.$$

¹¹D.H. Krantz et al: *Foundations of measurement, Vol I, Additive and polynomial representations*, Academic Press, Lontoo, 1971.

Heti saamme seuraavan huomion.

Lause 1.4.2 *Olkoon $X \neq \emptyset$ ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Jos $x_0 \in X$ on kuvauksen f globaali minimikohta, niin se on myös ϵ -minimikohta kaikilla $\epsilon \in]0, \infty[$. Jos $x_1 \in X$ on kuvauksen f globaali maksimikohta, niin se on myös ϵ -maksimikohta kaikilla $\epsilon \in]0, \infty[$.*

Seuraava olemassaolotulos on yleisempi ja helpompi todistaa kuin globaalien ääriarvojen olemassaololle riittävät ehdot antava Weierstraßin lause¹².

Lause 1.4.3 *Olkoon X epätyhjä joukko, $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja $\epsilon \in]0, \infty[$. Jos f on ylhäältä rajoitettu, niin sillä on ϵ -maksimi. Jos f on alhaalta rajoitettu, niin sillä on ϵ -minimi.*

Todistus. Todistetaan maksimiväittämä. Olkoon f ylhäältä rajoitettu, jolloin $f(x) < \infty$ kaikilla $x \in X$. Jos $f(x) = -\infty$ kaikilla $x \in X$, on asia selvä. Olkoon siis joukko

$$S = \{f(x) \mid x \in X, f(x) \in \mathbb{R}\}$$

epätyhjä. Se on lisäksi ylhäältä rajoitettu lukusuoran osajoukko, joten reaalilukujen täydellisyysaksiooman nojalla sillä on pienin yläraja eli supremum $\sup S \in \mathbb{R}$. Supremumin määritelmän nojalla on olemassa joukon S alkio y siten, että

$$y \geq \sup S - \epsilon,$$

sillä muutoin $\sup S - \epsilon$ olisi joukon S yläraja. Piste y on jonkin joukon X alkion x_1 kuva eli $y = f(x_1)$.

Minimiväittämän todistus käy samoin käyttäen hyväksi tietoa, että jokaisella alhaalta rajoitetulla epätyhjällä lukusuoran osajoukolla on pienin alaraja eli infimum $\inf S \in \mathbb{R}$. **m.o.t.**

Esimerkki.

1. Olkoon f annettu kaavalla (1.13) ja $\epsilon \in]0, 1[$. Silloin $\inf\{f(x) \mid x \in X\} = 0$ ja väli $]0, \epsilon]$ on kuvauksen f kaikkien ϵ -minimien joukko; sen kaikkien ϵ -minimikohtien joukko on $[-\epsilon, 0[$.
2. Olkoon $\epsilon \in]0, \infty[$ ja

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Kuvauksen f ϵ -minimien joukko on $]0, \min\{\epsilon, 1\}]$ ja ϵ -minimikohtien joukko on

$$\begin{cases} \mathbb{R}, & \text{jos } \epsilon \geq 1, \\ \left] -\infty, -\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}, \infty \right[& \text{jos } 0 < \epsilon < 1. \end{cases}$$

Derivoituvien reaaliarvoisten kuvausten ääriarvokohdista tiedetään, että niissä derivaatta on nolla. Vastaava tulos pätee ϵ -ääriarvoille; esitetään ja todistetaan yksi Ekelandin lauseen¹³ seurauslause.

Lause 1.4.4 *Olkoon $\epsilon \in]0, \infty[$ ja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva. Jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f ϵ -minimikohta, niin on olemassa piste $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$f(\bar{x}_0) \leq f(x_0), \quad |x_0 - \bar{x}_0| \leq \sqrt{\epsilon}, \quad |f'(\bar{x}_0)| \leq \sqrt{\epsilon}.$$

¹²Siis se, että kompaktissa joukossa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko on kompakti täsmälleen silloin, kun se on suljettu ja rajoitettu.

¹³Ks. [1, Théorème 1.2] tai [2, Théorème I.6.1]

Jos $x_1 \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f ϵ -maksimikohta, niin on olemassa piste $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(\bar{x}_1) \geq f(x_1), \quad |x_1 - \bar{x}_1| \leq \sqrt{\epsilon}, \quad |f'(\bar{x}_1)| \leq \sqrt{\epsilon}.$$

Todistus. Todistetaan minimiväittämä. Merkitään $\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Koska $f(x_0) > -\infty$ on ϵ -minimi, niin

$$f(x_0) \leq \alpha + \epsilon \text{ ja } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Määritellään jokaiselle $\lambda \in]0, \infty[$ kuvaus

$$f_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \lambda|x - x_0|.$$

Koska f_λ on jatkuva ja

$$f_\lambda(x) \geq \alpha + \lambda|x - x_0| \rightarrow \infty, \text{ kun } x \rightarrow \pm\infty,$$

niin kuvaus f_λ saavuttaa pienimmän arvonsa jossakin pisteessä $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$. Siten

$$f(\bar{x}_0) \leq f_\lambda(\bar{x}_0) \leq f_\lambda(x_0) = f(x_0) + \lambda 0 \leq \alpha + \epsilon,$$

joten piste $\bar{x}_0$ on sekin ϵ -minimi. Toisaalta $\alpha \leq f(\bar{x}_0)$, joten

$$\alpha \leq f_\lambda(\bar{x}_0) \leq \alpha + \epsilon,$$

mistä seuraa, että

$$0 \leq f(\bar{x}_0) - \alpha + \lambda|x_0 - \bar{x}_0| \leq \epsilon.$$

Koska $f(\bar{x}_0) \geq \alpha$, niin

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}. \quad (1.14)$$

Jos $\bar{x}_0 \neq x_0$, niin f_λ on derivoituva pisteessä $\bar{x}_0$. Koska se on minimikohta, niin

$$0 = f'_\lambda(\bar{x}_0) = f'(\bar{x}_0) + \lambda \frac{\bar{x}_0 - x_0}{|\bar{x}_0 - x_0|},$$

joten $|f'(\bar{x}_0)| \leq \lambda$.

Jos $\bar{x}_0 = x_0$, niin kaikille $\delta \in \mathbb{R}$

$$f(\bar{x}_0 + \delta) - f(\bar{x}_0) = f_\lambda(\bar{x}_0 + \delta) - \lambda|\bar{x}_0 + \delta - x_0| - f_\lambda(\bar{x}_0) + \lambda|\bar{x}_0 - x_0| \geq -\lambda|\delta|.$$

Koska f on derivoituva pisteessä $\bar{x}_0$, niin toispuolisilla raja-arvoilla $\delta \rightarrow 0+$ ja $\delta \rightarrow 0-$ saadaan jälleen, että

$$-\lambda \leq f'(\bar{x}_0) \leq \lambda. \quad (1.15)$$

Valitaan epäyhtälöissä (1.14)–(1.15) $\lambda = \sqrt{\epsilon}$.

Maksimiväite todistetaan samoin.

m.o.t.

Huomaa, että epäyhtälöissä (1.14)–(1.15) voidaan valita $\lambda = 1$ tai $\lambda = \epsilon$, joten ϵ -minimikohta $\bar{x}_0$, joka riippuu λ :n valinnasta, toteuttaa epäyhtälöt

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq \epsilon, \quad |f'(\bar{x}_0)| \leq 1, \quad (1.16)$$

tai sitten epäyhtälöt

$$|\bar{x}_0 - x_0| \leq 1, \quad |f'(\bar{x}_0)| \leq \epsilon. \quad (1.17)$$

Esimerkki.

1. Junalle kiirehtijän kohdekuvaus ei ole derivoituva, joten lauseen 1.4.4 johdopäätökset eivät sille ole voimassa. Ne eivät voikaan olla voimassa, sillä jos f olisi derivoituva pisteessä $x \in]-\infty, 1[$, niin pätesi $|f'(x)| = 1$.

2. Olkoon f sama kuin edellisen esimerkin toisessa kohdassa. Lauseen 1.4.4 oletukset ovat voimassa, joten haetaan sen avulla ϵ -minimit. Olkoon $\epsilon \in]0, 1[$ ja $\epsilon \approx 0$. Epäyhtälöstä

$$|f'(\bar{x}_0)| = \left| -\frac{2\bar{x}_0}{(1 + \bar{x}_0^2)^2} \right| \leq \sqrt{\epsilon}$$

ratkeaa likimain¹⁴, että

$$|\bar{x}_0| \geq \left(\frac{4}{\epsilon}\right)^{1/6}. \quad (1.18)$$

Toisaalta kaikki ϵ -minimikohdat ovat korkeintaan etäisyydellä $\sqrt{\epsilon}$ epäyhtälön (1.18) toteuttavista pisteistä, joten kaikki ne toteuttavat likimain ehdon (1.18).

Parempi arvio saadaan käyttämällä epäyhtälöitä (1.17). Silloin likimain

$$|\bar{x}_0| \geq \left(\frac{2}{\epsilon}\right)^{1/3}$$

ja ϵ -minimit ovat pisteistä $\bar{x}_0$ etäisyydellä 1.

Suoraan ϵ -minimin määritelmästä osattiin edellisessä esimerkissä laskea, että ϵ -minimikohdat ovat likimain pisteet $x_0 \in \mathbb{R}$, joille

$$|x_0| \geq \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/2}.$$

Lausetta 1.4.5 todistaessa näytettiin itse asiassa seuraava tulos.

Lause 1.4.5 *Olkoon $\epsilon, \lambda \in]0, \infty[$ ja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivoituva. Jos $x_0 \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f ϵ -minimikohta, niin on olemassa toinen ϵ -minimikohta $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$f(\bar{x}_0) \leq f(x_0), \quad |x_0 - \bar{x}_0| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad |f'(\bar{x}_0)| \leq \lambda. \quad (1.19)$$

Jos $x_1 \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f ϵ -maksimikohta, niin on olemassa toinen ϵ -maksimikohta $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(\bar{x}_1) \geq f(x_1), \quad |x_1 - \bar{x}_1| \leq \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad |f'(\bar{x}_1)| \leq \lambda. \quad (1.20)$$

Lauseet 1.4.4 ja 1.4.5 yleistyvät todistuksineen tapaukseen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Toisenlaisella todistuksella osoitetaan vastaava tulos kuvaukselle $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, missä V on vektoriavaruus.

Harjoitustehtäviä. Ma 16.9.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Perustele kaikki jakson 1.1.1 esimerkin väitteet.
2. Piirrä jakson 1.1.3 toisen esimerkin rajoitejoukko $S \subset \mathbb{R}^2$. Hae taskulaskimen avulla kokeilemalla likimääräinen ratkaisu, jolla liikennöitsijän voitto on suurin.
3. Osoita Analyysi 1:n keinoilla, että lyhin tason kahta eri pistettä yhdistävä (jatkuva ja paloittain derivoituva) käyrä on suora.

¹⁴Epäyhtälöitä ratkaistaan likimain käyttäen mm. seuraavaa arviota. Kun y on suuri reaaliluku,

$$\frac{y}{(1+y)^2} = \frac{1}{y} \frac{1}{1+2y^{-1}+y^{-2}} \approx \frac{1}{y}.$$

4. Olkoon X vektoriavaruus. Joukkoa $A \subset X$ sanotaan *kuperaksi* eli *konveksiksi*, jos se sisältää pisteidensä *kuperat yhdisteet* eli

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \text{ kaikilla } x, y \in A \text{ ja } \lambda \in [0, 1].$$

Piirrä muutama lukusuoran $\mathbb{R}$ ja tason $\mathbb{R}^2$ kupera ja epäkupera joukko.

5. Osoita, että kahden kuperan joukon leikkaus on aina kupera. Onko kahden kuperan joukon yhdiste aina kupera?
6. Olkoon X vektoriavaruus ja $A \subset X$ epätyhjä kupera joukko. Kuvausta $f: A \rightarrow]-\infty, \infty]$ sanotaan *kuperaksi* eli *konveksiksi*, jos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \text{ kaikilla } x, y \in A \text{ ja } \lambda \in]0, 1[.$$

Anna esimerkkejä kuperista ja epäkuperista kuvauksista kun $X = \mathbb{R}$ ja $X = \mathbb{R}^2$.

7. Olkoon X vektoriavaruus A sen epätyhjä osajoukko ja $f, g: A \rightarrow]-\infty, \infty]$ kupera kuvauksia. Osoita, että summa- ja tulokuvaukset $f + g, \lambda f: A \rightarrow]-\infty, \infty]$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, ovat kupera kaikilla $\lambda \in]0, \infty[$.
8. Olkoon X vektoriavaruus ja A sen epätyhjä osajoukko. Osoita, että A on kupera täsmälleen silloin, kun sen indikaattorifunktio $I_A: X \rightarrow]-\infty, \infty]$ on kupera.

Harjoitustehtäviä. Ma 23.9.2002 klo 16-18, MaD 245

1. Osoita, että osajoukkorelaatio $\subset$ on järjestys, mutta ei kokonaisjärjestys.
2. Osoita, että $\subset$ on kokonaisjärjestys joukkoperheessä $\{[0, a] \mid a \geq 0\}$.
3. Tarkastellaan joukkoa $X = \{\text{Kalle, Maija, Ville}\}$ eli lyhyesti $\{K, M, V\}$. Merkitään xSy eli $(x, y) \in S$, jos x tykkää y :stä. Kuvaile mahdollinen maailma, jossa relaatio S on
- (a) symmetrinen, muttei refleksiivinen eikä transitiivinen,
 - (b) refleksiivinen, muttei symmetrinen eikä transitiivinen,
 - (c) transitiivinen, muttei symmetrinen eikä refleksiivinen,
4. Jatketään edellistä tehtävää. Kuvaile mahdollinen maailma, jossa relaatio S on
- (a) refleksiivinen ja symmetrinen, muttei transitiivinen,
 - (b) refleksiivinen ja transitiivinen, muttei symmetrinen,
 - (c) symmetrinen ja transitiivinen, muttei refleksiivinen
5. Jatketään edellistä tehtävää. Kuvaile mahdollinen maailma, jossa relaatio S
- (a) ei ole refleksiivinen, symmetrinen eikä transitiivinen,
 - (b) on ekvivalenssirelaatio.
6. Olkoon X sisätuloavaruus (siis vektoriavaruus, jossa on määritelty sisätulo $(\cdot \mid \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{R}$). Relaatiota $A \subset X \times X$ sanotaan *kasvavaksi* eli *monotoniseksi operaattoriksi*, jos

$$(x_1 - x_x \mid y_1 - y_2) \geq 0 \text{ kaikilla } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A.$$

Piirrä *Heavisiden operaattori*

$$H \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad Hx = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 1, \\ [0, 1], & \text{jos } x = 0, \\ 1, & \text{jos } x > 0, \end{cases}$$

ja sen käänteisoperaattori (-suhde) H^{-1} . Totea, että molemmat ovat kasvavia operaattoreita. Muista, että lukusuoran sisätulo on tavallinen kertolasku.

7. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $A: X \rightarrow X$. Mitä tarkoittaa geometrisesti, että kuvaus A on kasvava? (Piirrä kuvia!)
8. Todista lause 1.3.6.

Harjoitustehtäviä. Ma 30.9.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Hae kuvauksen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1, 1 + \sin x}{1 + x^2}$$

0,1-minimit lauseen 1.4.4 tai 1.4.5 avulla¹⁵.

2. Hae edellisen tehtävän 0,1-minimit määritelmän avulla. Onko syytä huolestua eri tuloksesta?
3. Osoita, että kuperien joukkojen leikkaus on kupera eli jos X on vektoriavaruus, J on epätyhjä joukko ja joukot $A_\alpha \subset X$ ovat kupera kaikilla $\alpha \in J$, niin joukko $\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha$ on kupera. Huomaa, että joukko J saa olla ääretön ja ylinumeroituvakin.
4. Olkoon X vektoriavaruus, $A \subset X$ kupera joukko ja kuvaukset $f, g: A \rightarrow]-\infty, \infty]$ kupera. Osoita, että kuvaus

$$\max\{f, g\}: A \rightarrow]-\infty, \infty], \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

on kupera.

5. Tee sama kuvaukselle

$$\sup_{\alpha \in J} g_\alpha: A \rightarrow]-\infty, \infty], \quad \sup_{\alpha \in J} g_\alpha(x) = \sup_{\alpha \in J} g_\alpha(x),$$

missä $J \neq \emptyset$ ja kuvaukset $g_\alpha: A \rightarrow]-\infty, \infty]$, $\alpha \in J$, ovat kupera.

6. Tarkastellaan sidottua globaalia ääriarvotehtävää, jossa kohdekuvaus on

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln(10 + \sin \cos x_1)}{2 + (x_1^2 + x_2^2) + \sin x_2}$$

ja side-ehto on $x_1^2 + 2x_2^2 = 1.1234567$. Osoita Weierstraßin lauseen avulla, että suurin ja pienin arvo ovat olemassa.

7. Määää ala- ja yläraja-arvo lukujonoille

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots \quad \text{ja} \quad 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$$

8. Osoita, että reaalilukujono, jonka yläraja-arvo on äärellinen, on ylhäältä rajoitettu. Kelpaako yläraja-arvo ylärajaksi?

¹⁵Tässä ja seuraavassa tehtävässä epäyhtälöt saa ja tulee ratkaista vain likimääräisesti.

Luku 2

Ääriarvojen olemassaolo

Tässä luvussa tarkastellaan globaalien ääriarvojen olemassaoloa. Esitetään erilaisia riittäviä ehtoja, joiden toteutuessa kohdekuvaus saavuttaa suurimman tai pienimmän arvonsa.

2.1 Kertausta: Weierstraßin lause sekä kuperat ja koverat kuvaukset

Palautetaan mieliin tärkeä tulos jatkuvan reaalikuvauksen ääriarvoista.

Lause 2.1.1 (*Weierstraßin lause*). *Olkoon jatkuva kuvaus $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Silloin kuvauksella f on sekä suurin että pienin arvo.*

Alempana Weierstraßin lause yleistetään ja yleistykset todistetaan toisella tavalla kuin analyysin kurssilla. Seuraava lause antaa riittäviä ehtoja, joiden toteutuessa reaalikuvauksen derivaatan nollakohta on sen globaali ääriarvokohta.

Lause 2.1.2 *Olkoon $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, kahdesti derivoituva, $x_0 \in]a, b[$ ja $f'(x_0) = 0$. Jos $f''(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin $f(x_0)$ on kuvauksen suurin arvo. Jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin $f(x_0)$ on kuvauksen f pienin arvo.*

Todistus. Todistetaan vain lauseen maksimiväittämä, koska minimiväittämä saadaan soveltamalla sitä kuvaukseen $-f$. Olkoon siis $f''(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Oletetaan antiteesiksi, että on olemassa $x_1 \in]a, b[$ siten, että $x_1 \neq x_0$ ja $f(x_1) > f(x_0)$. Väliarvolausesta kaksi kertaa soveltamalla saadaan, että

$$\begin{aligned} 0 < f(x_1) - f(x_0) &= f'(\xi)(x_1 - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x_1 - x_0) = \\ &= f''(\eta)(\xi - x_0)(x_1 - x_0), \end{aligned}$$

missä $\xi \in]x_0, x_1[$ ja $\eta \in]x_0, \xi[$ tai $\xi \in]x_1, x_0[$ ja $\eta \in]\xi, x_0[$. Koska kummassakin tapauksessa $(\xi - x_0)(x_1 - x_0) > 0$, onkin $f''(\eta) > 0$. Ristiriita, joten $f(x_0)$ on suurin arvo. **m.o.t.**

Lause 2.1.2 antaa oitis riittävän ehdon kuvauksen $]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, lokaalin ääriarvon olemassaololle: riittää, että sen rajoittuma johonkin väliin täyttää lauseen 2.1.2 ehdot. Weierstraßin lauseessa on oleellista se, että kuvauksen määrittelyjoukko on suljettu ja rajoitettu eli *kompakti*¹. Lauseessa 2.1.2 avainehto on se, että kohdekuvaus f on *kovera* tai *kupera*.

¹Ääretönulotteisissa avaruuksissa jokainen suljettu ja rajoitettu joukko ei ole kompakti. Kompaktin joukon A yleinen määritelmä on, että sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite eli jos joukko A sisältyy avoimien joukkojen A_α yhdisteeseen, niin se sisältyy myös yhdisteeseen, joka on muodostettu vain äärellisen monesta joukosta A_α .

Määritelmä 2.1.3 Olkoon X vektoriavaruus ja $f : A \rightarrow]-\infty, \infty]$. Joukkoa A sanotaan kuperaksi, jos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A \text{ kaikilla } x, y \in A \text{ ja } \lambda \in [0, 1] \quad (2.1)$$

Kuvausta f sanotaan kuperaksi, jos A on kupera ja

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \text{ kaikilla } x, y \in A \text{ ja } \lambda \in]0, 1[. \quad (2.2)$$

Kuvausta $g : X \rightarrow]-\infty, \infty[$ sanotaan koveraksi, jos $-g$ on kupera.

Apulause 2.1.1 Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Kahdesti derivoituva kuvaus $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ on kupera, jos ja vain jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Todistus. Lukusuoralla määritellyille kuvauksille ehto (2.2) on yhtäpitävästi

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}, \text{ kun } a < s < t < u < b. \quad (2.3)$$

Jos f on kupera, on siten $s \mapsto f'(s)$ kasvava kuvaus, jolloin $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Jos taas $f'' \geq 0$, niin $s \mapsto f'(s)$ on kasvava. Silloin väliarvolauseen nojalla (2.3) on voimassa, jolloin f on kupera. **m.o.t.**

2.2 Kuvauksen puolijatkuvuus

Usein haemme kohdekuvauksesta joko vain pienintä arvoa tai vain suurinta arvoa, joten Weierstraikin lause ja sen oletama funktion jatkuvuus on pilkottava osiin. Funktion jatkuvuus on sitä, että jokaisessa pisteessä funktion arvo on sen raja-arvo. Raja-arvon käsite jaetaan ylä- ja alaraja-arvon käsitteiksi. Aloitetaan reaalityyppisistä.

Määritelmä 2.2.1 Olkoon (x_n) jono reaalityyppisiä. Sen yläraja-arvon määrittelee kaava

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \inf_{k=1,2,\dots} \sup_{j=k,k+1,\dots} x_j.$$

Vastaavasti jonon (x_n) alaraja-arvon määrittelee kaava

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \sup_{k=1,2,\dots} \inf_{j=k,k+1,\dots} x_j.$$

Apulause 2.2.1 Olkoon (x_n) reaalityyppinen jono. Seuraavat pätevät.

1. Jonolla (x_n) on aina ylä- ja alaraja-arvo (mahdollisesti $-\infty$ tai ∞).
2. Jonolla (x_n) on osajonot (y_n) ja (z_n) siten, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

3. Jokaisella jonon (x_n) suppenevalla osajonolla (w_n)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

4. Jos jonon (x_n) ylä- ja alaraja-arvo ovat samat ja äärelliset, niin se suppenee (ns. poliisiperiaate).
5. $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.
6. $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} -x_n$.
7. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\liminf_{n \rightarrow \infty} -x_n$.

Todistus.

1. Todistetaan vain väite alaraja-arvon olemassaolosta. Yläraja-arvon olemassaolo näytetään samoin. Jos (x_n) ei ole alhaalta rajoitettu, niin

$$\inf_{j \geq k} x_j = -\infty \text{ kaikilla } k \in \mathbb{N}$$

ja siten $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup -\infty = -\infty$.

Olkoon (x_n) alhaalta rajoitettu. Silloin

$$\alpha_k := \inf\{x_j \mid j = k, k+1, \dots\} \in \mathbb{R},$$

sillä tuo joukko on epätyhjä ja alhaalta rajoitettu kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska (α_k) on kasvava reaalilukujono, on $\sup\{\alpha_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ joko reaaliluku tai $+\infty$.

2. Todistetaan vain väite alaraja-arvosta. Olkoon aluksi (x_n) alhaalta rajoitettu, $\epsilon \in]0, \infty[$ mielivaltainen, $\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \in \mathbb{R}$ ja α_k kuten edellisen kohdan todistuksessa. Supremumin ja infimumin ominaisuuksien nojalla on olemassa luvut $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ ja $j_\epsilon \in \{k_\epsilon, k_\epsilon + 1, \dots\}$ siten, että

$$\alpha_{k_\epsilon} > \alpha - \frac{\epsilon}{2} \text{ ja } x_{j_\epsilon} < \alpha_{k_\epsilon} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Koska (α_k) on kasvava jono ja $x_{j_\epsilon} \geq \alpha_{k_\epsilon}$, niin

$$|x_{j_\epsilon} - \alpha| \leq |x_{j_\epsilon} - \alpha_{k_\epsilon}| + |\alpha_{k_\epsilon} - \alpha| = x_{j_\epsilon} - \alpha_{k_\epsilon} + \alpha - \alpha_{k_\epsilon} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Siten kohti lukua α suppeneva jonon (x_n) osajono saadaan, kun valitaan $\epsilon = 1/n$.

Olkoon seuraavaksi $\alpha = \infty$. Silloin jokaiselle $M \in]0, \infty[$ on olemassa $k_M, j_M \in \mathbb{N}$ siten, että

$$M \leq \alpha_{k_M} \leq x_{j_M}.$$

Näin $x_{j_M} \rightarrow \infty$, kun $M \rightarrow \infty$.

Olkoon lopuksi (x_n) alhaalta rajoittamaton. Silloin sillä on osajono (w_n) , jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = -\infty$. Toisaalta $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Väite yläraja-arvosta todistetaan samoin.

3. Koska $\{w_j \mid j = k, k+1, \dots\} \subset \{x_j \mid j = k, k+1, \dots\}$, niin kohdan 1 nojalla

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} x_j \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} w_j = \liminf_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} x_j \geq \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} w_j = \limsup_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n. \end{aligned}$$

4. Kohdan 3 nojalla jokainen jonon (x_n) suppeneva osajono suppenee kohti lukua $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. Olkoon (y_n) sellainen jonon (x_n) osajono, joka ei suppene ja $\epsilon \in]0, \infty[$. Silloin on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$y_n \leq \alpha - \epsilon \text{ tai } y_n \geq \alpha + \epsilon \text{ kaikilla } n = n_\epsilon, n_\epsilon + 1, \dots$$

Edelleen on olemassa $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ ja jonon (y_n) on osajono (z_n) siten, että $z_n \leq \alpha - \epsilon$ kaikilla $n = m_\epsilon, m_\epsilon + 1, \dots$ tai $z_n \geq \alpha + \epsilon$ kaikilla $n = n_\epsilon, n_\epsilon + 1, \dots$. Täten

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \alpha - \epsilon \text{ tai } \limsup_{n \rightarrow \infty} z_n \geq \alpha + \epsilon. \quad (2.4)$$

Koska kohdan 3 todistuksen mukaan jonon (x_n) osajono (z_n) toteuttaa

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ ja } \limsup_{n \rightarrow \infty} z_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Näistä kummastakin saadaan ristiriita epäyhtälöiden (2.4) kanssa, joten koko jono (x_n) suppenee kohti lukua α .

5. Kohdan 2 nojalla alaraja-arvo saavutetaan jollakin suppenevalla osajonolla, jolloin kohdan 3 nojalla sen raja-arvo on pienempi tai yhtäsuuri kuin koko jonon yläraja-arvo.
6. Koska jokaiselle $A \subset \mathbb{R}$ pätee $\sup A = -\inf -A$, niin

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf_{j \geq k} x_j = \sup_{k \in \mathbb{N}} - \left(- \inf_{j \geq k} (-x_j) \right) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} - \sup_{j \geq k} -x_j = - \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} -x_j = - \limsup_{n \rightarrow \infty} -x_n.\end{aligned}$$

7. Valitaan edellisessä kohdassa $x_n := -x_n$.

m.o.t.

Esimerkki.

1. Olkoon $(x_n) = 1, -1, 1, -1, \dots$ Nyt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 \text{ ja } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

2. Olkoon $(x_n) = 1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots$ Nyt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \text{ ja } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Apulause 2.2.2 Olkoot (x_n) ja (y_n) reaalitykköjonoja. Silloin

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n),$$

kunhan vasemmalla puolella ei ole $\infty - \infty$ tai $-\infty + \infty$. Pätee myös

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

jos oikealla puolella ei ole $\infty - \infty$ tai $-\infty + \infty$.

Todistus. Todistetaan ensimmäinen epäyhtälö; toisen todistus käy samoin. Jos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

on asia selvä. Voidaan siis olettaa, että jonot (x_n) ja (y_n) ovat alhaalta rajoitettuja. Merkitään

$$\alpha_k = \inf\{x_j \mid j = k, k+1, \dots\} \text{ ja } \beta_k = \inf\{y_j \mid j = k, k+1, \dots\}.$$

Koska jonot (α_k) ja (β_k) ovat kasvavia reaalitykköjonoja, niin

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \text{ ja } \sup_{k \in \mathbb{N}} \beta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k.$$

Siten raja-arvojen yleistetyt yhteenlaskuväittämät² nojalla

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k + \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k + \beta_k). \quad (2.5)$$

Toisaalta infimumin ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\inf\{x_j + y_j \mid j = k, k+1, \dots\} &\geq \inf\{x_j \mid j = k, k+1, \dots\} \\ &+ \inf\{y_j \mid j = k, k+1, \dots\} = \alpha_k + \beta_k.\end{aligned}$$

Koska kumpikin näistä on kasvava k :n suhteen, on niillä raja-arvo ja siten (2.5) antaa väitteen. **m.o.t.**

Ääretönulotteisten joukkojen kuvausten jatkuvuuden määrittelemiseksi tarvitaan metriikan ja metrisen avaruuden käsitteet.

²Yleistyksessä sallitaan raja-arvoiksi ∞ .

Määritelmä 2.2.2 Olkoon X epätyhjä joukko ja $d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$ kuvaus, joka toteuttaa seuraavat kolme ehtoa.

1. $d(x, y) = d(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. (Symmetrisyys).
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in X$. (Kolmioepäyhtälö).
3. $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$. (Definiittisyys).

Paria (X, d) sanotaan metriseksi avaruudeksi ja kuvausta d sen metriikaksi.

Esimerkki.

1. Olkoon $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$, $d(x, y) = |x - y|$. Parit $(\mathbb{R}, d)$, $(\mathbb{Q}, d)$, $(\mathbb{N}, d)$ ja $([0, 1], d)$ ovat metrisiä avaruuksia.
2. Olkoot kuvaukset

$$d_1, d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[, \quad d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |y_2 - y_2|\}.$$

Parit $(\mathbb{R}^2, d_1)$ ja $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ovat metrisiä avaruuksia.

3. Olkoon X epätyhjä joukko ja

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty[, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } x = y, \\ 1 & , \text{ jos } x \neq y. \end{cases}$$

Pari (X, d) on metrinen avaruus. Sitä sanotaan *diskreetiksi*, koska sen jokaisella pisteellä x on avoin pallo $B(x, 1) = \{y \in X \mid d(x, y) < 1\}$, johon kuuluu vain tuo piste.

4. Olkoon

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}, \\ Y = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on integroitava}\}, \\ d: X \times X \rightarrow [0, \infty[, \quad d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Pari (X, d) on metrinen avaruus, mutta (Y, d) ei sellainen ole, koska joukossa Y kuvaus d ei ole definiitti, sillä kuvaukselle $h \in Y$,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } 0 \leq x < 1, \\ 1 & , \text{ jos } x = 1. \end{cases} \quad , \quad d(h, 0) = 0 \text{ ja } h \neq 0.$$

5. Olkoon

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}, \quad Y = \{f \in X \mid f(0) = f(1) = 1\}, \\ d: X \times X \rightarrow [0, \infty[, \quad d(f, g) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x \in [0, 1]\}.$$

Parit (X, d) ja (Y, d) ovat metrisiä avaruuksia.

Määritelmä 2.2.3 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) jono sen alkioita. Jonoa (x_n) sanotaan Cauchyn jonoksi, jos

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0, \quad \text{kun } m, n \rightarrow \infty.$$

Jonon (x_n) sanotaan suppenevan kohti pistettä $x \in X$, jos

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Esimerkki.

1. Olkoon (X, d) kuten edellisen esimerkin kohdassa 4. Jos $f_n \in X$, $f_n(x) = x^n$ ja $f(x) \equiv 0$, niin

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |x^n - x^m| dx \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \rightarrow 0,$$

kun $n, m \rightarrow \infty$. Siten (f_n) on Cauchyn jono. Edelleen

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Siten (f_n) suppenee kohti nollakuvausta f .

2. Olkoon $d(x, y) = |x - y|$. Jono $(x_n) = (1/n)$ on Cauchyn jono metrisissä avaruuksissa $(\mathbb{R}, d)$, $([0, 1], d)$ ja $(]0, 1], d)$. Se suppenee kahdessa ensimmäisessä avaruudessa (kohti nollaa), mutta avaruudessa $(]0, 1], d)$ se ei suppene.
3. Jokainen suppeneva jono on Cauchyn jono, mutta päinvastainen ei aina päde.

Määritelmä 2.2.4 *Metristä avaruutta (X, d) sanotaan täydelliseksi, jos sen jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee eli on olemassa $x \in X$ siten, että*

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Esimerkki.

1. Olkoon $d(x, y) = |x - y|$. Avaruudet $(\mathbb{Q}, d)$ ja $(]0, 1], d)$ eivät ole täydellisiä, mutta $(\mathbb{R}, d)$ ja $([0, 1], d)$ ovat.
2. Olkoon

$$X = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}, \quad d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|.$$

Pari (X, d) on täydellinen metrinen avaruus. Sitä merkitään lyhyesti symbolilla $C[0, 1]$.

Metrisen avaruuden (X, d) jonon (x_n) suppeneminen kohti pistettä $x \in X$ lausutaan yhtäpitävästi ϵ -kielellä seuraavasti: jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x_n, x) < \epsilon, \text{ kun } n > N_\epsilon. \quad (2.6)$$

Avoimien pallojen avulla tämä kuuluu: jokaiselle avoimelle pallolle³ $B(x, \epsilon)$ on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$x_n \in B(x, \epsilon), \text{ kun } n > N_\epsilon. \quad (2.7)$$

Tämä muotoilu mahdollistaa jonon raja-arvon määrittämisen yleisessä topologisessa avaruudessa⁴.

Kuvauksen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on määritelty seuraavasti: jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $\delta \in]0, \infty[$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \text{ kun } 0 < |x - y| < \delta.$$

³ $B(x, \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$.

⁴Kas näin: jokaiselle avoimelle joukolla B , joka sisältää pisteen x , on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$x_n \in B, \text{ kun } n > N_\epsilon.$$

Määritelmä 2.2.5 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Luku $y \in \mathbb{R}$ on kuvauksen f raja-arvo pisteessä $x_0 \in X$, jos jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $\delta \in]0, \infty[$ siten, että

$$|f(x) - y| < \epsilon, \text{ kun } 0 < d(x, x_0) < \delta. \quad (2.8)$$

Esimerkki.

1. Olkoon $d(x, y) = |x - y|$ ja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Tällöin juuri määritelty funktion raja-arvon käsite yhtyy Analyysi 1:n funktion raja-arvon käsitteeseen.
2. Olkoon

$$X = C[0, 1], d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, T: X \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Tällöin } \lim_{f \rightarrow 0} T(f) = 0.$$

Avoimien pallojen avulla ehto (2.8) kuuluu: jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa avoin pallo $B(x_0, \delta)$ siten, että

$$|f(x) - y| < \epsilon, \text{ kun } x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}. \quad (2.9)$$

Tästä saadaan yleistettyä reaaliarvoisen kuvauksen raja-arvon käsite yleisessä topologisessa avaruudessa⁵

Ehto (2.9) johtaa kuvauksen ylä- ja alaraja-arvojen määrittelyyn.

Määritelmä 2.2.6 Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kuvauksen $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ alaraja- ja yläraja-arvo pisteessä $x_0 \in X$ määritellään kaavoin

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\epsilon \in]0, \infty[} \inf \{f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}, \quad (2.10)$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{\epsilon \in]0, \infty[} \sup \{f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}. \quad (2.11)$$

Esimerkki.

1. Kuvaukselle

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & \text{jos } x < 0, \\ 2 - x, & \text{jos } x \geq 0, \end{cases}$$

pätee

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

2. Kuvaukselle

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x \neq 0, \\ -2, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

pätee

$$\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3. Huomataan, että tavallisen raja-arvon tapaan ylä- ja alaraja-arvo eivät riipu kuvauksen arvosta pisteessä x_0 .

⁵Kuvauksen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ raja-arvo pisteessä $x_0 \in X$ on $y \in \mathbb{R}$, jos jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa sellainen avoin joukko B , joka sisältää pisteen x_0 , että

$$|f(x) - y| < \epsilon, \text{ kun } x \in B \setminus \{x_0\}.$$

Määritelmä 2.2.7 Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Määritellään ylä- ja alaraja-arvot pisteissä $\pm\infty$ kaavoin

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sup_{M \in]0, \infty[} \inf\{f(x) \mid x \in]M, \infty[\}, \quad (2.12)$$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \inf_{M \in]0, \infty[} \sup\{f(x) \mid x \in]M, \infty[\}, \quad (2.13)$$

$$\liminf_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup_{M \in]0, \infty[} \inf\{f(x) \mid x \in]-\infty, -M[\}, \quad (2.14)$$

$$\limsup_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf_{M \in]0, \infty[} \sup\{f(x) \mid x \in]-\infty, -M[\}. \quad (2.15)$$

Kaavat (2.10)-(2.11) johtavat suoraviivaisesti ylä- ja alaraja-arvon määrittelyyn myös yleisissä topologisissa avaruuksissa⁶

Lause 2.2.8 Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x_0 \in X$ ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin

1. Kuvauksella f on sekä ala- että yläraja-arvo (mahdollisesti $-\infty$ tai ∞).
2. $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
3. $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\limsup_{x \rightarrow x_0} -f(x)$.
4. $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\liminf_{x \rightarrow x_0} -f(x)$.

Todistus.

1. Todistetaan alaraja-arvon olemassaolo. Jos ei ole olemassa lukua $\epsilon_0 \in]0, \infty[$ siten, että f on alhaalta rajoitettu jokaisessa avoimessa pallossa $B(x_0, \epsilon)$, kun $0 < \epsilon < \epsilon_0$ (pistettä x_0 vaille), on sen alaraja-arvo $-\infty$. Olkoon siis olemassa $\epsilon_0 \in]0, \infty[$ siten, että f alhaalta rajoitettu jokaisessa pallossa $B(x_0, \epsilon)$ pistettä x_0 vaille. Silloin joukko

$$A_\epsilon := \{f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}$$

on alhaalta rajoitettu ja epättyhjä. Täydellisyysaksiooman seurauslauseen nojalla

$$\alpha_\epsilon := \inf\{f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\} \in \mathbb{R}.$$

Koska $A_\mu \subset A_\nu$ kun $\mu < \nu$, niin $\alpha_\mu \geq \alpha_\nu$ kun $\mu < \nu$. Siten

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{\epsilon \in]0, \infty[} \alpha_\epsilon = \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \alpha_\epsilon.$$

Nyt on vain kaksi mahdollisuutta: α_ϵ on ylhäältä rajoitettu tai ei, kun $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Jälkimmäisessä tapauksessa alaraja-arvo on ∞ , ensimmäisessä se on täydellisyysaksiooman nojalla jokin reaaliluku.

Väite yläraja-arvosta todistetaan samoin.

2. Harjoitustehtävä. Voidaan käyttää edellisen kohdan merkintöjä sekä

$$\beta_\epsilon := \sup\{f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}.$$

3. Koska jokaiselle reaalilukujoukolle A pätee $\sup A = -\inf -A$ ja $\inf A = -\sup -A$, niin

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \sup_{0 < \epsilon < \infty} -\left(-\inf\{-(-f(x)) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}\right) \\ &= -\left(-\inf_{0 < \epsilon < \infty} \sup\{-f(x) \mid x \in B(x_0, \epsilon), x \neq x_0\}\right) \\ &= -\limsup_{x \rightarrow x_0} -f(x). \end{aligned}$$

⁶Esimerkiksi

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup\left\{\inf\{f(x) \mid x \in A, x \neq x_0\} \mid A \text{ avoin}, x_0 \in A\right\}.$$

4. Sovelletaan edellistä kohtaa kuvaukseen $x \mapsto -f(x)$.

m.o.t.

Lause 2.2.9 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Tällöin pätee

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)), \quad (2.16)$$

kunhan epäyhtälön kummallakaan puolella ei esiinny $\infty - \infty$ tai $-\infty + \infty$. Pätee myös

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x), \quad (2.17)$$

kunhan epäyhtälön kummallakaan puolella ei esiinny $\infty - \infty$ tai $-\infty + \infty$. Jos $f(x) \leq g(x)$ jossakin pallossa $B(x_0, \epsilon)$, $0 < \epsilon < \infty$, niin

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad (2.18)$$

Todistus. Epäyhtälöiden (2.16) ja (2.17) todistus käy samalla lailla kuin vastaavien jonojen ala- ja yläraja-arvoja koskevien epäyhtälöiden todistaminen. Todistetaan ensimmäinen epäyhtälöistä (2.18). Infimumin ja supremumin ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf \{f(x) \mid x \in B(x, \epsilon), x \neq x_0\} \\ &\leq \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf \{g(x) \mid x \in B(x, \epsilon), x \neq x_0\} = \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x). \end{aligned}$$

m.o.t.

Täydennetään aiempaa kuvauksen raja-arvon määritelmää 2.2.5.

Määritelmä 2.2.10 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Kuvauksen f raja-arvo pisteessä x_0 on $y \in \overline{\mathbb{R}}$, jos

$$f(x) \rightarrow y, \text{ kun } 0 < d(x, x_0) \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

Tällöin merkitään $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$.

Raja-arvon määrittelevä ehto (2.19) on tapauksessa $y = \infty$ yhtäpitävästi⁷: jokaiselle $M \in]0, \infty[$ on olemassa $\delta_M \in]0, \infty[$ siten, että

$$f(x) > M, \text{ kun } x \in B(x_0, \delta_M) \setminus \{x_0\}.$$

Kuvauksen raja-arvon käsite on näin pilkottu kahteen osaan, ylä- ja alaraja-arvoon.

Lause 2.2.11 Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Kuvauksella f on raja-arvo pisteessä x_0 , jos ja vain jos

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Tällöin raja-arvo sekä ylä- ja alaraja-arvo ovat sama joukon $\overline{\mathbb{R}}$ luku.

Todistus. Olkoon kuvauksella f raja-arvo $y \in \overline{\mathbb{R}}$ pisteessä x_0 . Jos $y \in \mathbb{R}$, niin silloin jokaiselle $\eta \in]0, \infty[$ on olemassa $\xi_\eta \in]0, \infty[$ siten, että

$$y - \eta \leq f(x) \leq y + \eta, \text{ kun } 0 < d(x, x_0) < \xi_\eta.$$

⁷Tästä saadaan raja-arvon ∞ määritelmä topologisessa avaruudessa vaihtamalla avoin pallo $B(x_0, \delta_M)$ avoimeen joukkoon B_M , joka sisältää pisteen x_0

Siten jokaiselle $\eta \in]0, \infty[$

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \\ &\geq \sup_{0 < \epsilon < \xi_\eta} \inf\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \geq y - \eta. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \inf_{0 < \epsilon < \infty} \sup\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \\ &\leq \inf_{0 < \epsilon < \xi_\eta} \sup\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \leq y + \eta. \end{aligned}$$

Koska $\eta \in]0, \infty[$ on mielivaltainen,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq y \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq y,$$

joista väite seuraa.

Todistetaan yltä puuttuva puoli. Olkoot siis ylä- ja alaraja-arvot samat pisteessä x_0 . Merkitään

$$\beta := \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Olkoon $\beta \in \mathbb{R}$. Antiteesinä oletetaan, että on olemassa $\gamma \in]0, \infty[$ siten, että jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $x_\epsilon \in B(x_0, \epsilon)$, jolle $|f(x_\epsilon) - \beta| \geq \gamma$. Pätee

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \leq \sup_{0 < \epsilon < \infty} f(x_\epsilon).$$

Samoin saadaan, että

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{0 < \epsilon < \infty} \sup\{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \geq \inf_{0 < \epsilon < \infty} f(x_\epsilon).$$

Näistä seuraa, että

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \beta - \gamma \text{ tai } \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \beta + \gamma,$$

mikä on ristiriita sen kanssa, että ylä- ja alaraja-arvo ovat samat.

Tapaukset $\beta = \pm\infty$ jätetään harjoitustehtäväksi.

m.o.t.

Määritelmä 2.2.12 *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Sanotaan, että f on alhaalta puolijatkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad (2.20)$$

Jos f on alhaalta puolijatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä, sitä sanotaan alhaalta puolijatkuvaksi.

Kuvausta f sanotaan ylhäältä puolijatkuvaksi pisteessä $x_0 \in X$, jos

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0). \quad (2.21)$$

Kuvaus f on ylhäältä puolijatkuva, jos se on ylhäältä puolijatkuva jokaisessa määrittelyjoukkonsa pisteessä.

Esimerkki.

1. Kuvaus

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x = 0, \\ x^2, & \text{kun } x \neq 0, \end{cases}$$

on ylhäältä puolijatkuva kaikkialla muualla paitsi origossa, joten se ei ole ylhäältä puolijatkuva. Kuvaus f on alhaalta puolijatkuva jokaisessa pisteessä, joten se alhaalta puolijatkuva. Huomataan, että tällä kuvauksella ei ole suurinta arvoa, mutta pienin arvo sillä on.

2. Kuvaus

$$T: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(f) = \int_0^1 f(t)^2 dt,$$

on alhaalta ja ylhäältä puolijatkkuva.

Funktion jatkuvuuden käsite on nyt jaettu kahteen osaan: alhaalta ja ylhäältä puolijatkuvuuteen. Jos kuvaus on sekä alhaalta että ylhäältä puolijatkkuva pisteessä $x_0 \in X$, niin

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

eli f on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$:

Määritelmä 2.2.13 Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kuvausta $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sanotaan jatkuvaksi pisteessä $x_0 \in X$, jos sillä on tuossa pisteessä raja-arvo ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Kuvausta f sanotaan jatkuvaksi, jos se on jatkuva jokaisessa määrittelyjoukossa pisteessä

Esimerkki.

1. Edellisen esimerkin kohdan 2 kuvaus on jatkuva.
2. Tarkastellaan askelfunktiota

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \leq 0, \\ \infty, & \text{jos } x > 0, \end{cases}$$

Se on alhaalta puolijatkkuva, mutta ei ylhäältä puolijatkkuva. Sen rajoittumakuvaukset väleihin $] - \infty, 0]$ ja $]0, \infty[$ ovat jatkuvia.

Lause 2.2.14 Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kuvaus $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on alhaalta puolijatkkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos ja vain jos jokaiselle jonolle (x_n) , joka suppenee kohti pistettä x_0 , pätee

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Kuvaus $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on ylhäältä puolijatkkuva pisteessä $x_0 \in X$, jos ja vain jos jokaiselle jonolle (x_n) , joka suppenee kohti pistettä x_0 , pätee

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Todistus. Olkoon f alhaalta puolijatkkuva pisteessä $x_0 \in X$ ja (x_n) jono, joka suppenee kohti pistettä x_0 . Silloin jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(x, x_n) < \epsilon, \quad \text{kun } n \geq n_\epsilon.$$

Infimumin ja supremumin ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf \{ f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon \} \\ &\leq \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf \{ f(x_n) \mid 0 < d(x_n, x_0) < \epsilon \} \leq \sup_{0 < \epsilon < \infty} \inf \{ f(x_n) \mid n \geq n_\epsilon \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \inf \{ f(x_n) \mid n \geq n_\epsilon \} = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{ f(x_n) \mid n \geq k \} = \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \end{aligned}$$

Näytetään jos-puoli. Olkoon

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

jokaisella jonolla (x_n) , joka suppenee kohti pistettä x_0 . Silloin

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \inf \{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \epsilon\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \{f(x) \mid 0 < d(x, x_0) < \frac{1}{k}\} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(x_0) - \epsilon, \end{aligned}$$

missä $x^k \in B(x_0, 1/k)$.

m.o.t.

Lause 2.2.15 *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Seuraavat seikat ovat yhtäpitäviä*

1. *Kuvaus f on alhaalta puolijatkuva.*
2. *Joukko $\{x \in X \mid f(x) \leq \lambda\}$ on suljettu jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}$.*
3. *Joukko*

$$\text{epi } f := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$$

on suljettu.

Todistus. Näytetään, että ensimmäisestä kohdasta seuraa toinen. Olkoon siis f alhaalta puolijatkuva, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja jono (x_n) joukon S_λ alkioita, siten, että se suppenee kohti pistettä $x \in X$. Silloin

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lambda,$$

joten $x \in S_\lambda$. Siten S_λ on suljettu.

Näytetään, että toisesta kohdasta seuraa kolmas. Olkoon siis S_λ suljettu jokaisella $\lambda \in \mathbb{R}$. Olkoon $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $((x_n, \lambda_n))$ jono joukon $\text{epi}(f)$ alkioita siten, että $x_n \rightarrow x$ ja $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Jokaiselle $\epsilon \in]0, \infty[$ on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$f(x_n) \leq \lambda_n \leq \lambda + \epsilon \text{ kaikilla } n \geq n_\epsilon.$$

Silloin $x_n \in S_{\lambda+\epsilon}$ kaikilla $n \geq n_\epsilon$. Koska $S_{\lambda+\epsilon}$ on suljettu ja $x_n \rightarrow x$, niin

$$x \in S_{\lambda+\epsilon} \text{ eli } f(x) \leq \lambda + \epsilon \text{ kaikilla } \epsilon \in]0, \infty[.$$

Siten $f(x) \leq \lambda$ eli $(x, \lambda) \in \text{epi}(f)$. Näin epigraafi on suljettu.

Näytetään, että kolmannesta kohdasta seuraa ensimmäinen. Olkoon $\text{epi}(f)$ suljettu ja (x_n) mielivaltainen jono, joka suppenee kohti pistettä x . Merkitään

$$\lambda := \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Jos $\lambda \in \mathbb{R}$, niin jollakin osajonolla (x_{n_k}) pätee

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \text{ ja } f(x_{n_k}) \in \mathbb{R}.$$

Koska $\text{epi}(f)$ on suljettu,

$$(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \in \text{epi}(f), \quad x_{n_k} \rightarrow x \text{ ja } f(x_{n_k}) \rightarrow \lambda,$$

niin $(x, \lambda) \in \text{epi}(f)$ ja siten

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \tag{2.22}$$

Jos $\lambda = \infty$, pätee epäyhtälö (2.22) suoraan. Jos $\lambda = -\infty$, oletetaan antiteesiksi, että $f(x) > -\infty$. Silloin epigraafi ei ole suljettu: sen ulkopuolista pistettä $(x, f(x) - 1)$ voitaisiin lähestyä epigraafin pisteiden jonolla. Näin joka tapauksessa (2.22) pätee. Koska jono (x_n) on mielivaltainen, on f alhaalta puolijatkuva pisteessä x . **m.o.t.**

2.3 Weierstraßin lause

Nyt voidaan esittää Weierstraßin lauseen yleinen muoto:

Lause 2.3.1 *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $Y \subset X$ sen sellainen epätyhjä joukko, jonka jokaisella jonolla on siinä suppeneva osajono⁸, ja $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Jos f on alhaalta puolijatkuva, niin sillä on pienin arvo. Jos f on ylhäältä puolijatkuva, niin sillä on suurin arvo.*

Todistus. Todistetaan vain maksimiväittämä, sillä minimiväittämä saadaan siitä tarkastelemalla kuvausta $x \mapsto -f(x)$, joka on ylhäältä puolijatkuva, jos f on alhaalta puolijatkuva.

Olkoon siis f ylhäältä puolijatkuva ja merkitään

$$\beta = \sup\{f(y) \mid y \in Y\}.$$

Jos $f(y) = -\infty$ kaikilla $y \in Y$, on suurin arvo tuo $-\infty$, joten luku β olkoon äärellinen tai ∞ . Jos $f(y) = \infty$ jollakin $y \in Y$, on asia selvä.

Olkoon siis $f(y)$ äärellinen kaikilla $y \in Y$. Nyt on olemassa jono (x_n) joukon Y alkioita siten, että $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta$. Oletuksen mukaan tällä jonolla on osajono (x_{n_k}) , joka suppenee kohti jotakin joukon Y alkioita x . Ylhäältä puolijatkuvuuden nojalla

$$f(x) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta \geq f(x),$$

joten $f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Siten $f(x)$ on kuvauksen f suurin arvo. **m.o.t.**

Lause 2.3.2 *Olkoon $(V, \|\cdot\|)$ normiavaruus, jonka jokaisella rajoitetulla jonolla on suppeneva osajono, ja $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Jos f on alhaalta puolijatkuva ja*

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} f(y) = \infty, \quad (2.23)$$

niin kuvauksella f on pienin arvo. Jos f on ylhäältä puolijatkuva ja

$$\lim_{\|y\| \rightarrow \infty} F(y) = -\infty, \quad (2.24)$$

niin kuvauksella f on suurin arvo.

Todistus. Todistetaan vain minimiväittämä. Merkitään

$$\beta = \inf\{f(y) \mid y \in V\}.$$

Jos $f(y) = \infty$ kaikilla $y \in V$, on asia selvä. Olkoon siis $f(y) < \infty$ ainakin yhdellä $y \in V$. Silloin luku $\beta \in \mathbb{R}$ tai $\beta = -\infty$. On olemassa jono (x_n) joukon V alkioita siten, että $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta$. Raja-arvoehdon (2.23) mukaan jono (x_n) on rajoitettu, jolloin sillä on osajono (x_{n_k}) , joka suppenee kohti jotakin pistettä $x \in V$. Alhaalta puolijatkuvuuden nojalla

$$f(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta \leq f(x).$$

Siten $f(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ eli $f(x)$ on kuvauksen f pienin arvo. **m.o.t.**

Esitetään seuraavaksi lauseen 2.1.2 yleistys. Huomaa, että kuvausta ei oleteta edes jatkuvaksi.

⁸Tällainen joukko on esimerkiksi kompakti joukko. Joukko Y on määritelmän mukaan *kompakti*, jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite eli

$$Y \subset \cup_{i \in I} A_i, \quad A_i \text{ on avoin} \quad \text{kaikilla } i \in I \implies Y \subset A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}.$$

Lause 2.3.3 Olkoon V vektoriavaruus $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset V$ ja $x_0 \in A$ siten, että suunnattu derivaatta

$$D_h f(x_0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \epsilon h) - f(x_0)}{\epsilon}$$

on olemassa ja

$$D_h f(x_0) = 0 \text{ kaikilla } h \in \{w \in V \mid x_0 + w \in A\}.$$

Jos f on kupera, niin $f(x_0)$ on sen pienin arvo. Jos f on kovera, niin $f(x_0)$ on sen suurin arvo.

Todistus. Todistetaan vain minimiväittämä. Olkoon siis f kupera. Silloin

$$\begin{aligned} 0 = D_h f(x_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \epsilon h) - f(x_0)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{f((1-\epsilon)x_0 + \epsilon(h+x_0)) - f(x_0)}{\epsilon} \leq \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{(1-\epsilon)f(x_0) + \epsilon f(h+x_0) - f(x_0)}{\epsilon} = f(h+x_0) - f(x_0) \end{aligned}$$

kaikilla $h \in V$ siten, että $h+x_0 \in A$. Siten $f(x_0)$ on kuvauksen F pienin arvo. **m.o.t.**

Lopetetaan ääriarvojen olemassaolon riittävien ehtojen käsittely mainintaan, että refleksiivisessä Banachin avaruudessa⁹ jokainen rajoitettu jono suppenee heikosti¹⁰. Edelleen osoittautuu, että jokainen alhaalta puolijatkuva kupera kuvaus on alhaalta puolijatkuva myös heikon suppenemisen suhteen. Tällöin lauseen 2.3.2 mukaan kuvauksella on pienin arvo. Tulos on epätriviaali ja hyvin käyttökelpoinen: se takaa esimerkiksi, että funktionaalilla

$$L^2(0,1) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad y \mapsto \int_0^1 (y(x)^2 + g(y(x))) \, dx$$

on pienin arvo, jos $g: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \infty]$ on jokin alhaalta puolijatkuva kupera kuvaus.

Harjoitustehtäviä Ma 7.10.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Määrittää ala- ja yläraja-arvo lukujonoille

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad 1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots \quad \text{ja} \quad 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots$$

2. Määrittää ala- ja yläraja-arvo lukujonoille

$$(\sin n), \quad (n \sin n) \quad \text{ja} \quad \left(n \sin n \sin \frac{1}{n}\right).$$

3. Osoita, että reaalityön lukujono, jonka yläraja-arvo on äärellinen, on ylhäältä rajoitettu. Kelpaako yläraja-arvo ylärajaksi?

4. Osoita, että $\mathbb{R}^2$ on metrinen avaruus, kun sen metriikkana on

⁹Banachin avaruus on normiavaruus, jonka jokainen Cauchyn jono suppenee. Esimerkiksi $L^p(\Omega)$ on Banachin avaruus, kunhan $p \in [1, \infty]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ avoin, $m = 1, 2, \dots$. Se on refleksiivinen, jos ja vain jos $1 < p < \infty$.

¹⁰Banachin avaruuden V jono (x_n) suppenee heikosti kohti alkioita x , jos $f(x_n) \rightarrow f(x)$ jokaisella jatkuvalla lineaarikuvauksella $f: V \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) $d_1: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[$, $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$,
 (b) $d_2: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty[$, $d_1(x, y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$.

5. Piirrä edellisen tehtävän metriikoiden d_1 ja d_2 mukaiset 1-säteiset origokeskiset avoimet pallot

$$B(0, 1) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(y, 0) < 1\}.$$

6. Määää ja piirrä tason $\mathbb{R}^2$ pisteille $(1/2, 0)$ ja origo diskreetin metriikan mukaiset avoimet pallot $B(0, 1)$ ja $B((1/2, 0), 1)$.
 7. Olkoon X joukko ja d_1 ja d_2 kaksi sen metriikkaa. Niiden sanotaan olevan *ekvivalentteja*, jos on olemassa luvut $m, M \in]0, \infty[$ siten, että

$$md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^2$ metriikat $d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ja $d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ ovat ekvivalentteja.

8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) sen suppeneva jono. Osoita, että (x_n) on Cauchyn jono eli

$$d(x_n, x_m) \rightarrow 0, \text{ kun } m, n \rightarrow \infty.$$

9. Olkoot (X, d_1) ja (X, d_2) metrisiä avaruuksia, joiden metriikat ovat ekvivalentteja. Osoita, että silloin jono (x_n) joukon X alkioita suppenee metriikan d_1 suhteen täsmälleen silloin, kun se suppenee metriikan d_2 suhteen, ja että tällöin niiden raja-arvo on sama joukon X piste.

10. Olkoon

$$X = C[0, 1], d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, T: X \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Osoita, että $\lim_{f \rightarrow 0} T(f) = 0$.

Harjoitustehtäviä Ma 14.10.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Olkoon

$$X = C[0, 1], d(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, T: X \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Osoita, että $\lim_{f \rightarrow 0} T(f) = 0$.

2. Osoita suoraan määritelmien avulla, että edellisen tehtävän kuvaus T on alhaalta ja ylhäältä puolijatkuva. Onko se jatkuva?

3. Laske raja-arvot

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

4. Laske raja-arvot

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x}.$$

5. Ovatko kuvaukset $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = -1, \end{cases}$$

alhaalta puolijatkuvia? Entä jatkuvia?

6. Onko origon indikaattorifunktio

$$I_{\{0\}}: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad I_{\{0\}}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

alhaalta tai ylhäältä puolijatkua? Entä jatkuva?

7. Olkoon X vektoriavaruus, $A \subset X$ ja $f: A \rightarrow]-\infty, \infty]$ kupera kuvaus. Osoita, että kuvauksen f *epigraafi*

$$\text{epi}(f) := \{(x, \lambda) \in A \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}$$

on kupera täsmälleen silloin, kun f on kupera.

8. Piirrä kuvausten

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x^3,$$

epigraafit. Päätele kuvausten f ja g kuperaus kuvastasi.

9. Osoita, että kuvaus

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x \neq 0, \\ -1, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

saavuttaa pienimmän arvonsa

(a) suoraan ääriarvon määritelmän avulla

(b) Weierstraßin lauseen yleistetyn muodon avulla.

Harjoitustehtäviä Ma 21.10.2002, MaD 245 klo 16-181. Määrittele sellaiset kuvaukset $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, että

$$\liminf_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) > \liminf_{x \rightarrow 0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow 0} g(x).$$

2. Määrittele sellaiset kuvaukset $f, g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, että

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) &< \liminf_{x \rightarrow 0} f(x) \liminf_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ ja} \\ \liminf_{x \rightarrow 0} h(x)k(x) &> \liminf_{x \rightarrow 0} h(x) \liminf_{x \rightarrow 0} k(x). \end{aligned}$$

3. Määrää raja-arvot

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}.$$

4. Määrää raja-arvot

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \cos^2 \frac{1}{x} \text{ ja } \limsup_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \cos^2 \frac{1}{x}.$$

5. Tarkastellaan kuvausta

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \cos^2 \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ a, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

missä $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Määrää a siten, että kuvaus on alhaalta puolijatkua. Piirrä kuvauksen kuvaaja ja tutki, onko kuvauksella on pienin ja suurin arvo.

6. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, \infty]$ kupera ja alhaalta puolijatkua. Osoita, että se on rajoitettu alhaalta affiinilla kuvauksella¹¹.

¹¹ Affiini kuvaus on lineaarikuvaus ynnä vakio, esim. $g(x) = x + 2$

Luku 3

Diskreettiä optimointia

3.1 Bellmanin optimaalisuusperiaate

Tarkastellaan epätyhjää joukkoa X paikkoja, joita yhdistää verkko teitä, rautateitä, laiva- ja lentoreittejä. Merkitään järjestettyä monikkoa $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, lyhyesti $x_0, x_1, \dots, x_n$, ja sanotaan sitä *poluksi*, joka alkaa pisteestä x_0 ja joka kulkee pisteiden $x_1, \dots, x_{n-1}$ kautta pisteeseen x_n . Olkoot kuvaukset

$$c, K: X \times X \rightarrow]-\infty, \infty].$$

Luku $c(x, y)$ esittää matkan pisteestä $x \in X$ pisteeseen $y \in X$ aiheuttamia kustannuksia. Jos $c(x, y) < 0$, niin matka tuottaa enemmän kuin maksaa (maisemien katselu antaa mielihyvää, matkalla kerätään marjoja tai otetaan talteen yliajetut rusakot). Jos pisteestä x ei pääse pisteeseen y , asetetaan $c(x, y) = \infty$. Aika on tässä mallissa diskreetti ja parametri n viittaa ajanhetkeen. Tällöin $c(x, y) = \infty$ pitää sisällään sen, että yhdellä ajan askeleella ei ehditä matkustaa paikasta x paikkaan y . Paikallaan olemisesta ei tule kustannuksia, jos

$$c(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X. \quad (3.1)$$

Matkan kokonaiskustannuksia pitkin polkua $x_0, x_1, \dots, x_n$ esittää

$$C_n(x_0, x_1, \dots, x_n; y) = \sum_{i=1}^n c(x_{i-1}, x_i) + K(x_n, y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

missä $K(x, y)$ esittää sakkoa, joka tulee siitä, että paikkaan $y \in X$ ei saavuttu. Asetetaan

$$C_0(x_0; y) = K(x_0, y). \quad (3.3)$$

Esimerkki. Tarkastellaan kolmea kaupunkia α, β ja γ , siis $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Niiden välisiä matkoja esittää matriisi

$$(c(\eta, \xi)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & 5 \\ 20 & 5 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Tällöin esimerkiksi matka α :sta γ :aan on 20 yksikköä. Olkoon sama, mihin matka näiden kaupunkien välillä päättyy, jolloin $K(\eta, y) = 0$ kaikilla $\eta, y \in X$ ja siten

$$C_0(\eta; y) = 0 \text{ ja } C_1(\eta, \xi; y) = c(\eta, \xi) \text{ kaikilla } \eta, \xi, y \in X.$$

Lasketaan joitakin kahdesta osamatkasta koostuvien matkojen pituuksia:

$$\begin{aligned} C_2(\alpha, \alpha, \alpha; y) &= 0, & C_2(\alpha, \alpha, \beta; y) &= 1, \\ C_2(\alpha, \alpha, \gamma; y) &= 20, & C_2(\alpha, \beta, \alpha; y) &= 3, \\ C_2(\alpha, \beta, \beta; y) &= 1, & C_2(\alpha, \beta, \gamma; y) &= 6 \end{aligned}$$

kaikilla $y \in X$. Kaikkiaan näitä matkoja on $3^3 = 27$; niiden pituudet voitaisiin esittää 3-ulotteisella matriisilla.

Jos $K(x, y) \equiv 0$, ei ole väliä, mihin pisteeseen matka päättyy. Jos

$$K(x, y) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } x \neq y, \\ 0, & \text{jos } x = y, \end{cases} \quad (3.5)$$

niin kokonaiskustannus (3.2) on äärellinen vain jos $x_n = y$ eli sakko (3.5) pakottaa saapumaan pisteeseen $y \in X$.

Esimerkki. Olkoon edellisessä esimerkissä K annettu kaavalla (3.5), jolloin yhden askeleen matkojen kustannukset $C_1(\eta, \xi; y)$ ja kahden askeleen matkojen kustannukset $C_2(\delta, \eta, \xi; y)$ ovat äärellisiä vain, jos $\xi = y$.

Kaava (3.1) sallii saapua pisteeseen y vähemmällä kuin n :llä askeleella ilman että kokonaiskustannukset siitä kasvavat. Luonteva optimointitehtävä on siten seuraava:

($\mathbf{P}_\infty$) Olkoot $x, y \in X$ annettuja. Hae sellaiset $n \in \mathbb{N}$ ja $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1}$, joille $x_0 = x$ ja

$$C_n(x_0, x_1, \dots, x_n; y) = \inf \{ C_m(z_0, z_1, \dots, z_m; y) \mid m \in \mathbb{N}, (z_0, z_1, \dots, z_m) \in X^{m+1}, z_0 = x \}. \quad (3.6)$$

Tässä optimointitehtävässä ajan askelten määrää ei ole kiinnitetty. Jos se kiinnitetään, niin saadaan seuraava tehtävä:

($\mathbf{P}_n$) Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $x, y \in X$ annettuja. Hae sellainen $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1}$, jolle $x_0 = x$ ja

$$C_n(x_0, x_1, \dots, x_n; y) = \inf \{ C_n(z_0, z_1, \dots, z_n; y) \mid (z_0, z_1, \dots, z_n) \in X^{n+1}, z_0 = x \}. \quad (3.7)$$

Lause 3.1.1 Jos joukko X on äärellinen, niin tehtävällä ($\mathbf{P}_n$) on ratkaisu.

Todistus. Infimumia haetaan äärellisen monen reaaliluvun ja luvun ∞ joukosta ja siten se saavutetaan. **m.o.t.**

Määritelmä 3.1.2 Asetetaan kuvaukset $F_n, F_\infty: X \times X \rightarrow [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_n(x, y) &= \inf \{ C_n(z_0, z_1, \dots, z_n; y) \mid z_0, z_1, \dots, z_n \in X^{n+1}, z_0 = x \}, \\ F_\infty(x, y) &= \inf \{ C_m(z_0, z_1, \dots, z_m; y) \mid m \in \mathbb{N}, z_0, z_1, \dots, z_m \in X^{m+1}, z_0 = x \}, \end{aligned}$$

Lause 3.1.3 Olkoot $x, y \in X$ ja $c(x, x) \leq 0$. Tällöin lukujono $(F_n(x, y))$ on vähenevä ja

$$F_\infty(x, y) = \inf \{ F_n(x, y) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. **m.o.t.**

Seuraava lause on *Bellmanin optimaalisuusperiaate*.

Lause 3.1.4 Olkoot $x, y \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee

$$F_0(x, y) = K(x, y), \quad (3.8)$$

$$F_m(x, y) = \inf \{ c(x, x') + F_{m-1}(x', y) \mid x' \in X \}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Todistus. Ensimmäinen yhtälö seuraa suoraan olion $C_0(x_0)$ määritelmästä. Kaksi infimumia saadaan ottaa missä järjestyksessä hyvänsä tai yhtäaikaan¹. Siksi

$$\begin{aligned} F_m(x, y) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^m c(z_{j-1}, z_j) + K(z_m, y) \mid z_1, \dots, z_m \in X^m, z_0 = x \right\} \\ &= \inf_{z_1 \in X} \inf \left\{ c(x, z_1) + \sum_{j=2}^m c(z_{j-1}, z_j) + K(z_m, y) \mid z_2, \dots, z_m \in X^{m-1} \right\} \\ &= \inf_{z_1 \in X} \{ c(x, z_1) + F_{m-1}(z_1, y) \}. \end{aligned}$$

m.o.t.

Huomaa, että Bellmanin optimaalisuusperiaate mahdollistaa optimointitehtävän *rekursiivisen* ratkaisemisen: n -askeleisen optimaalisen polun sijasta haetaan $(n-1)$ -askeleisia optimaalisia polkuja.

Esimerkki. Olkoon $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ja $c, K: X \times X \rightarrow]-\infty, \infty]$ annetut kaavoin (3.5) ja (3.4). Määritetään kahden askeleen optimaalinen polku Bellmanin periaatteen avulla pisteestä α pisteeseen γ . Ensimmäiseksi

$$F_0(x, y) = K(x, y) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } x \neq y, \\ 0, & \text{jos } x = y \end{cases} \quad \text{kaikilla } x, y \in X,$$

joten

$$F_1(x, \gamma) = \inf_{x' \in X} \{ c(x, x') + F_0(x', \gamma) \} = c(x, \gamma) \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

Siten lyhimmän kahden askeleen polun pisteestä α pisteeseen β pituus on

$$\begin{aligned} F_2(\alpha, \gamma) &= \inf \{ c(\alpha, x') + F_1(x', \gamma) \mid x' \in X \} \\ &= \inf \{ c(\alpha, x') + c(x', \gamma) \mid x' \in X \} = c(\alpha, \beta) + c(\beta, \gamma) = 6. \end{aligned}$$

Lyhin kahden askeleen polku pisteestä α pisteeseen γ on siis α, β, γ .

3.2 Optimaalisuusyhtälö

Yleistetään Bellmanin optimaalisuusperiaatetta ja käännetään se “ajassa” taaksepäin suuntautuvaksi. Polun $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in X^{n+1}$ sijasta annetaan kohdekuvauksen muuttujana olla mahdollisesti eri joukkojen $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ karteesisen tulon alkio. Kohdekuvauksen ei tarvitse olla summalauseke, vaan pelkästään mikä hyvänsä $\overline{\mathbb{R}}$ -arvoinen kuvaus muuttujastaan.

Lause 3.2.1 (*Optimaalisuusyhtälö*). *Olko joukot $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ epätyhjiä, $n = 1, 2, \dots$ ja $G: \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_{n-1} \rightarrow [-\infty, \infty]$. Määritellään kuvaukset*

$$\begin{aligned} G_j: \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_{j-1} &\rightarrow [-\infty, \infty], \quad G_j(u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) \\ &= \inf \{ G(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j, j+1, \dots, n-1 \}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹ Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja ja $f: A \times B \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Silloin

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) &\geq \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} \inf \{ f(u, v) \mid (u, v) \in A \times B \} \\ &= \inf \{ f(u, v) \mid (u, v) \in A \times B \} \geq \inf \{ \inf_{x \in A} f(x, v) \mid (u, v) \in A \times B \} \\ &\geq \inf \{ \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y) \mid (u, v) \in A \times B \} = \inf_{x \in A} \inf_{y \in B} f(x, y). \end{aligned}$$

missä $j = 0, 1, \dots, n$. Tällöin jokaiselle $j = 0, 1, \dots, n-1$ on voimassa

$$G_j(u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) = \inf_{u_j \in \mathcal{U}_j} G_{j+1}(u_0, u_1, \dots, u_j) \\ \text{kaikilla } (u_0, \dots, u_{j-1}) \in \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_{j-1}, \quad (3.11)$$

$$G_n(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) = G(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \\ \text{kaikilla } (u_0, \dots, u_{n-1}) \in \mathcal{U}_0 \times \dots \times \mathcal{U}_{n-1}. \quad (3.12)$$

Todistus. Yhtälö (3.12) seuraa suoraan määritelmästä (3.10). Koska infimumien järjestys saadaan vaihtaa, niin jokaiselle $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$G_j(u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) \\ = \inf \{ G(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j, j+1, \dots, n-1 \} \\ = \inf_{u_j \in \mathcal{U}_j} \inf \{ G(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j+1, \dots, n-1 \} \\ = \inf_{u_j \in \mathcal{U}_j} G_{j+1}(u_0, u_1, \dots, u_j)$$

kaikilla $(u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) \in \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_{j-1}$. **m.o.t.**

Esimerkki. Ratkaistaan kaksi ääriarvotettavaa optimaalisuusyhtälön avulla. Kumpikin tehtävä voidaan ratkaista muillakin menetelmillä.

1. Olkoon $n = 2$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 = \{1, 2, 3\}$ ja

$$G: \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u_0, u_1) = u_0 u_1.$$

Lasketaan yhden muuttujan kuvaus $G_1: \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$G_1(u_0) = \inf \{ G(u_0, u_1) \mid u_1 = 1, 2, 3 \} = \inf \{ u_0 u_1 \mid u_1 = 1, 2, 3 \} = u_0,$$

sillä $u_0 > 0$. Optimaalisuusyhtälön nojalla luku

$$G_0 = \inf \{ G(u_0, u_1) \mid u_0, u_1 = 1, 2, 3 \} = \inf \{ G_1(u_0) \mid u_0 = 1, 2, 3 \} \\ = \inf \{ u_0 \mid u_0 = 1, 2, 3 \} = 1.$$

Koska $G(1, 1) = 1$, kuvaus G saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä $(1, 1)$.

2. Olkoon $n = 2$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 = \mathbb{R}$ ja

$$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(u_0, u_1) = \frac{u_1}{1 + u_0^2 + u_1^2}.$$

Tehtävänä on hakea kuvauksen G pienin arvo tai ainakin sen arvojen suurin alaraja eli infimum. Optimaalisuusyhtälön nojalla tämä kahden muuttujan minimointitehtävä palautetaan yhden muuttujan minimointitehtäväksi. Haetaan siis lukua

$$G_0 = \inf \{ G(u_0, u_1) \mid u_0, u_1 \in \mathbb{R} \}.$$

Lasketaan kuvaus $G_{2-1} = G_1$ ratkaisemalla ääriarvotettava muuttujan u_1 suhteen:

$$G_1(u_0) = \inf_{u_1 \in \mathbb{R}} G(u_0, u_1) = G(u_0, -\sqrt{1 + u_0^2}) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + u_0^2}}.$$

Seuraavaksi haetaan yhden muuttujan kuvauksen G_1 pienin arvo tai ainakin infimum; heti nähdään, että se on $G_1(0) = -1/2$. Optimaalisuusyhtälön nojalla haettu $G_0 = -1/2$. Koska kumpikin infimum saavutettiin ja kaksi peräkkäistä infimumia voidaan yhtä hyvin ottaa yhdellä kertaa, seuraa optimaalisuusyhtälöstä, että kuvauksella G on pienin arvo ja se saavutetaan, kun $u_0 = 0$ ja $u_1 = -1$.

3.2.1 Sidotut ääriarvotehtävät ja optimaalisuusyhtälö

Seuraava esimerkki valaisee sidottujen ääriarvotehtävien käsittelyä indikaattorifunktion avulla ja sitä, että optimaalisuusyhtälön soveltaminen niihin on itse asiassa sidotun ääriarvotehtävän ratkaisemista sijoitusmenetelmällä. Huomataan myös, että indikaattorifunktion avulla optimaalisuusyhtälöä voidaan soveltaa ääriarvotehtäviin, joissa kohdekuvauksen määrittelyjoukko ei ole karteesinen tulo.

Esimerkki. Olkoon

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_2^4 \text{ ja } S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + x_2^2 = 8\}.$$

Haetaan kuvauksen g pienintä arvoa joukossa S eli ratkaistaan sidottua ääriarvotehtävää, jonka side-ehto on $2x_1^2 + x_2^2 = 8$. Koska g on jatkuva ja S on kompakti, niin Weierstraßin lauseen nojalla haettu pienin arvo on olemassa, mutta olemassaolon näyttää myös seuraava päättely. Määritellään $G := g + I_S$, missä I_S on joukon S indikaattorifunktio. Siis

$$G: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jos } x \in S, \\ \infty, & \text{jos } x \notin S. \end{cases}$$

Nyt lauseen 3.2.1 merkinnöin $n = 2$, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 = \mathbb{R}$ ja kaikilla $u_0 \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned} G_1(u_0) &= \inf_{u_1 \in \mathbb{R}} G(u_0, u_1) = \inf \{u_0^3 + u_0^2 u_1^2 + u_1^4 \mid u_1^2 = 8 - 2u_0^2\} \\ &= 2u_0^4 + u_0^3 - 24u_0^2 + 64. \end{aligned}$$

Jos $u_0 \notin [-2, 2]$, niin $G_1(u_0) = \infty$. Kuvauksen G_1 derivaatan nollakohdista vain origo on välillä $[-2, 2]$, joten kuvauksen G_1 pienin arvo on $G_1(-2) = -8$, sillä $G_1(0) = 64$ ja $G_2(2) = 8$. Optimaalisuusyhtälön nojalla

$$\inf_{x \in S} g(x) = G_0 = \inf_{u_0 \in \mathbb{R}} G_1(u_0) = -8.$$

Jälleen, koska kumpikin infimum saavutettiin, haettu globaali minimikohta on

$$\left(-2, \sqrt{8 - 2(-2)^2}\right) = (-2, 0).$$

3.2.2 Lineaarinen optimointi ja optimaalisuusyhtälö

Kerrataan pikaisesti hieman yleistäen lineaarinen optimointitehtävä ja yksi sen ratkaisumenetelmä (ns. simpleksimenetelmä).

Määritelmä 3.2.2 *Sidottua ääriarvotehtävää*

(L) *Hae kuvauksen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ pienin tai suurin arvo joukossa $S \subset X$!*

sanotaan lineaariseksi ääriarvotehtäväksi, jos

1. *joukko X on vektoriavaruus ja $S \subset X$ on epätyhjä,*
2. *kuvaukset $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ on lineaarikuvaukset ja*
3. *on olemassa epätyhjä joukko J , luvut $b_j \in \mathbb{R}$ ja lineaarikuvaukset $L_j: X \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in J$, siten, että*

$$S = \bigcap_{j \in J} \{x \in X \mid L_j(x) \leq b_j\}.$$

Esimerkki.

1. Haetaan kuvauksen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 + x_2$ ja suurinta arvoa joukossa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \leq 0 \text{ ja } x_2 \geq 1\}.$$

Asettamalla $L_1(x) = x_1 + x_2$, $L_2(x) = x_1 - x_2$, $L_3(x) = -x_2$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ ja $b_3 = -1$ nähdään, että tämä tehtävä on lineaarinen optimointitehtävä.

2. Haetaan kuvauksen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 + x_2$ ja suurinta arvoa joukossa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 1\}.$$

Asettamalla $L_1(x) = x_1 - x_2$, $L_2(x) = -L_1(x)$, $b_1 = 1$ ja $b_2 = -1$ nähdään, että tämä tehtävä on lineaarinen optimointitehtävä. Sillä ei kuitenkaan ole ratkaisua, mikä onkin tavallista, jos joukko S ei ole rajoitettu.

Lause 3.2.3 *Lineaariselle optimointitehtävälle joukko S , sen minimikohtien joukko ja maksimikohtien joukko ovat kuperia.*

Todistus. Joukko S on leikkaus kuperista joukoista $\{x \in X \mid L_i(x) \leq b_i\}$, $i \in J$, joten se on kupera.

Olkoot $u, v \in X$ minimitehtävän (L) kaksi ratkaisua ja $\lambda \in [0, 1]$. Silloin kuvausten lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} f(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \\ &= \lambda \min_{z \in S} f(z) + (1 - \lambda) \min_{z \in S} f(z) = \min_{z \in S} f(z), \\ L_j(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= \lambda L_j(u) + (1 - \lambda)L_j(v) \leq \lambda b_j + (1 - \lambda)b_j = b_j \end{aligned}$$

kaikilla $j \in J$. Siten $\lambda u + (1 - \lambda)v \in S$ ja se on minimitehtävän (L) ratkaisu. Näin minimien joukko on kupera. Samoin näytetään maksimien joukko kuperaksi. **m.o.t.**

Lause 3.2.4 *Olkoon X metrinen avaruus² sekä f ja L_j jatkuvia kaikilla $j \in J$. Silloin lineaarisen optimointitehtävän joukko S , sen minimikohtien joukko ja maksimikohtien joukko ovat suljettuja.*

Todistus. Joukko S on leikkaus suljetuista joukoista $\{x \in X \mid L_i(x) \leq b_i\}$, joten se on suljettu.

Olkoot $x^1, x^2, \dots$ jono minimitehtävän (L) ratkaisuja siten, että se suppenee kohti jotakin $x \in X$. Koska $x^n \in S$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja S on suljettu, niin $x \in S$. Koska f on jatkuva, niin

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{z \in S} f(z) = \min_{z \in S} f(z)$$

eli x on minimikohta. Samoin näytetään, että maksimikohtien joukko on suljettu. **m.o.t.**

Määritelmä 3.2.5 *Olkoon X vektoriavaruus ja $S \subset X$ epätyhjä joukko. Pistettä $x \in S$ sanotaan joukon S kärkipisteeksi, jos se ei ole kahden muun joukon S pisteen kupera yhdiste.*

²Riittää, että X on topologinen vektoriavaruus eli että kuvaukset $(u, v) \mapsto u + v$ ja $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ ovat jatkuvia.

Esimerkki.

1. Joukon $\{0\} \subset \mathbb{R}$ kärkipiste on 0, joukon $\{0, 1\}$ kärkipisteet ovat 0 ja 1. Samoin joukon $[0, 1]$ kärkipisteet ovat 0 ja 1. Joukolla $]0, 1[$ ei ole lainkaan kärkipisteitä.
2. Olkoon $S \subset \mathbb{R}^2$,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - x_2 \geq 0 \text{ ja } x_2 \geq -2\}.$$

Sen kärkipisteet ovat $(1/2, 1/2)$, $(-2, -2)$ ja $(3, -2)$.

3. Joukon

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^2\}$$

kärkipisteiden joukko on (harjoitustehtävä!)

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2\}.$$

Seuraava lause on lineaarisen optimoinnin peruslause, jonka perusteella ääriarvokohtia riittää hakea vain joukon S kärkipisteiden joukosta.

Lause 3.2.6 *Olkoon X metrinen ja vektoriavaruus ja lineaarikuvaukset f ja L_j jatkuvia kaikilla $j \in J$. Jos lineaarisella optimointitehtävällä (L) on ratkaisu, niin yksi ratkaisukohdista on joukon S kärkipiste.*

Todistus. Ks. Optimointimenetelmät. Koska kohdekuvaus on lineaarinen, niin ääriarvo saavutetaan myös joukon S reunalla, sillä muutoin kohdekuvaus olisi nollakuvaus (ks. DIL1). **m.o.t.**

Yllä olevaan lauseeseen perustuu ns. *simpleksimenetelmä*: Valitaan yksi joukon S kärkipiste ja lasketaan kohdekuvausten arvo siinä ja sen naapurikärkipisteessä. Jos haetaan pienintä arvoa, siirrytään tuohon naapurikärkipisteeseen, jos kohdekuvaus ei siitä kasva. Jos se kasvaa, kokeillaan toista naapurikärkipistettä.

Esimerkki.

1. Haetaan kuvauksen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 + x_2$ ja pienintä arvoa joukossa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \leq 0 \text{ ja } x_2 \geq -2\}.$$

Joukon S kärkipisteet on jo laskettu, joten riittää verrata kohdekuvausten arvoja niissä:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1, \quad f(-2, -2) = -4 \text{ ja } f(3, -2) = 1.$$

Näin suurin arvo on 1 ja pienin on -4 .

2. Ratkaistaan edellinen tehtävä optimaalisuusyhtälön avulla. Ensimmäiseksi rajoitteet poistetaan joukon S indikaattorifunktion I_S avulla eli tarkastellaan kuvausta $G = f + I_S$. Asetaan $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1 = \mathbb{R}$ ja lasketaan kuvaus $G_1: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} G_1(u_0) &= \inf\{G(u_0, u_1) \mid u_1 \in \mathbb{R}\} = \inf\{u_0 + u_1 \mid (u_0, u_1) \in S\} \\ &= \inf\{u_0 + u_1 \mid -2 \leq u_1 \leq \min\{u_0, 1 - u_1\}\} \\ &= u_0 - 2, \text{ jos } -2 \leq \min\{u_0, 1 - u_0\} \end{aligned}$$

eli $-2 \leq u_0 \leq 3$. Muulloin $G_1(u_0) = \infty$. Siten optimaalisuusyhtälön nojalla

$$G_0 = \inf\{G(u_0, u_1) \mid u_0, u_1 \in \mathbb{R}\} = \inf_{u_0 \in \mathbb{R}} G_1(u_0) = \inf_{-2 \leq u_0 \leq 3} (u_0 - 2) = -4.$$

Kumpikin infimum saavutettiin, joten pienin arvo on -4 ($= f(-2, -2)$).

3.3 Diskreettiä säätöteoriaa

Tässä jaksossa tarkastellaan diskreettejä *säätöteoreettisia* optimointiongelmia, jollainen on esimerkiksi kylmillään olleen kesämökin lämmityksen säätäminen niin, että lämpötila mökin sisällä on mahdollisimman lähellä haluttua ja lämmityskustannukset jäävät samalla mahdollisimman pieniksi³. Tällöin tunnistetaan kaksi eri muuttujaa: *säätö* (lämmittimen teho) ja *tila* (lämpötila). Edellisen arvoa ajanhetkellä t merkitään tavallisesti $u(t)$ ja jälkimmäisen $x(t)$. Aikaa pidetään diskreettinä, joten merkitään lyhyesti u_n ja x_n pidempien ilmaisujen $u(t_n)$ ja $x(t_n)$ sijasta.

Määritelmä 3.3.1 Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja epättyhjät joukot $\mathcal{X}, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ sekä kuvaukset $g_j: \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \rightarrow]-\infty, \infty]$, $j = 0, 1, \dots, n$, ja $K: \mathcal{X} \rightarrow]-\infty, \infty]$. Joukossa $\{0, 1, \dots, n-1\}$ määriteltä kuvausta $j \mapsto u_j$ sanotaan *säätömuuttujaksi*, jos $u_j \in \mathcal{U}_j$ jokaisella $j = 0, \dots, n-1$. Kuvausta

$$\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{X}, \quad j \mapsto x_j,$$

sanotaan *säätömuuttujaan u liittyväksi tilamuuttujaksi*, jos seuraavat kolme ehtoa toteutuvat.

(i) *Lausekkeen*

$$C = \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x_j, u_j) + K(x_n) \quad (3.13)$$

minimoivan $(u_0, \dots, u_{n-1})$ jokainen komponentti u_j riippuu vain olioista x_j ja j kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$.

(ii) *Olio x_{j+1} riippuu vain olioista x_j , j ja u_j kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$.*

(iii) *Jokaisella $j = 0, 1, \dots, n$ pätee $x_j \in \mathcal{X}$.*

Joukkoa $\mathcal{X}$ sanotaan tällöin *tila-avaruuksi*.

Esimerkki. Kesämökin lämmittämisen tapauksessa voidaan asettaa $\mathcal{X} = \mathcal{U}_0 = \dots = \mathcal{U}_{n-1} = \mathbb{R}$ tai tiukemmin $\mathcal{X} = [-273, 300]$ ja $\mathcal{U}_0 = \dots = \mathcal{U}_{n-1} = [0, 8]$, jolloin lämpötilan mittayksikkönä on yksi Celsius-aste ja lämmitystehon yksi kilowatti. Lämpötilalle asetetaan yläraja, jotta puinen mökki ei leimahtaisi tulleen. Lämmitysteholle asettaa ylärajan pääsulakkeiden koko. Tilamuuttujana on lämpötila, jonka oletetaan kullakin hetkellä riippuvan vain lämpötilasta ja lämmitystehosta edellisellä diskreetin ajan hetkellä.

Tämä esimerkki antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 3.3.2 Olkoot joukot $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ ja $\mathcal{X}$ epättyhjiä sekä kuvaukset $a_j: \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{X}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Yhtälöä

$$x_{j+1} = a_j(x_j, u_j) \quad \text{kaikilla } j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.14)$$

sanotaan *tilayhtälöksi*.

³Tällöin on *kaksi* keskenään ristiriitaista tavoitetta: suurella lämmitysteholla lämpötila tulee nopeasti halutuksi, mutta lämmityskustannukset ovat suuret; pienellä lämmitysteholla saadaan pienet lämmityskustannukset, mutta lämpötila nousee hitaasti toivottuun arvoonsa. Tämä säätöteoriassa tavallinen kahden ristiriitaisen kriteerin ongelma on *monitavoiteoptimoinnin* perusongelma, mutta vaivihkaa se sivuutetaan ("ratkaistaan") ottamalla kohdekuvaukseksi painotettu keskiarvo kummankin kriteerin täytymättömyyttä kuvaavista kohdekuvauksista.

Esimerkki.

1. Kesämökin lämmittämisen tapauksessa tilayhtälö on lämpöyhtälö⁴. Jos ajan askel eli $t_{j+1} - t_j$ on vakio, niin pätee varsin tarkasti, että

$$x_{j+1} = x_j + \alpha u_j - \alpha \beta (x_j - \hat{x}_j) \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.15)$$

missä vakio α on kääntäen verrannollinen kesämökin lämpökapasiteettiin, $\hat{x}_j$ on ulkolämpötila ja vakio β on mökin ulkoseinien, lattian ja katon pinta-ala kertaa niiden U-arvo (oletetaan alapohjan olevan hyvin tuulettettu). Yhtälö (3.15) esittää lämmön säilymistä: mökin sisältämän lämmön (energian) muutos on mökkiin tuotu lämpö pois sieltä seinien, katon ja lattian kautta samassa ajassa poistuva lämpö.

2. Mekaniikan piiriin kuuluvissa sovellutuksissa yhtälöä (3.14) sanotaan *liikkeyhtälöksi*. Newtonin liikkeyhtälö m -massaiselle kappaleelle homogeenisessa gravitaatiokentässä on $mx''(t) = -mg$, missä $x(t)$ esittää kappaleen korkeutta (sijaintia) hetkellä t . Siitä saadaan ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö laajentamalla tila kaksiulotteiseksi. Merkitään $y(t) = x'(t)$, jolloin

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (y(t), -g) \text{ kaikilla } t \in [0, \infty[.$$

Tämän yhtälön diskreetti vastine saadaan korvaamalla derivaatta erotusosamäärällä, jolloin kappaleen putoamista kuvataan yhtälöllä

$$(x_{j+1}, y_{j+1}) = (x_j, y_j) + (t_{j+1} - t_j)(y_j, -g) \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots$$

Lause 3.3.3 Olkoot $n \in \mathbb{N}$, epättyhjät joukot $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ ja $\mathcal{X}$, kuvaukset $a_j: \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{X}$, $g_j: \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \rightarrow]-\infty, \infty]$, $j = 0, 1, \dots, n$, ja $K: \mathcal{X} \rightarrow]-\infty, \infty]$ sekä $x_0 \in \mathcal{X}$. Olkoon tilayhtälö (3.14) voimassa ja säätömuuttujan u optimaalisuuden määrittäköön kaavan (3.13) kustannusfunktio. Merkitään

$$\begin{aligned} F_j(x_j) &= F_j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}):= \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} g_k(x_k, u_k) + K(x_n) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j, j+1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tällöin pätee:

- (i) Optimaalinen u_j riippuu vain olioista j ja x_j jokaisella $j = 0, \dots, n-1$.
- (ii) $j \mapsto x_j$, $\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{X}$, on säätömuuttujan $j \mapsto u_j$ tilamuuttuja.
- (iii) Lausekkeet $F_j(x_j)$ riippuvat vain olioista j ja x_j eli

$$F_j: \mathcal{X} \rightarrow]-\infty, \infty], j = 0, 1, \dots, n.$$

- (iv) Kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$F_j(x_j) = \inf_{v \in \mathcal{U}_j} \left(g_j(x_j, v) + F_{j+1}(a_j(x_j, v)) \right), \quad (3.17)$$

$$F_n(x_n) = K(x_n). \quad (3.18)$$

- (v) Olio $F_j(x_j)$ on pienin mahdollinen tuleva kustannus, kun takana on säätö- ja tilamuuttujien historia hetkestä $k = 0$ hetkeen $k = j$.

⁴Tarkemmin ajan suhteen diskretisoitu ja paikan suhteen keskiarvoistettu lämpöyhtälö. Varsinainen lämpöyhtälö on 1+3-ulotteinen parabolinen osittaisdifferentiaaliyhtälö $\partial \theta / \partial t - \kappa \Delta \theta = 0$, missä κ on positiivinen vakio, Δ on Laplacen operaattori ja θ on lämpötila.

Todistus. Todistus on induktiivinen. Määritelmän (3.16) mukaan $F_n(x_n) = K(x_n)$ eli (3.18) pätee. Samalla pätee, että $F_n(x_0, \dots, x_n, u_0, \dots, u_{n-1})$ pelkistyy vain oliosta x_n riippuvaksi. Olkoon tämä pelkistyminen voimassa oliolle $F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}, u_0, \dots, u_k)$, kun $k \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, missä $j \leq n$. Tuolloin siis

$$F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}, u_0, \dots, u_k) = F_{k+1}(x_{k+1}).$$

Optimaalisuusyhtälö (3.11) sanoo nyt, että

$$F_k(x_k) = \inf_{u_k \in \mathcal{U}_k} \left(g_k(x_k, u_k) + F_{k+1}(a_k(x_k, u_k)) \right). \quad (3.19)$$

Lauseke, josta infimum otetaan, riippuu vain olioista x_k , u_k ja k . Siten infimum riippuu vain olioista x_k ja k . Näin tämä pelkistyminen toteutuu myös oliolle $F_k(x_0, \dots, x_k, u_0, \dots, u_{k-1})$. Induktioperiaatteen nojalla se pätee kaikille $k = n, n-1, \dots, 0$. Täten (iii) ja (iv) pätevät. Yhtälöstä (3.19) nähdään, että optimaalinen u_k riippuu vain olioista x_k ja k eli (i) pätee. Tilayhtälön nojalla $x_{k+1} \in \mathcal{X}$ riippuu vain olioista x_k , u_k ja k , joten $k \mapsto x_k$ on säätömuuttujan $k \mapsto u_k$ tilamuuttuja eli (ii) pätee. Kohta (v) on selvä. **m.o.t.**

Esimerkki. Tarkastellaan kylmillään olleen kesämökin lämmittämistä päivässä lämpötilaan $x_4 = 20$ (Celsius-astetta). Valitaan ajan askeleen pituudeksi 6 tuntia. Oletetaan vuorokauden sääennustuksen toteutuvan ja sen mukaisten ulkolämpötilojen olevan $\hat{x}_0 = 0$, $\hat{x}_1 = -5$, $\hat{x}_2 = -10$ ja $\hat{x}_3 = -20$. Mökin alkulämpötila olkoon $x_0 = 0$. Puisen mökin lämpökapasiteetin oletetaan olevan sama kuin 514,3 litralla vettä, jolloin

$$\alpha = \frac{6 \times 3600 \text{ s}}{514,3 \text{ kg} \times 4,2 \text{ kJ/kg K}} = 10,0 \frac{\text{K}}{\text{kW}}.$$

eli lyhyesti $\alpha = 10$, kunhan lämmitystehon yksikkönä muistetaan pitää yksi kilowatti ja lämpötilan yksi Kelvin tai Celsius-aste. Mökin seinien, lattian ja laipion U-arvoksi oletetaan 0,25 W/K m² ja pinta-alaksi 200 m², jolloin

$$\beta = 50 \frac{\text{W}}{\text{K}} \text{ ja } \alpha\beta = 10 \frac{\text{K}}{\text{kW}} \times 50 \frac{\text{W}}{\text{K}} = \frac{1}{2}.$$

Tilayhtälö (3.15) on nyt ilman yksiköitä kirjoitettuna

$$x_{j+1} = \frac{1}{2}x_j + 10u_j + \frac{1}{2}\hat{x}_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.20)$$

Pyritään lämmittämään mökki niin, että lauseke

$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} (u_j + j\gamma(20 - x_j)^2) + K(x_n) \quad (3.21)$$

on mahdollisimman pieni; valitaan $\gamma = 1$ ja $n = 4$. Koska loppulämpötila $x_4 = 20$ halutaan saavuttaa, niin päätekustannus K on joukon $\{20\}$ indikaattorifunktio.

Sovelletaan lausetta 3.3.3 ja lasketaan takenevasti optimaalinen mökin lämmitys. Koska $F_4 = K = I_{\{20\}}$, niin

$$\begin{aligned} F_3(x_3) &= \inf_{v \in \mathcal{U}_3} \left(v + 3(20 - x_3)^2 + F_4\left(\frac{1}{2}x_3 + 10v + \frac{1}{2}\hat{x}_3\right) \right) \\ &= \inf_{0 \leq v \leq 8} \left(v + 3(20 - x_3)^2 + I_{\{20\}}\left(\frac{1}{2}x_3 + 10v - 10\right) \right) \\ &= 3 - \frac{1}{20}x_3 + 1200 - 120x_3 + 3x_3^2 \text{ kaikilla } x_3 \in [-120, 40], \end{aligned}$$

missä infimum saavutetaan, kun $v = u_3 = 3 - 0,05x_3$. Jos $x_3 \notin [-120, 40]$, niin $F_3(x_3) = \infty$. Jätetään harjoitustehtäviksi laskea F_2 , F_1 ja lopulta F_0 sekä optimaaliset u_0, u_1, u_2, u_3 ;

$$\begin{aligned} F_2(x_2) &= \inf_{v \in \mathcal{U}_2} \left(v + 2(20 - x_2)^2 + F_3\left(\frac{1}{2}x_2 + 10v + \frac{1}{2}\hat{x}_2\right) \right) \\ &= \inf_{0 \leq v \leq 8} \left(v + 400 - 40x_2 + x_2^2 + F_3\left(\frac{1}{2}x_2 + 10v - 5\right) \right). \end{aligned}$$

3.3.1 Diskonttaus

Olkoon $\beta \in]0, \infty[$. Tarkastellaan *diskontattua*⁵ kustannuskuvausta

$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j g_j(x_j, u_j) + \beta^n K(x_n). \quad (3.22)$$

Määritellään oliot $F_j(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, uudestaan:

$$\begin{aligned} F_j(x_j) &= F_j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) = \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} \beta^{k-j} g_k(x_k, u_k) + \beta^{n-j} K(x_n) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j, j+1, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tämä on on pienin mahdollinen tuleva diskontattu kustannus, kun takana on säätö- ja tilamuuttujien historia hetkestä $k = 0$ hetkeen $k = j$. Huomaa, että jos $\beta = 1$, niin tilanne on sama kuin lauseen 3.3.3 tapauksessa.

Lause 3.3.4 *Olkoot $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in]0, \infty[$, epätyhjät joukot $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ ja $\mathcal{X}$ sekä $x_0 \in \mathcal{X}$. Olkoon tilayhtälö (3.14) voimassa ja säätömuuttujan u optimaalisuuden määrittämään kaavan (3.22) kustannuskuvaus. Tällöin kaavoilla (3.23) määritellyt F_j toteuttavat:*

- (i) *Optimaalinen u_j riippuu vain olioista j ja x_j jokaisella $j = 0, 1, \dots, n-1$.*
- (ii) *$j \mapsto x_j$, $\{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{X}$, on säätömuuttujan $j \mapsto u_j$ tilamuuttuja.*
- (iii) *Lausekkeet $F_j(x_j)$ riippuvat vain olioista j ja x_j eli*

$$F_j: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty], \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

- (iv) *Kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$*

$$F_j(x_j) = \inf_{v \in \mathcal{U}_j} \left(g_j(x_j, v) + \beta F_{j+1}(a_j(x_j, v)) \right), \quad (3.24)$$

$$F_n(x_n) = K(x_n). \quad (3.25)$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

m.o.t.

⁵Diskontto on lainan ennakokorko, joka maksetaan ennen lainan erääntymistä ns. diskonttauspäivänä ja jonka laskemisessa korko lasketaan diskonttaus- ja erääntymispäivän väliseltä ajalta. Esimerkki: 10 000 euron laina, jonka vuosikorko on 10 %, otetaan vuodeksi 1.1., koronmaksu- ja diskonttauspäivä ovat 30.6. Tällöin 30.6 maksetaan korko 1000 euroa, josta 500 euroa on taannehtivasti maksettava alkuvuoden korko ja loput 500 euroa on ennakoiden (diskontaten) maksettava loppuvuoden korko.

3.3.2 Optimaalinen kuluttaminen ja sijoittaminen

Tarkastellaan tapausta, jossa yksi henkilö voi kuluttaa tai sijoittaa rahansa. Kuluttaminen tuottaa mielihyvää, sijoitus korkotuloja, joilla voidaan kuluttaa. Henkilön tavoitteena on maksimoida diskontattu mielihyvänsä. Olkoot $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in]0, 1[$ ja $\alpha, \beta \in]0, \infty[$. Tila-avaruuks olkoon $\mathbb{R}$ ja tilamuuttuja $j \mapsto x_j$; sen arvo x_j esittää henkilön rahavarojen määrää hetkellä t_j . Aika on siis jälleen diskreetti. Säättömuuttuja on $j \mapsto u_j \in \mathcal{U}_j$ ja sen arvo u_j esittää hetkellä t_j kulutetun rahan määrää. Kuluttaa ei voi velaksi, joten $u_j \leq x_j$. Toisaalta tuottaminenkaan ei käy päinsä, joten $u_j \geq 0$. Täten $\mathcal{U}_j = [0, x_j]$. Raha on sijoitettu pankkitilille, jonka korko⁶ on $\alpha - 1$, joten tilayhtälö on

$$x_{j+1} = \alpha(x_j - u_j), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.26)$$

Kuluttajan mielihyvää hetkellä t_j esittää $g(u_j)$. Oletamme, että

$$g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r) = r^{1-\nu}. \quad (3.27)$$

Tällöin mielihyväfunktio on alenevan rajamielihyvän lain mukaisesti kovera. Hetkellisten mielihyvien summan sijasta maksimoidaan *diskontanttujen* mielihyvien summaa

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j g(u_j) + \beta^n K(x_n), \quad (3.28)$$

missä $K(x_n)$ esittää mielihyvää loppuhetkellä olevasta rahamäärästä. Alenevan rajamielihyvän lain vuoksi — ja laskujen helpottamiseksi — oletamme, että

$$K : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad K(r) = A_n r^{1-\nu}, \quad (3.29)$$

missä $A_n > 0$ on vakio. Meillä on *maksimointitehtävä*. Mutta koska kustannusfunktiossa kaikki yhteenlaskettavat ovat äärellisiä, niin yhtäpitävä minimointitehtävä on hakea olion

$$-\left(\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j g(u_j) + \beta^n K(x_n)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j (-g(u_j)) + \beta^n (-K(x_n)) \quad (3.30)$$

minimiä. Koska jokaiselle reaali-lukujoukolle B pätee $\sup B = -\inf -B$, niin lauseen 3.3.4 nojalla optimaalisuusyhtälöt ovat

$$-F_j(x_j) = \sup_{0 \leq v \leq x_j} \left(v^{1-\nu} - \beta F_{j+1}(\alpha(x_j - v)) \right), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (3.31)$$

$$-F_n(x_n) = K(x_n), \quad (3.32)$$

missä jokaiselle $j = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} -F_j(x_j) &= -F_j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) = \\ &= -\inf \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} -\beta^{k-j} g(u_k) - \beta^{n-j} K(x_n) \mid u_k \in \mathcal{U}_k, \quad k = j, j+1, \dots, n-1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} \beta^{k-j} g(u_k) + \beta^{n-j} K(x_n) \mid 0 \leq u_k \leq x_k, \quad k = j, \dots, n-1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Optimaalisuusyhtälöiden ratkaisuna saadaan (harjoitustehtävä), että

$$-F_j(x_j) = A_j x_j^{1-\nu}, \quad u_j = \frac{x_j}{A_j^{1/\nu}}, \quad j = n, n-1, \dots, 0, \quad (3.34)$$

$$A_j^{1/\nu} = 1 + \gamma A_{j+1}^{1/\nu}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.35)$$

$$\gamma = (\beta \alpha^{1-\nu})^{1/\nu}. \quad (3.36)$$

⁶Kyseessä on reaalikorko, jolloin inflaatio voi tehdä siitä negatiivisen.

Tällöin pätee

$$A_{n-j}^{1/\nu} = A_n^{1/\nu} \gamma^{n-j} + \frac{1 - \gamma^{n-j}}{1 - \gamma}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.37)$$

Tarkastellaan lopuksi likimääräisesti tapausta, jossa edessä on runsaasti aikaa eli $n - j$ on suuri. Jos $\gamma > 1$, niin

$$A_{n-j}^{1/\nu} \approx (A_n^{1/\nu} - \frac{1}{1 - \gamma}) \gamma^{n-j},$$

jolloin

$$-F_{n-j}(x_{n-j}) = A_{n-j} x_{n-j}^{1-\nu} \approx M_1 \gamma^{\nu(n-j)} x^{1-\nu}, \quad u_{n-j} \approx M_2 \frac{x_j}{\gamma^{n-j}}, \quad (3.38)$$

missä M_1 ja M_2 ovat positiivisia vakioita. Jälkimmäinen näistä yhtälöistä kertoo, että kulutusta kannattaa myöhentää. Jos $\gamma < 1$ ja $n - j$ on suuri, niin $A_{n-j}^{1/\nu} \approx 1/(1 - \gamma)$, jolloin

$$-F_{n-j}(x_{n-j}) \approx \frac{x_{n-j}^{1-\nu}}{(1 - \gamma)^\nu}, \quad u_{n-j} \approx (1 - \gamma) x_{n-j}. \quad (3.39)$$

Tällöin rahoista kulutetaan vakio-osa kullakin ajan askeleella.

3.3.3 Palautuskaavalla määritelty kustannuskuvaus

Olkoot joukot $\mathcal{X}, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ epätyhjiä. Määritellään kuvauksille

$$K: \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ ja } \psi_j: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.40)$$

oliot

$$\tilde{C}_n = K(x_n) \text{ ja } \tilde{C}_j = \psi_j(x_j, x_{j+1}, u_j, \tilde{C}_{j+1}) \text{ kaikilla } j = 0, \dots, n-1, \quad (3.41)$$

ja sanotaan, että $\tilde{C}_j$ esittää kokonaiskustannuksia ajanhetkiltä $j, j+1, \dots, n$.

Esimerkki.

1. Kun asetetaan

$$\psi_j(x_j, x_{j+1}, u_j, y) = g_j(x_j, u_j) + \beta y,$$

on $\tilde{C}_0$ kaavassa (3.41) sama kuin diskontanttauskertoimen sisältävä kustannuskuvaus (3.22):

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= \psi_0(x_0, x_1, u_0, \tilde{C}_1) = g_0(x_0, u_0) + \beta \tilde{C}_1 = g_0(x_0, u_0) + \\ &+ \beta \psi_1(x_1, x_2, u_1, \tilde{C}_2) = g_0(x_0, u_0) + \beta g_1(x_1, u_1) + \beta^2 \tilde{C}_2 \\ &= \dots = \sum_{j=0}^{N-1} \beta^j g_j(x_j, u_j) + \beta^n \tilde{C}_n \text{ ja } \tilde{C}_n = K(x_n). \end{aligned}$$

2. Jos taas asetetaan

$$\psi_j(x_j, x_{j+1}, u_j, y) = \max \{g_j(x_j, u_j), y\} \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, n-1,$$

niin minimoitavaksi kustannuskuvaukseksi tulee

$$\tilde{C}_0 = \max \{g_j(x_j, u_j) \mid j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Tämä ei sisälly additiiviseen kustannuskuvaukseen (3.22).

Lause 3.3.5 *Olkoot epättyhjät joukot $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}$ ja $\mathcal{X}$, piste $x_0 \in \mathcal{X}$, kuvaukset $a_j: \mathcal{X} \times \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{X}$, sekä kaavan (3.40) mukaiset kuvaukset K ja ψ_j siten, että jokainen ψ_j on viimeisen muuttujansa suhteen ylhäältä puolijatkuva ja kasvava, $j = 0, 1, \dots, n$, Olkoon tilayhtälö*

$$x_{j+1} = a_j(x_j, u_j) \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, n, \quad (3.42)$$

voimassa ja säätömuuttujan u optimaalisuuden määrittämiseen kaavan (3.41) kustannusfunktio $\tilde{C}_0$. Merkitään

$$\begin{aligned} F_j(x_j) &= F_j(x_0, x_1, \dots, x_j, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) := \\ &= \inf \{ \tilde{C}_j \mid u_k \in \mathcal{U}_k, k = j, j+1, \dots, n-1 \} \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tällöin pätee:

- (i) *Optimaalinen u_j riippuu vain olioista j ja x_j jokaisella $j = 0, \dots, n-1$.*
- (ii) *$j \mapsto x_j, \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{X}$, on säätömuuttujan $j \mapsto u_j$ tilamuuttuja.*
- (iii) *Lausekkeet $F_j(x_j)$ riippuvat vain olioista j ja x_j eli*

$$F_j: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty], j = 0, 1, \dots, n.$$

- (iv) *Kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$*

$$F_j(x_j) = \inf_{v \in \mathcal{U}_j} \psi_j(x_j, a_j(x_j, v), v, F_{j+1}(a_j(x_j, v))), \quad (3.44)$$

$$F_n(x_n) = K(x_n). \quad (3.45)$$

- (v) *Olio $F_j(x_j)$ on pienin mahdollinen tuleva kustannus, kun takana on säätö- ja tilamuuttujien historia hetkestä $k = 0$ hetkeen $k = j$.*

Todistus. Todistus on induktiivinen. Määritelmän (3.43) mukaan $F_n(x_n) = K(x_n)$ eli (3.45) pätee ja $F_n(x_0, \dots, x_n, u_0, \dots, u_{n-1})$ riippuu vain oliosta x_n . Olkoon tämä pelkistyminen voimassa oliolle $F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}, u_0, \dots, u_k)$, kun $k \in \{0, 1, \dots, j-1\}$, missä $j \leq n$. Siis

$$F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}, u_0, \dots, u_k) = F_{k+1}(x_{k+1}).$$

Tilayhtälö (3.42) sanoo, että

$$\begin{aligned} F_k(x_0, \dots, x_k, u_0, \dots, u_{k-1}) &= \inf \{ \tilde{C}_k \mid u_l \in \mathcal{U}_l, l = k, k+1, \dots, n-1 \} \\ &= \inf_{u_k \in \mathcal{U}_k} \inf \{ \psi_k(x_k, x_{k+1}, u_k, C_{k+1}) \mid u_l \in \mathcal{U}_l, l = k+1, \dots, n-1 \} \\ &= \inf_{u_k \in \mathcal{U}_k} \psi_k(x_k, a_k(x_k, u_k), u_k, \inf \{ \tilde{C}_{k+1} \mid u_l \in \mathcal{U}_l, l = k+1, \dots, n-1 \}) \\ &= \inf_{u_k \in \mathcal{U}_k} \psi_k(x_k, a_k(x_k, u_k), u_k, F_{k+1}(x_{k+1})), \end{aligned} \quad (3.46)$$

sillä jokaiselle ylhäältä puolijatkuvalla kasvavalla kuvaukselle $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja joukolle $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ pätee

$$\inf_{x \in B} f(x) = f(\inf B).$$

Lauseke, josta infimum otetaan, riippuu vain olioista x_k, u_k ja k . Siten infimum riippuu vain olioista x_k ja k . Näin tämä pelkistyminen toteutuu myös oliolle $F_k(x_0, \dots, x_k, u_0, \dots, u_{k-1})$. Induktioperiaatteen nojalla se pätee kaikille $k = n, n-1, \dots, 0$. Täten (iii) ja (iv) pätevät. Yhtälöstä (3.46) nähdään, että optimaalinen u_k riippuu vain olioista x_k ja k eli (i) pätee. Tilayhtälön nojalla $x_{k+1} \in \mathcal{X}$ riippuu vain olioista x_k, u_k ja k , joten $k \mapsto x_k$ on säätömuuttujan $k \mapsto u_k$ tilamuuttuja eli (ii) pätee. Kohta (v) on selvä. **m.o.t.**

3.3.4 Tuotannon ajoittaminen

Tarkastellaan verstasta, joka valmistaa, varastoi ja myy yhtä ainoaa hyödykettä. Aikaa pidetään diskreettinä ja ajan askel on yksi päivä. Hyödykkeen kysyntää päivänä i merkitään d_i ; verstaanpitäjä tietää ennalta muuten kysynnän, joka muuten voi olla epäsäännöllinen. Varastossa päivän i alussa olevaa hyödykemäärää merkitään x_i ja päivänä i tuotettua määrää merkitään u_i . Tilayhtälö on siten

$$x_{j+1} = x_j + u_j - d_j, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.47)$$

Verstas pyrkii tyydyttämään päivien $0, 1, \dots, n-1$ kysynnän mahdollisimman pienin kustannuksin eli optimoinnin kohdekuvaus on

$$C_n = \sum_{j=0}^{n-1} (g(u_j) + h(x_j + u_j - d_j)) + K(x_n), \quad (3.48)$$

missä $g(u)$ esittää kustannuksia määrän u tuottamisesta ja $h(x)$ esittää määrän x varastointikustannuksia yhdestä päivästä seuraavaan. Yksinkertaiset ja uskottavat lausekkeet näille ovat:

$$g(u) = \begin{cases} 0, & \text{jos } u \leq 0, \\ a + bu, & \text{jos } u > 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } x < 0, \\ cx, & \text{jos } x \geq 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

missä $a, b, c \in [0, \infty[$. Tällöin varaston tyhjentämisestä ei tule kuluja (työmiehet lomautettuina), mutta tuottamisesta tulee vakiotermi (työmiesten päiväpalkka) ja kuluja tuotantomäärään suoraan verrannollisesti (tarvikkeet, energia). Varastointikulut ovat suoraan verrannollisia varastoitavaan määrään ja negatiivisia määriä (velkaa) tavaraa ei sallita. Tarkastelujakson lopussa varaston ei tarvitse olla tyhjä, joten päätekustannukset ovat

$$K(x) = \begin{cases} \infty, & \text{jos } x < 0, \\ 0, & \text{jos } x \geq 0. \end{cases}$$

Lause 3.3.6 *Olkoon $n = 1, 2, \dots$, luvut $d_0, d_1, \dots, d_{n-1} \in [0, \infty[$. ja olkoon tilayhtälö (3.47) voimassa. Oletetaan kuvauksista g, h, K ja C_n yllä mainitut seikat ja olkooot olit $F_j, j = 0, \dots, n$, annettu kaavalla*

$$F_j = \inf \left\{ \sum_{k=j}^{n-1} (g(u_k) + h(x_k + u_k - d_k)) + K(x_n) \mid u_l \in \mathcal{U}_l, l = j, j+1, \dots, n \right\}$$

jokaisella $j = 0, 1, \dots, n$. Tällöin kustannuskuvauksen (3.48) mukaiset optimaaliset $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ toteuttavat seuraavat kohdat:

- (i) Optimaalinen u_j riippuu vain olioista j ja x_j jokaisella $j = 0, \dots, n-1$.
- (ii) $j \mapsto x_j, \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{X}$, on säätömuuttujan $j \mapsto u_j$ tilamuuttuja.
- (iii) Lausekkeet $F_j(x_j)$ riippuvat vain olioista j ja x_j eli

$$F_j: \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, \infty], \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

- (iv) Kaikilla $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$F_j(x_j) = \inf_{v \in \mathbb{R}} (g(v) + h(x_j + v - d_j) + F_{j+1}(x_j + v - d_j)),$$

$$F_n(x_n) = K(x_n).$$

- (v) Olio $F_j(x_j)$ on pienin mahdollinen tuleva kustannus, kun takana on säätö- ja tilamuuttujien historia hetkestä $k = 0$ hetkeen $k = j$.

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan lauseesta 3.3.3.

m.o.t.

Lause 3.3.7 *Olkoot edellisen lauseen oletukset voimassa. Optimaalinen tuotanto-ohjelma on sellainen, että joka päivä tuotetaan lisää tavaraa, jos ja vain jos varastossa oleva tavara ei riitä tyydyttämään päivän kysyntää. Jos tavaraa tuotetaan lisää, sitä tuotetaan juuri sen verran, että sillä voidaan tyydyttää yhden tai useamman seuraavan päivän kysyntä.*

Todistus. Oletetaan, että tuotanto-ohjelmassa $u_0^*, u_1^*, \dots, u_{n-1}^*$ on $u_j^* > 0$ jollakin $j = 0, 1, \dots, n-1$. Jos $x_j \geq d_j$ ja määrän u_j^* tuottaminen siirretään päivään $j+1$, niin säästetään kuluissa cu_j^* tai $a+cu_j^*$ sen mukaan, onko $u_{j+1}^* = 0$ tai $u_{j+1}^* > 0$. Tästä seuraa ensimmäinen väite.

Oletetaan, että päivänä j tuotetaan riittävästi tyydyttämään kysyntä ennen päivää k mutta se ei riitä myös päivälle k . Silloin

$$u_j^* = \sum_{l=j}^{k-1} d_l - x_j + \delta,$$

missä $0 \leq \delta \leq d_k$. Siksi päivänä k on joka tapauksessa tuotettava lisää tavaraa. Jos suure u_j^* vähenisi määrällä δ ja suure u_k^* kasvaisi samalla määrällä, niin säästyisi varastointikuluja määrä $c(k-j)\delta$ ilman muita muutoksia kustannuksissa. Siten $\delta = 0$ on optimaalinen. **m.o.t.**

Jos $x_j \geq d_j$, niin hetkellä j ei tuoteta, vaan varastojen annetaan supistua kysynnän myötä tai niitä aktiivisesti tuhotaan varastointikulujen välttämiseksi (harjoitustehtävä). Jos $x_j < d_j$, niin hetkellä j tuotetaan niin, että kysyntä tyydyttyy päiviltä $j, j+1, \dots, k-1$ ja $x_k = 0$. Optimaalinen k määräytyy yhtälöstä

$$F_j(x) = \min\{G(j, k) - bx + F_0(k) \mid k = j+1, \dots, n\}, \text{ jos } x < d_j, \quad (3.50)$$

missä

$$G(t, k) = a + b \sum_{l=j}^{k-1} d_l + c \sum_{l=j}^{k-1} (l-j) d_l. \quad (3.51)$$

Näin ensimmäisen tuottamis- tai varaston kuluttamispäätöksen jälkeen varasto tyhjenee jollakin hetkellä, josta alkaen toistuvasti varasto tyhjennetään uudelleen. Nämä hetket määräytyvät yhtälöstä

$$\phi_n = 0, \quad \phi_j = F_j(0), \quad (3.52)$$

$$\phi_j = \begin{cases} \phi_{j+1}, & \text{jos } d_j = 0, \\ \min_{k=j+1, \dots, n} (G(j, k) + \phi_k) & \text{jos } d_j > 0 \text{ ja } j < n. \end{cases} \quad (3.53)$$

Kaavan (3.51) kustannuskuvaus lasketaan helposti takenevasti: ratkaisemalla kaavoista (3.52)-(3.53) takenevasti optimaaliset ajanhetket, joina varasto on tyhjä. Jos aluksi varasto ei ole tyhjä, edetään kaavan (3.50) mukaan. Jos aluksi on enemmän kuin tarvitaan kokonaiselle määrälle tulevia päiviä, varastoa tyhjennetään myymällä tai tuhoamalla.

3.3.5 Tilayhtälön ratkaisun vakaus

Olkoon $(\mathcal{X}, d)$ metrinen avaruus. Tässä jaksossa tarkastellaan tilayhtälöä, kun siinä ei ole eksplisiittistä riippuvuutta säätömuuttujasta u_j eli yhtälöä

$$x_{j+1} = a_j(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.54)$$

missä $a_j: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $j = 0, 1, \dots$. Tämä tarkastelu on kuitenkin säätöteorian kannalta relevantti, sillä yleisen tilayhtälön (3.14) oikea puoli $a_j(x, u_j)$ riippuu vain j :stä ja x :stä, kun kuvaus $j \mapsto u_j$ pidetään annettuna.

Määritelmä 3.3.8 Olkoon $a_\infty: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ siten, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j(x) = a_\infty(x) \text{ kaikilla } x \in X \quad (3.55)$$

Pistettä $\bar{x} \in \mathcal{X}$ sanotaan järjestelmän (3.54) stationaariseksi pisteeksi⁷, jos

$$\bar{x} = a_\infty(\bar{x}). \quad (3.56)$$

Esimerkki.

1. Olkoon $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ja $2a_j(x) = \sin x$. Nyt $2a_\infty = \sin$ ja ainoa stationaarinen piste on origo, sillä jos x ja $\bar{x}$ olisivat eri stationaarisia pisteitä, niin väliarvolauseen nojalla

$$|x - \bar{x}| = \frac{1}{2} |\sin x - \sin \bar{x}| = \frac{1}{2} |\cos \xi| |x - \bar{x}| < \frac{1}{2} |x - \bar{x}|$$

ja siten $x = \bar{x}$. Toisaalta origo on stationaarinen piste, sillä $0 = \sin 0$.

2. Olkoon $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ja $a_j(x) = \sin x$. Jos $x > 0$, niin⁸ $\sin x < x$, joten $x > 0$ ei ole stationaarinen piste. Jos $x < 0$, niin $\sin x = -\sin -x > -(-x) = x$, ja siten $x < 0$ ei ole stationaarinen piste. Näin ainoa stationaarinen piste on origo. Koska $0 = \sin 0$, niin origo on stationaarinen piste.
3. Olkoon $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ja $a_j(x) = x^2$. Silloin $a_\infty(x) = x^2$ ja pisteet 0 ja 1 ovat ainoat stationaariset pisteet: $\bar{x} = a(x) = \bar{x}^2$. Jos $x_0 = 1,00001$, niin $x_j \rightarrow \infty$, kun $j \rightarrow \infty$. Jos taas $x_0 = 0,999999$, niin $x_j \rightarrow 0$, kun $j \rightarrow \infty$. Näin piste 1 on sikäli tasapainopiste, että jos järjestelmä siihen päätyy, pysyy se siinä iäti. Mutta lähelle sitä pääsemisestäään huolimatta x_j voi siitä loitota äärettömän kauas, kun $j \rightarrow \infty$.

Määritelmä 3.3.9 Olkoot $a_1, \dots, a_\infty: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ siten, että (3.54) ja (3.55) pätevät. Stationaarista pistettä $\bar{x} \in \mathcal{X}$ sanotaan stabiiliksi eli vakaaksi, jos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \bar{x} \text{ kaikilla } x_0 \in \mathcal{X}.$$

Stationaarista pistettä $\bar{x} \in \mathcal{X}$ sanotaan lokaalisti stabiiliksi eli paikallisesti vakaaksi, jos on olemassa $r \in]0, \infty[$ siten, että

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \bar{x} \text{ kaikilla } x_0 \in B(\bar{x}, r).$$

Esimerkki.

1. Olkoon $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ja $a_j(x) = \sin x$. Silloin piste 0 on vakaa stationaarinen piste.
2. Olkoon $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ ja $a_j(x) = x^2$. Silloin piste 0 on paikallisesti vakaa stationaarinen piste, kun taas stationaarinen piste 1 ei sitä ole.

Lause 3.3.10 Olkoon $(\mathcal{X}, d)$ täydellinen metrinen avaruus, $\gamma \in [0, 1[$ ja kuvaus $a: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ siten, että

$$d(a(x), a(y)) \leq \gamma d(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in \mathcal{X}. \quad (3.57)$$

⁷Joskus sanotaan pistettä $\bar{x}$ tasapainopisteeksi, mutta tällainen tasapaino voi olla kovin epävakaa kuten esimerkin kohdassa 2. Siksi on parempi puhua stationaarisesta pisteestä tai kiintopisteestä (jos a_j on sama kaikilla j).

⁸Ks. Analyysi 1.

Tällöin järjestelmällä

$$x_{j+1} = a(x_j) \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N} \quad (3.58)$$

on yksi ja vain yksi stationaarinen piste $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Se on vakaa ja

$$d(\bar{x}, x_j) \leq \gamma^j \frac{d(x_0, a(x_0))}{1 - \gamma} \text{ kaikilla } x_0 \in \mathcal{X} \text{ ja } j \in \mathbb{N}. \quad (3.59)$$

Todistus. Olkoot $n, p \in \mathbb{N}$. Oletuksen mukaan

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(a(x_n), a(x_{n-1})) \leq \gamma d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \gamma^n d(x_1, x_0).$$

Kolmioepäyhtälön nojalla edelleen

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots \\ &\dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (\gamma^{n+p-1} + \gamma^{n+p-2} + \dots + \gamma^n) d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq \gamma^n (1 + \gamma + \gamma^2 + \dots) d(x_1, x_0) = \gamma^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \gamma}. \end{aligned}$$

Täten $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, kun $n, m \rightarrow \infty$, eli (x_n) on Cauchyn jono. Koska $(\mathcal{X}, d)$ on täydellinen, (x_n) suppenee kohti jotakin $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Kolmioepäyhtälön nojalla nyt

$$d(\bar{x}, x_n) \leq d(\bar{x}, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x_n) \leq d(\bar{x}, x_{n+p}) + \gamma^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \gamma},$$

mistä (3.59) seuraa, kun $p \rightarrow \infty$. Edelleen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, a(\bar{x})) &\leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, a(\bar{x})) \\ &= d(\bar{x}, x_{n+1}) + d(a(x_n), a(\bar{x})) \leq \\ &\leq d(\bar{x}, x_{n+1}) + \gamma d(x_n, \bar{x}) \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Metriikan definiittisyyden nojalla $\bar{x} = a(\bar{x})$ eli $\bar{x}$ on järjestelmän (3.58) stationaarinen piste.

Osoitetaan vielä stationaarisen pisteen yksikäsitteisyys. Olkoot $\bar{x}$ ja $\tilde{x}$ stationaarisia pisteitä. Silloin

$$d(\bar{x}, \tilde{x}) = d(a(\bar{x}), a(\tilde{x})) \leq \gamma d(\bar{x}, \tilde{x}) < d(\bar{x}, \tilde{x}),$$

josta $d(\bar{x}, \tilde{x}) = 0$ eli $\bar{x} = \tilde{x}$.

m.o.t.

Esimerkki. Tarkastellaan jousen varaan ripustettua m -massaista punnusta. Sen korkeutta hetkellä t merkitään $y(t)$ ja se noudattaa liikeyhtälöä

$$my''(t) = -mg - ky(t) - \nu y'(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.60)$$

missä $k \in]0, \infty[$ on jousivakio, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ja $\nu \in]0, \infty[$. Yhtälön (3.60) viimeinen termi esittää kitkavoimia, jotka tulevat ilmanvastuksesta ja jousen sisäisestä kitkasta. Merkitsemällä $v = y'$ saadaan toisenkertaluvun yhtälö (3.60) muutettua ensimmäisen kertaluvun yhtälöpariksi:

$$y'(t) = v(t) \text{ ja } v'(t) = -g - \frac{k}{m}y(t) - \frac{\nu}{m}v(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kun derivaatat korvataan erotusosamäärillä, on sen diskreetti vastine

$$\begin{aligned} y(t_{j+1}) &= y(t_j) + v(t_j)(t_{j+1} - t_j), \\ v(t_{j+1}) &= v(t_j) - \left(g + \frac{k}{m}y(t_j) + \frac{\nu}{m}v(t_j)\right), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Olkoot $g = 10$, $t_{j+1} - t_j = 1/2$, $k/m = \nu/m = 1$, $y(t_j) = y_j$, $v(t_j) = v_j$, jolloin lyhyesti

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{2}v_j \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N}, \quad (3.61)$$

$$v_{j+1} = \frac{1}{2}v_j - 5 - \frac{1}{2}y_j \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N}. \quad (3.62)$$

Tämä järjestelmä on muotoa (3.58), sillä voidaan määritellä

$$a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, a(z_1, z_2) = \left(z_1 + \frac{1}{2}z_2, \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_1 - 5 \right). \quad (3.63)$$

Tämä a ei kuitenkaan toteuta epäyhtälöä (3.57) (harjoitustehtävä), joten edellistä lausetta ei voida suoraan soveltaa. Kuitenkin, jos stationaarinen piste ja raja-arvot $\lim y_j = y_\infty$ ja $\lim v_j = v_\infty$ ovat äärellisinä olemassa, niin

$$y_\infty = y_\infty + \frac{1}{2}v_\infty \text{ ja } v_\infty = \frac{1}{2}v_\infty - 5 - \frac{1}{2}y_\infty.$$

Silloin $v_\infty = 0$, $y_\infty = -10$ eli punnus pysähtyy korkeudelle -10 .

Määritelmä 3.3.11 *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jos $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ toteuttaa epäyhtälön (3.57), sitä sanotaan*

1. *Lipschitzin-jatkuvaksi, kun $0 \leq \gamma < \infty$,*
2. *kutistuskuvaukseksi eli kontraktioksi, jos $\gamma = 1$,*
3. *vahvaksi kutistuskuvaukseksi eli vahvaksi kontraktioksi, jos $0 \leq \gamma < 1$.*

Pistettä $\bar{x} \in \mathcal{X}$ sanotaan kuvauksen f kiintopisteeksi, jos $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Esimerkki.

1. Kuvaus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b \sin x$, $b \in \mathbb{R}$, on Lipschitzin-jatkuva vakiolla $|b|$, sillä väliarvolauseen nojalla

$$|f(x) - f(y)| = |b \cos \xi| |x - y| \leq |b| |x - y| \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Lipschitzin-jatkuvuuden vakiota $|b|$ ei voida parantaa eli pienentää, sillä

$$\frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = b \frac{\sin x}{x} \rightarrow b, \text{ kun } x \rightarrow 0+.$$

Näin kuvaus f on vahva kutistuskuvaus täsmälleen silloin, kun $0 \leq b < 1$.

2. Olkoon kuvaus $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ainakin toisen asteen polynomi. Sillä on ainakin yksi kiintopiste, koska $f(z) - z$ on ainakin ensimmäisen asteen polynomi ja siten algebran peruslauseen nojalla yhtälöllä $f(z) - z = 0$ on ainakin yksi juuri. Tavallisesti polynomilla on useita kiintopisteitä.
3. Järjestelmän (3.58) stationaaristen pisteiden joukko on kuvauksen $a: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ kiintopisteiden joukko.

Lause 3.3.10 kuuluu kutistuskuvauksen ja kiintopisteen käsitteiden avulla seuraavasti:

Lause 3.3.12 *(Banachin kiintopistelause) Jokaisella täydellisen metrisen avaruuden vahvalla kutistuskuvauksella on täsmälleen yksi kiintopiste.*

Lause 3.3.13 Olkoon $\mathcal{X}$ epätyhjä joukko, $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ kuvaus ja $n = 1, 2, \dots$. Määritellään yhdistetyt kuvaukset

$$F^j: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad F^1(x) = F(x), \quad F^{j+1}(x) = F(F^j(x)), \quad j = 1, 2, \dots$$

Jos kuvauksella F^n on yksi ja vain yksi kiintopiste $\bar{x} \in \mathcal{X}$, niin myös kuvauksella F on täsmälleen yksi kiintopiste ja se on $\bar{x}$.

Todistus. Olkoon $\bar{x} = F^n(\bar{x})$. Silloin

$$F(\bar{x}) = F(F^n(\bar{x})) = F^n(F(\bar{x})),$$

joten myös $F(\bar{x})$ on kuvauksen F^n kiintopiste. Yksikäsitteisyyden nojalla $\bar{x} = F(\bar{x})$ eli $\bar{x}$ on kuvauksen F kiintopiste.

Oletetaan lisäksi, että $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ on kuvauksen F kiintopiste. Silloin

$$F^n(\tilde{x}) = F^{n-1}(F(\tilde{x})) = F^{n-1}(\tilde{x}) = \dots = F(\tilde{x}) = \tilde{x},$$

joten $\tilde{x}$ on myös kuvauksen F^n kiintopiste. Koska se on yksikäsitteinen, niin $\tilde{x} = \bar{x}$. Siten kuvauksen F kiintopiste on yksikäsitteinen. **m.o.t.**

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavaa alkuarvotehtävää

$$y(0) = y_0 \text{ ja } y'(t) = f(t, y(t)) \text{ kaikilla } t \in [0, 1], \quad (3.64)$$

missä $y_0 \in \mathbb{R}$ ja kuvaus $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva siten, että jollakin vakiolla $M \in [0, \infty[$ pätee

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y| \text{ kaikilla } t \in [0, 1] \text{ ja } x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.65)$$

Olkoon

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= C[0, 1] = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}, \\ d(f, g) &= \sup \{|f(t) - g(t)| \mid 0 \leq t \leq 1\} \text{ ja} \\ F: \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{X}, \quad F(g)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, g(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Tällöin $(\mathcal{X}, d)$ on täydellinen metrinen avaruus. Jokaiselle $g, h \in \mathcal{X}$ pätee, että

$$\begin{aligned} |F(g)(t) - F(h)(t)| &\leq \int_0^t |f(s, g(s)) - f(s, h(s))| \, ds \leq \\ &\leq \int_0^t M|g(s) - h(s)| \, ds \leq Mt d(g, h) \text{ kaikilla } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} |F^2(g)(t) - F^2(h)(t)| &\leq \int_0^t |f(s, F(g)(s)) - f(s, F(h)(s))| \, ds \\ &\leq \int_0^t M|F(g)(s) - F(h)(s)| \, ds \leq \int_0^t M Ms d(g, h) \, ds = \frac{M^2 t^2}{2} d(g, h). \end{aligned}$$

Näin jatkamalla saadaan, että

$$|F^k(g)(t) - F^k(h)(t)| \leq \frac{M^k t^k}{k!} d(g, h) \leq \frac{M^k}{k!} d(g, h)$$

kaikilla $t \in [0, 1]$ ja $k = 1, 2, \dots$, joten

$$d(F^k(g), F^k(h)) \leq \frac{M^k}{k!} d(g, h) \text{ kaikilla } g, h \in \mathcal{X} \text{ ja } k = 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

Siten F^k on vahva kutistuskuvauks, kunhan k on kyllin suuri. Banachin kiintopistelauseen nojalla sillä on yksikäsitteinen kiintopiste $y \in \mathcal{X}$. Edellisen lauseen nojalla sama y on kuvauksen F kiintopiste eli

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \text{ kaikilla } t \in [0, 1]. \quad (3.67)$$

Sijoittamalla $t = 0$ saadaan alkuehto $y(0) = y_0$. Koska $y(t)$ on kaikkialla jatkuvan kuvauksen integraalifunktio, niin on se kaikkialla derivoituva. Derivoimalla saadaan differentiaaliyhtälö $y' = f(t, y)$. Siten y on alkuarvotehtävän (3.64) ratkaisu. Lisäksi sen ratkaisu on yksikäsitteinen.

Harjoitustehtäviä 4.11.2002 klo 16-18, MaD 245

1. Määrää kaupunkien Jyväskylä, Kuopio, Mikkeli ja Pieksämäki etäisyysmatriisi olettaen, että ajan askel on yksi tunti ja kustakin kaupungista toiseen voidaan siirtyä enintään fyysisellä nopeudella 100 km/h.
2. Määrää omalla tavallasi lyhin kahden ja kolmen askeleen reitti Jyväskylästä Kuopioon edellisessä tehtävässä löytämäsi etäisyysmatriisiin mukaan
3. Ratkaise edellinen tehtävä Bellmanin optimaalisuusperiaatteella.
4. Todista Lause 3.1.3.
5. Hae optimaalisuusyhtälön avulla kuvauksen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2,$$

pienin arvo joukossa

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 4x_2^2 \leq 9\}.$$

6. Määrää joukkojen

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0, -1 \leq x_1 \leq 1\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 0, -1 \leq x_1 \leq 1\} \end{aligned}$$

kärkipisteet.

7. Määrää joukkojen

$$C = \{x \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq x_1 \leq 4, 1 \leq x_2 \leq 4\} \text{ ja } D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq x_1^2\}$$

kärkipisteet

Harjoitustehtäviä Ma 11.11.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Tehtävänä on juoksuttaa yhteensä M litraa vettä peräkkäisissä tunnin jaksoissa, joissa veden juoksutusnopeus on vakio u_j , $j = 0, 1, \dots, u_{n-1}$. Halutaan suurimman juoksutusnopeuden olevan mahdollisimman pieni. Siis kohdekuvaus on $\max\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ ja sen muuttujien $u_j \in [0, \infty]$, $j = 1, \dots, n-1$, tulee toteuttaa side-ehto $\sum_{j=0}^{n-1} u_j = M$. Selvästi ratkaisu on

$$u_0 = u_1 = \dots = u_{n-1} = \frac{M}{n}.$$

Osoita se optimaalisuusyhtälön avulla.

2. Olkoot kuvaukset

$$g_j: [0, \infty[\rightarrow [-\infty, \infty[, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$$

ja esittäköön $g_j(u_j)$ mielihyvää, jonka kuluttaja saa, kun hän ostaa tuotetta j rahamäärällä u_j . Esittäköön

$$F_n(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n g_j(u_j) \mid u_1, \dots, u_n \in [0, \infty[, \sum_{j=1}^n u_j \leq x \right\}$$

kuluttajan optimaalista kokonaismielihyvää, kun hän kuluttaa rahaa määrän $x \in [0, \infty[$. Osoita, että

$$F_j(x) = \max_{0 \leq u \leq x} (g_j(u) + F_{j-1}(x - u)) \quad \text{kaikilla } j = 1, 2, \dots, n.$$

3. Miten edellisessä kaavassa esiintyvä F_0 on määriteltävä? Selitä omin sanoin, mikä on edellisen kaavan ja siinä maksimin antavan u merkitys.4. Sovella tehtävän 2 tulosta, kun $n = 3$ ja

$$g_j(u) = \begin{cases} j \ln u, & \text{jos } u > 0, \\ -\infty, & \text{jos } u = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

eli määrää optimaaliset kolmen hyödykkeen kulutukset jokaiselle rahamäärälle $x \in [0, \infty[$.

5. Laske edellisen esimerkin F_2 ja F_1 .6. Laske edellisen esimerkin F_0 ja määrää optimaalinen lämmitysohjelma (u_0, u_1, u_2, u_3) . Mitä otaksut sille tapahtuvan, jos kerrointa $\gamma = 1$ kasvatetaan tai vähennetään?7. Oletetaan, että ulkolämpötila on koko ajan -10 astetta ja lämmitysteho on 1 kW. Selvitä tilayhtälön (3.20) perusteella, miten mökin sisälämpötila käyttäytyy, kun $n \rightarrow \infty$. (Vihje: kasvava ylhäältä rajoitettu reaalilukujono suppenee.)

8–9 Todista lause 3.3.4

Harjoitustehtäviä ma 18.11.2002, MaD245 klo 16-18

1.-2. Johda yhtälöt (3.34)-(3.36).

3. Osoita, että yhtälön (3.39) mukaan toimittaessa pääoma kasvaa jokaisella ajan askeleella θ -kertaiseksi, missä $\theta = \alpha\gamma = (\alpha\beta)^{1/\nu}$. Millainen θ voi olla, kun $0 < \gamma < 1$?

4.-5. Ratkaise optimaalinen sijoittaminen ja kuluttaminen, kun

$$g(u) = \begin{cases} \ln(u - \bar{u}), & \text{jos } u > \bar{u}, \\ -\infty & \text{muulloin,} \end{cases} \quad K(x) = \begin{cases} A_n \ln(x - \bar{x}), & \text{jos } x > \bar{x}, \\ -\infty & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä A_n , $\bar{x}$ ja $\bar{u}$ ovat positiivisia vakioita.

6. Anna sellainen jatkuva $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, aidosti kasvava $g: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja epätyhjä joukko $A \subset \mathbb{R}$ siten, että

$$\inf f(A) < f(\inf A) \quad \text{ja} \quad \inf g(A) > g(\inf A).$$

7. Osoita, että jokaisella kasvavalla $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ja epätyhjällä $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ pätee

$$\inf f(A) \geq f(\inf A).$$

8. Olkoon $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ylhäältä puolijatkuva ja kasvava sekä $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ epätyhjä. Osoita, että

$$\inf f(A) = f(\inf A).$$

Harjoitustehtäviä ma 25.11.2002, MaD245 klo 16-18

1. Osoita, että kuvaus

$$a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, a(z_1, z_2) = \left(z_1 + \frac{1}{2}z_2, \frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{2}z_1 - 5 \right).$$

ei toteuta ehtoa (3.57), kun avaruuden $\mathbb{R}^2$ metriikkana on tavallinen euklidinen metriikka

$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

2. Laske järjestelmän (3.61)-(3.62) käyttäytymistä taskulaskimella, kun $y_0 = v_0 = 0$. Näyttävätkö raja-arvot $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j$ ja $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j$ olevan olemassa?
3. Yritä löytää sellainen avaruuden $\mathbb{R}^2$ metriikka, joka on ekvivalentti tavallisen euklidisen metriikan kanssa ja jonka mukaan tehtävän 1 kuvaus a toteuttaa epäyhtälön (3.57). Jos siinä onnistuisit, niin mitä voisit silloin päätellä lauseen 3.3.10 avulla stationaarisesta pisteestä ja raja-arvoista $\lim_{j \rightarrow \infty} y_j$ ja $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j$?
4. Tarkastellaan yhtälöä $f(x) = 2x + e^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Osoita jatkuvien funktioiden teorian avulla, että sillä on täsmälleen yksi ratkaisu. Hae ratkaisun likiarvo *haarukoimalla* eli seuraavalla algoritmilla:
- Valitse lopetusparametri $\epsilon > 0$ sekä ja väli $[x_0, x_1]$ siten, että $f(x_1)f(x_2) < 0$. Aseta $n := 0$.
 - Jos $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, niin lopeta. Muuten aseta $x_{n+2} := \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) < 0$, aseta $x_{n+3} := x_n$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) > 0$, aseta $x_{n+3} := x_{n+1}$. Jos $f(x_n)f(x_{n+2}) = 0$, aseta $x_{n+3} := x_{n+2}$.
 - Aseta $n := n + 2$ ja jatka kohdasta (b).

Hae ratkaisun likiarvo taskulaskimen laskentatarkkuudella.

5. Ratkaise edellisen tehtävän yhtälö *iteroimalla* eli ensin yhtälöstä ratkaistaan x sellaisena lausekkeena, joka on vahva kutistuskuvauks. Esimerkiksi $x = -\frac{1}{2}e^x$, $x < 0$; voidaan siis hakea sopivaa kuvauksen lauseketta ja määrittelyjoukkoa. Sen jälkeen valitaan sopiva alkuarvo x_0 ja aletaan laskea jonon (x_j) alkioita,

$$x_{j+1} = -\frac{1}{2}e^{x_j} \text{ kaikilla } j \in \mathbb{N}.$$

6. Osoita, että jollakin $\delta \in [0, \infty[$ kuvaus

$$f:] - \infty, -\delta[\rightarrow] - \infty, -\delta[, f(x) = -\frac{1}{2}e^x,$$

on hyvin määritelty⁹ ja vahva kutistuskuvauks. Osoita, että edellisen tehtävän iterointijono suppenee.

7. Yritä ratkaista iteroiden yhtälö $-3x + e^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Kokeile alkuarvoja $x_0 = 1$ ja $x_0 = 2$.
8. Keplerin ensimmäinen laki sanoo, että planeetat kiertävät ellipsinmuotoisia ratoja, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko on. Keplerin toisen lain mukaan Aurinko-planeetta-yhdysjanan ja ellipsin isoakselin rajaama pinta-ala kasvaa vakionopeudella (eli pinta-ala on vakio¹⁰). Keplerin

⁹Riittää, näyttää, että sen arvojoukko on todellakin $] - \infty, -\delta[$.

¹⁰Pinta-ala $A(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}'(t)$, missä $\times$ on vektoritulo, jolloin keskeisvoimakentässä $2A'(t) = \mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) \times \mathbf{x}''(t) = 0$.

kolmannen lain mukaan planeetan radan isoakselin kuutio on suoraan verrannollinen planeetan kiertoaajan neliöön. Nämä lait mahdollistavat planeetan paikan laskemisen, kunhan kuusi kullekin planeetalle ominaista vakiota, ns. rataelementtiä, tiedetään¹¹. Tämän laskun vaikein askel on seuraavan *Keplerin yhtälön*

$$E - e \sin E = M \quad (3.68)$$

ratkaiseminen. Siinä tunnettu suure M on planeetan *keskianomalia*,

$$M = 2\pi \frac{t - T}{P},$$

missä t on kulloinen aika, T on aika, jolloin planeetta on perihelissä¹², ja P on planeetan kiertoaika. Tunnettu suure e ,

$$0 \leq e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1, \quad (3.69)$$

on planeetan radan *eksentrisyys* (a ja b ovat radan iso- ja pikkuakselin puolikkaat). Tuntematon suure E on planeetan *eksentrinen anomalia* eli kulma, jonka sivulla on periheli ja jonka kärkenä on radan keskipiste. Toisella sivulla on leikkauspiste radan keskipisteeseen piirretylle ympyrälle, jonka halkaisija on radan isoakseli, ja suoralle, joka kulkee planeetan kautta ja joka on isoakselin normaali.

Yhtälöstä (3.68) saadaan

$$E = M + e \sin E, \quad (3.70)$$

joten määritellään induktiivisesti lukujono (E_n) :

$$E_0 = 0, \quad E_{n+1} = M + e \sin E_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.71)$$

Osoita, että jono (E_n) suppenee kohti Keplerin yhtälön ratkaisua kaikilla $E_0, M \in \mathbb{R}$ ja $e \in [0, 1[$. Osoita vielä, että Keplerin yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu.

9. Ratkaise iteroiden taskulaskimen tarkkuudella Keplerin yhtälöstä Pluton eksentrinen anomalia E , kun sen eksentrisyys on $e = 0,2523$ ja luonnollinen anomalia $M = \pi/3$.

¹¹Ks. Heikki Oja, Taivaanmekaniikka, Limes ry, Helsinki 1977, ss. 10–17, tai Hannu Karttunen, Johdatus taivaanmekaniikkaan, Limes ry, Helsinki 1980, ss. 26–35.

¹²Kiertolaisen radan piste, joka on lähinnä keskuskappaletta. Jupiterin kuilla vastaavan pisteen nimi on perijovium, Kuulla perigeum.

Luku 4

Optimointi sokkona: minimax-lauseita

Edellisten lukujen optimointitehtävissä oletetaan, että optimoijan hallussa on täydellinen tieto tai informaatio eli hän tietää kohdekuvauksen lausekkeen. Kun jaksossa 3.1 haettiin halvinta reittiä yhdestä kaupungista toiseen, oletettiin kaikkien tieverkon kaupunkien etäisyydet tunnetuiksi. Kuitenkin aivan hyvin voi olla, että kaikkia näitä tietoja ei kartanlukijalla ole, ne ovat epätarkkoja, hän on ajoittain eksynyt tai kulkuväline käyttäytyy arvaamattomasti. Samoin jaksossa 3.3.4 tuotantoa ajoitettiin tapauksessa, kun tuleva kysyntä oletettiin tunnetuksi. Optimointiin puutteellisen informaation pohjalta on lukuisia eri menetelmiä¹, mutta tässä luvussa tarkastellaan ns. minimax-ajattelua eli varovaista strategiaa². Sen mukaan oletetaan tekijöiden, joita optimoija ei hallitse, asetuvan hänen kannaltaan huonoimpaan mahdolliseen tilaan. Reitinvalinnassa on tällöin oletettava, että auto rikkoutuu, tiet ovat auraamatta ja joudutaan kävelemään perille. Tuotannon ajoittamisessa varovainen strategia olisi olettaa, että kuluttajat hankkivat vain välttämättömän määrän tuotetta.

4.1 Peliteoriaa

Kaksi³ henkilöä, Eemeli ja Françoise, pelaavat peliä, jossa joka kerta samalla siirrolla on sama vaikutus pelin tulokseen. Olkoon E epätyhjä joukko, jonka alkiot esittävät Eemelin mahdollisia siirtoja tai ratkaisuja pelissä. Samoin olkoon epätyhjä joukko F , jonka alkiot esittävät Françoisen mahdollisia siirtoja. Oletuksen mukaan on siis olemassa kuvaukset

$$f_E, f_F: E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (4.1)$$

siten, että $f_E(x, y)$ esittää Eemelin menetystä, kun hän tekee siirron $x \in E$ ja Françoise tekee siirron $y \in F$. Vastaavasti $f_F(x, y)$ esittää Françoisen menetystä, kun hän tekee siirron $y \in F$ ja Eemeli siirron $x \in E$. Vajavaisen informaation tilannetta tällainen peli vastaa sikäli, että pelaaja ei voi päättää tai edes tietää etukäteen, minkä siirron vastapelaaja tekee.

¹Numeerisessa optimoinnissa käytetty gradienttimenetelmä eli jyrkimmän nousun menetelmä on yksi näistä muista lähestymistavoista. Tuottaja tietää kohdekuvauksestaan eli voitostaan vain ne arvot, jotka se on saanut toteutuneilla tuotantomäärillä. Niistä hän voi erotusosamäärällä arvioida voittonsa gradientin ja muuttaa tuotantomääriään gradientin suuntaan, koska voitto kasvaa voimakkaimmin gradientin suuntaan.

²Stratégie conservatoire, ostorozhnaja strategija.

³Tämä alaluku perustuu teoksen [1] lukuihin 7 ja 8. Teoksen on julkaissut venäjäksi Mir, Moskova 1988.

Määritelmä 4.1.1 *Eemelin siirtosäännöksi⁴ sanotaan moniarvoista kuvausta⁵ $C_E \subset F \times E$, kun $C_E(y)$ on niiden siirtojen joukko, jotka Eemeli voi valita, kun Françoise on tehnyt siirron $y \in F$. Françoisen siirtosäännöksi sanotaan moniarvoista kuvausta $C_F \subset E \times F$, kun $C_F(x)$ niiden siirtojen joukko, jotka Françoise voi valita, kun Eemeli on tehnyt siirron $x \in E$.*

Esimerkki. Kummankin pelaajan siirtosääntö voi olla yksiarvoinen kuvaus. Silloin peli on deterministinen: jos Eemeli siirtää ensin, vastaa Françoise siihen yhdellä tietyllä siirrolla, jolloin Eemeli vastaa ainoalla siirtosääntönsä sallimalla siirrolla. Tavallinen siirtosääntö on pyrkiä minimoimaan menetystään.

Määritelmä 4.1.2 *Eemelin ja Françoisen siirtojen paria $(\bar{x}, \bar{y})$ sanotaan riidattomaksi⁶, jos*

$$\bar{x} \in C_E(\bar{y}) \text{ ja } \bar{y} \in C_F(\bar{x}). \quad (4.2)$$

Riidattomien siirtoparien joukko voi olla tyhjä, äärellinen, numeroituvasti tai ylinumeroituvasti ääretön. Jos Eemelin ja Françoisen siirtosäännöt sallivat kaikki joukkojen E ja F alkiot, on silloin jokainen siirtopari riidaton. Parhaassa tapauksessa on täsmälleen yksi riidaton siirtopari. Silloin peli jatkuu vakiona: Eemeli ja Françoise toistavat samoja omia siirtojaan loputomasti.

Lause 4.1.3 *(Brouwerin kiintopistelause). Olkoon $K \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, kupe-
ra ja kompakti joukko. Jokaisella jatkuvalla kuvauksella $F: K \rightarrow K$ on ainakin
yksi kiintopiste.*

Todistus. Sivutetaan. Ks. Dunford & Schwartz: Linear Operators I, ss. 467-470.
m.o.t.

Lause 4.1.4 *Olkoot $E, F \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, kuperia ja kompakteja. Jos Ee-
melin ja Françoisen siirtosäännöt ovat jatkuvia kuvauksia, niin heidän pelissään
on ainakin yksi riidaton siirtopari $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$.*

Todistus. Pari $(\bar{x}, \bar{y})$ on riidaton siirtopari täsmälleen silloin, kun se on kuvauk-
sen

$$E \times F \rightarrow E \times F, (x, y) \mapsto (C_E(y), C_F(x)),$$

kiintopiste. Kompaktien joukkojen tulo on kompakti Tihonovin lauseen perus-
teella⁷. Toisaalta kuperien joukkojen tulo on kupera (harjoitustehtävä), joten
 $E \times F$ on kupera ja kompakti, jolloin Brouwerin kiintopistelauseen nojalla ky-
seisellä kuvauksella on ainakin yksi kiintopiste. **m.o.t.**

4.1.1 Normaalimuotoinen peli

Tarkastellaan yhä Eemelin ja Françoisen peliä.

Määritelmä 4.1.5 *Kahden henkilön peliä sanotaan normaalimuotoiseksi eli
strategiseksi peliksi, jos sen kuvaavat joukot E ja F sekä menetyskuvaukset
 $f_E, f_F: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$. Tällöin merkitään*

$$\mathbf{f}: E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^2, \mathbf{f}(x, y) = (f_E(x, y), f_F(x, y)), \quad (4.3)$$

ja sitä sanotaan kaksoismenetyksen⁸ kuvaukseksi.

⁴Pravilo prinjatija rešenija, règle de décision.

⁵Tämä määritelmä kannattaa ensin lukea pitäen C_E :tä tavallisena kuvauksena. Moniar-
voinen kuvaus on sama käsite kuin relaatio. Joukko $C_E(y)$ on sen arvo pisteessä $y \in F$.

⁶Para soglasovannyh strategij, couple cohérent de stratégies.

⁷Tässä tapauksessa voidaan käyttää myös sitä, että äärellisulotteisessa avaruudessa joukko
on kompakti täsmälleen silloin kun se on suljettu ja rajoitettu.

⁸Bipoter', biperte.

Nyt voidaan löytää luontevat pelaajien siirtosäännöt. Tarkastellaan Eemelin menetykskuvausta f_E . Jos hän tietää, että Françoise on tehnyt siirron $y \in F$, niin hän valitsee oman siirtonsa $x \in E$ siten, että hänen menetyksensä on mahdollisimman pieni eli kuvaus $x \mapsto f_E(x, y)$ saavuttaa pienimmän arvonsa. Toisin sanoen hän valitsee siirtonsa joukosta

$$\overline{C}_E(y) := \{\bar{x} \in E \mid f_E(\bar{x}, y) = \inf_{x \in E} f_E(x, y)\}. \quad (4.4)$$

Tämä kaava siis määrittelee Eemelin siirtosäännön $\overline{C}_E: F \rightarrow E$ moniarvoisena kuvauksena⁹. Samoin Françoise valitsee siirtonsa joukosta

$$\overline{C}_F(x) := \{\bar{y} \in F \mid f_F(x, \bar{y}) = \inf_{y \in F} f_F(x, y)\}, \quad (4.5)$$

kun Eemeli on tehnyt siirron $x \in E$.

Määritelmä 4.1.6 *Siirtosääntöjä (4.4)–(4.5) sanotaan luonteviksi siirtosääntöiksi¹⁰. Niiden mukaan riidatonta siirtoparia sanotaan Nashin tasapainoksi eli yhteistyöhaluttomien tasapainoksi¹¹.*

Näin siirtopari $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$ on yhteistyöhaluttomien tasapaino täsmälleen silloin, kun

$$f_E(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{x \in E} f_E(x, \bar{y}) \text{ ja } f_F(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{y \in F} f_F(\bar{x}, y). \quad (4.6)$$

Esimerkki. Tarkastellaan vangin ongelmaa. Eemeli ja Françoise ovat tehneet yhdessä rikoksen ja joutuneet tutkintavankeuteen. Jos heistä kumpikaan ei tunnusta, niin he istuvat tyrmässä kumpikin vuoden. Jos yksi tunnustaa ja toinen ei, pääsee tunnustanut vapaaksi ja toinen istuu tyrmässä viisi vuotta. Jos kumpikin tunnustaa, niin he molemmat istuvat kolme vuotta. Näin siis $E = \{I, II\}$ ja $F = \{1, 2\}$, missä ykköset vastaavat vaikenemista ja kakkoiset tunnustamista. Kaksoismenetyksen kuvaus esitetään seuraavalla taulukolla, missä sen arvot ovat alkioina.

Eemeli	Françoise	
	1	2
I	(1,1)	(5,0)
II	(0,5)	(3,3)

Tällöin Eemelin ja Françoisen luontevat siirtosäännöt ovat

$$\overline{C}_E(y) = \begin{cases} II, & \text{jos } y = 1, \\ II, & \text{jos } y = 2, \end{cases} \quad \overline{C}_F(x) = \begin{cases} 2, & \text{jos } x = I, \\ 2, & \text{jos } x = II. \end{cases}$$

Yhteistyöhaluttomien tasapaino on täsmälleen siirtopari $(II, 2)$ eli se, että kumpikin tunnustaa.

Määritelmä 4.1.7 *Kuvausta*

$$\tilde{f}_E: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{f}_E(x) = \sup_{v \in F} f_E(x, v), \quad (4.7)$$

sanotaan Eemelin pahimman menetyksen kuvaukseksi¹². Sen globaalia minimikohtaa $\hat{x}$ sanotaan Eemelin varovaiseksi siirroksi¹³. Vastaavasti kuvausta

$$\tilde{f}_F: F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{f}_F(y) = \sup_{x \in E} f_E(x, y), \quad (4.8)$$

sanotaan Françoisen pahimman menetyksen kuvaukseksi. Sen globaalia minimikohtaa $\hat{y}$ sanotaan Françoisen varovaiseksi siirroksi.

⁹Relaationa kirjoitetaan $C_E \subset F \times E$.

¹⁰Kanoničeskie pravila rešenija, règles des décisions canoniques.

¹¹Nekooperativnoe ravnovesije, équilibre non-coopératif.

¹²Funkcija naihudših poter'.

¹³Ostorožnaja strategija, stratégie conservatoire.

Esimerkki. Jatketaan vangen ongelman tarkastelua. Eemelin ja Françoisen pahimman menetyksen kuvaukset saavat arvot

$$\tilde{f}_E(I) = 5, \tilde{f}_E(II) = 3, \tilde{f}_F(1) = 5 \text{ ja } \tilde{f}_F(2) = 3,$$

joten kummankin varovainen siirto on olla tunnustamatta. Vähemmällä he pääsisivät yhteistyöllä ja sopimalla kumpikin tunnustamisesta, mutta silloin kummallekin jäisi riski, että toinen rikkoo sopimuksen.

4.1.2 Kahden henkilön nollasummapelit

Tässä jaksossa tarkastellaan kahden henkilön —yhä Eemeli ja François— pelijä, joissa yhden menestys on toisen menetykset eli aiemmin käytetyin merkinnöin

$$f_E(x, y) + f_F(x, y) = 0 \text{ kaikilla } x \in E \text{ ja } y \in F. \quad (4.9)$$

Merkitään lyhyesti $f(x, y) := f_E(x, y)$, jolloin Françoisen menetykset $f_F(x, y) = -f(x, y)$. Silloin Eemelin pahimman menetyksen kuvaus on

$$\tilde{f}_E: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \tilde{f}_E(x) = \sup_{y \in F} f(x, y), \quad (4.10)$$

ja Françoisen pahimman menetyksen kuvaus on

$$\tilde{f}_F: F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \tilde{f}_F(y) = \sup_{x \in E} f_F(x, y) = - \inf_{x \in E} f(x, y). \quad (4.11)$$

Eemelin *varovaisten siirtojen joukko* on

$$\tilde{E} := \{x \in E \mid v_E = \tilde{f}_E(x)\}, \text{ missä } v_E := \inf_{x \in E} \tilde{f}_E(x), \quad (4.12)$$

on Eemelin *varovaisen siirron arvo*. Vastaavasti Françoisen varovaisten siirtojen joukko on

$$\tilde{F} := \{y \in F \mid v_F = \tilde{f}_F(y)\}, \text{ missä } v_F := \inf_{y \in F} \tilde{f}_F(y), \quad (4.13)$$

on Françoisen varovaisen siirron arvo.

Apulause 4.1.1 Pätee

$$-v_F = \sup_{y \in F} \inf_{x \in E} f(x, y) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) = v_E.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. Huomaa, että voi olla $-v_F < v_E$.

m.o.t.

Lause 4.1.8 Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä

1. Siirtopari $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$ on yhteistyöhaluttomien tasapaino.
2. Jokaisella $x \in E$ ja $y \in F$ pätee $f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y})$.
3. Pätee $\bar{x} \in \tilde{E}$, $\bar{y} \in \tilde{F}$ ja $v_E = -v_F$.
4. Siirto $\bar{x}$ on Eemelin varovainen siirto, $\bar{y}$ on Françoisen varovainen siirto ja

$$\min_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y) = \max_{y \in F} \inf_{x \in E} f(x, y). \quad (4.14)$$

Todistus. Kohta 4 on sama kuin kohta 3, sillä

$$v_F = \min_{y \in F} \tilde{f}_F(y) = \min_{y \in F} \sup_{x \in E} -f(x, y) = \min_{y \in F} - \inf_{x \in E} f(x, y) = - \max_{y \in F} \inf_{x \in E} f(x, y).$$

Kaavan (4.6) nojalla $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$ on yhteistyöhaluttomien tasapaino täsmälleen silloin, kun

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{x \in E} f(x, \bar{y}) = - \inf_{y \in F} -f(\bar{x}, y) = \sup_{y \in F} f(\bar{x}, y).$$

Tämä on yhtäpitävä kohdan 2 kaksoisepäytälön kanssa. Näin kohdat 1 ja 2 ovat yhtäpitäviä.

Kohtien 2 ja 3 yhtäpitävyyden näyttäminen jätetään harjoitustehtäväksi.
m.o.t.

Määritelmä 4.1.9 *Edellisen lauseen kohdan 2 kaksoisepäytälön toteuttavaa pistettä $(\bar{x}, \bar{y})$ sanotaan kuvauksen f satulapisteksi.*

Apulause 4.1.2 *Olkoon $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ kuvauksen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satulapiste, jossa ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat $D_x f$ ja $D_y f$ ovat olemassa. Silloin*

$$D_x f(\bar{x}, \bar{y}) = D_y f(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Todistus. Harjoitustehtävä.

m.o.t.

Emellillä tai Françoisella ei ole aina olemassa varovaista siirtoa (koska pahimman menetyksen kuvaus ei aina saavuta infimumiaan). Seuraava lause antaa riittävät ehdot niin varovaisten siirtojen olemassaololle kuin keinon niiden löytämiseksi.

Lause 4.1.10 *Olkoot E ja F kaksi epätyhjää ja kompaktia joukkoa avaruudessa¹⁴ $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$. Olkoon kuvaus $f: E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sellainen, että*

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, y) &\text{ on alhaalta puolijatkuva kaikilla } y \in F, \\ y \mapsto f(x, y) &\text{ on ylhäältä puolijatkuva kaikilla } x \in E. \end{aligned}$$

Tällöin kuvauksella f on satulapiste täsmälleen silloin, kun minimax-yhtälössä (4.15) esiintyvät minimi ja maksimit saavutetaan ja se on voimassa;

$$\min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y) = \max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y). \quad (4.15)$$

Todistus. Olkoon $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$ kuvauksen f satulapiste. Koska kuvaus $x \mapsto \sup_{y \in F} f(x, y)$ on alhaalta puolijatkuva (harjoitustehtävä), niin Weierstraßin lauseen yleistyksen nojalla yhtälön (4.15) vasemman puolen minimi saavutetaan. Toisaalta vasemman puolen maksimi saavutetaan suoraan kuvauksen $f(x, \cdot)$ ylhäältä puolijatkuvuuden nojalla. Samoin yhtälön (4.15) oikean puolen minimi ja maksimi saavutetaan. Tällöin pätee aina

$$\max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y) \leq \min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y).$$

Koska $(\bar{x}, \bar{y})$ on satulapiste, niin

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq \min_{x \in E} f(x, \bar{y}) \leq \max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y).$$

Samoin saadaan, että

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \max_{y \in F} f(\bar{x}, y) \geq \min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y),$$

mistä seuraa yhtälö (4.15).

¹⁴Tämä lause pätee myös, jos E ja F ovat ääretönulotteisia kompakteja joukkoja, sillä todistus perustuu Weierstraßin lauseeseen.

Olkoon yhtälö (4.15) voimassa. Silloin on olemassa $\bar{x} \in E$ ja $\bar{y} \in F$ siten, että

$$\max_{y \in F} f(\bar{x}, y) = \min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y) =: \alpha = \max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y) = \min_{x \in E} f(x, \bar{y}).$$

Tästä seuraa, että

$$f(\bar{x}, y) \leq \alpha \leq f(x, \bar{y}) \text{ kaikilla } x \in E \text{ ja } y \in F.$$

Valitaan yllä $x = \bar{x}$ ja $y = \bar{y}$, jolloin $\alpha = f(\bar{x}, \bar{y})$ ja niin $(\bar{x}, \bar{y})$ on satulapiste. **m.o.t.**

Seuraava lause satulapisteen olemassaolosta on melkein sama kuin John von Neumannin lause¹⁵.

Lause 4.1.11 *Olkoot E ja F kaksi epätyhjää, kompaktia ja kuperaa avaruuden $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, osajoukkoa. Olkoon kuvaus $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ sellainen, että*

$$\begin{aligned} x \mapsto f(x, y) & \text{ on kupera ja alhaalta puolijatkua kaikilla } y \in F, \\ y \mapsto f(x, y) & \text{ on kovera ja ylhäältä puolijatkua kaikilla } x \in E. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Silloin kuvauksella f on satulapiste $(\bar{x}, \bar{y}) \in E \times F$.

Todistus. Olkoon $\epsilon \in]0, \infty[$ ja asetetaan

$$\begin{aligned} f_\epsilon: E \times F & \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\epsilon(x, y) = f(x, y) + \epsilon \|x\|^2, \\ F_\epsilon: F & \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\epsilon(y) = \min_{x \in E} f_\epsilon(x, y). \end{aligned}$$

Tällöin $x \mapsto f_\epsilon(x, y)$ on aidosti kupera¹⁶ jokaisella $y \in F$, jolloin sen minimikohta on yksikäsitteinen (harjoitustehtävä). Toisaalta Weierstraßin lauseen yleistyksen nojalla pienin arvo on olemassa. Merkitään globaalia minimikohtaa $G(y)$, jolloin

$$F_\epsilon(y) = f_\epsilon(G(y), y) \text{ kaikilla } y \in F.$$

Kuvaus F_ϵ on kovera ja ylhäältä puolijatkua, joten se saavuttaa suurimman arvonsa jossakin pisteessä $y^* \in F$. Siten

$$F_\epsilon(y^*) = \max_{y \in F} F_\epsilon(y) = \max_{y \in F} \min_{x \in E} f_\epsilon(x, y) = \min_{x \in E} f_\epsilon(x, y^*).$$

Jokaiselle $x \in E$, $y \in F$ ja $t \in]0, 1[$ pätee nyt

$$f_\epsilon(x, (1-t)y^* + ty) \geq (1-t)f_\epsilon(x, y^*) + tf_\epsilon(x, y) \geq (1-t)F_\epsilon(y^*) + tf_\epsilon(x, y).$$

Valitsemalla $x = G((1-t)y^* + ty)$ saadaan, että

$$F_\epsilon(y^*) \geq F_\epsilon((1-t)y^* + ty) \geq (1-t)F_\epsilon(y^*) + tf_\epsilon(G((1-t)y^* + ty), y).$$

Täten

$$F_\epsilon(y^*) \geq f_\epsilon(G((1-t)y^* + ty), y) \text{ kaikilla } y \in F. \tag{4.17}$$

Merkitään jokaiselle $y_1, y_2 \in F$ ja $t \in]0, 1[$, $\xi_t := G((1-t)y_1 + ty_2)$. Jokaiselle $x \in F$ pätee

$$f_\epsilon(\xi_t, (1-t)y_1 + ty_2) \leq f_\epsilon(x, (1-t)y_1 + ty_2),$$

¹⁵Siinä avaruudet E ja F ovat kompakteja, mutta eivät välttämättä äärellisulotteisen vektoriavaruuksien osajoukkoja.

¹⁶Eli kupuruuden määrittävä epäyhtälö on aito.

mistä seuraa koveruuden avulla, että

$$(1-t)f_\epsilon(\xi_t, y_1) + tf_\epsilon(\xi_t, y_2) \leq f_\epsilon(x, (1-t)y_1 + ty_2).$$

Olkoon (ξ_{t_n}) jono, joka suppenee kohti pistettä ξ , kun $t_n \rightarrow 0+$. Koska kuvaus $x \mapsto f_\epsilon(x, y_2)$ on rajoitettu alhaalta, niin puolijatkuvuuksien avulla saadaan rajankäynnissä $t \rightarrow 0+$, että

$$f_\epsilon(\xi, y_1) \leq f_\epsilon(x, y_1) \text{ kaikilla } x \in A.$$

Siten $\xi = G(y_1)$. Koska $E \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $\xi_{t_n} \in E$, niin jokaisella jonon (ξ_{t_n}) osajonolla on suppeneva osajono. Jokaisen niistä raja-arvo on $G(y_1)$, joten koko jono suppenee kohti sitä. Siis

$$\lim_{t \rightarrow 0+} G((1-t)y_1 + ty_2) = G(y_1) \text{ kaikilla } y_1, y_2 \in F. \quad (4.18)$$

Nyt epäyhtälöstä (4.17) saadaan rajankäynnillä $t \rightarrow 0+$, että

$$F_\epsilon(y^*) \geq f_\epsilon(G(y^*), y) \text{ kaikilla } y \in F.$$

Toisaalta pätee

$$F_\epsilon(y^*) \leq f_\epsilon(x, y^*) \text{ kaikilla } x \in E.$$

Näin saadaan, että

$$f_\epsilon(x^*, y) \leq f_\epsilon(x^*, y^*) \leq f_\epsilon(x, y^*) \text{ kaikilla } x \in E \text{ ja } y \in F,$$

missä $x^* = G(y^*)$. Täten (x^*, y^*) on kuvauksen f_ϵ satulapiste, joten lauseen 4.1.10 nojalla

$$\min_{x \in E} \max_{y \in F} f_\epsilon(x, y) = \max_{y \in F} \min_{x \in E} f_\epsilon(x, y).$$

Siten

$$\min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y) \leq \max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y) + \epsilon C.$$

missä $C = \max_{x \in E} \|x\|^2$. Koska $\epsilon \in]0, \infty[$ on mielivaltainen, niin

$$\min_{x \in E} \max_{y \in F} f(x, y) \leq \max_{y \in F} \min_{x \in E} f(x, y).$$

Tämä epäyhtälö pätee aina toisinpäin, joten minimax-yhtälö (4.15) on voimassa. Lauseen 4.1.10 nojalla kuvauksella f on satulapiste. **m.o.t.**

Harjoitustehtäviä ma 2.12.2002, MaD 245 klo 16-18

1. Laske diskreetin dynaamisen järjestelmän

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{10}x_j^2, \quad j = 1, 2, \dots,$$

käyttäytymisen alkuarvolla $x_0 = 1/10$. Ratkaise vastaava jatkuva alkuarvototehtävä

$$y(0) = \frac{1}{10}, \quad y'(t) = y(t)^2 \text{ kaikilla } t \in [0, \delta[.$$

Vertaa ratkaisuja. Luku $\delta \in]0, \infty[$ ei saa olla mikä hyvänsä. Mikä on suurin mahdollinen δ ?

2. Olkoon c_0 kaikkien sellaisten reaalilukujonojen joukko, jotka suppenevat kohti nollaa, ja

$$d: c_0 \times c_0 \rightarrow [0, \infty[, \quad d(x, y) = \sup \{ |x_j - y_j| \mid j = 1, 2, \dots \}.$$

Voidaan osoittaa, että (c_0, d) on täydellinen metrinen avaruus. Totea, että kuvaus

$$f: c_0 \rightarrow c_0, \quad f(x) = f(x_1, x_2, \dots) = 1, x_1, x_2, \dots,$$

on kutistuskuvaus ja että sillä ei ole kiintopistettä.

3. Osoita, että ei voida luopua Banachin kiintopistelauseen oletuksesta, että kuvaus on vahva kutistuskuvauksena.
4. Osoita Brouwerin kiintopistelause tapauksessa $K = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ eli että jokaisella jatkuvalla kuvauksella $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ on ainakin yksi kiintopiste. Vihje: Bolzanon lause ja apufunktio $F(x) = f(x) - x$.
5. Olkoon $K \subset \mathbb{R}$. Osoita, että kuvauksella $f: K \rightarrow K$ ei ole aina kiintopistettä, jos
 - (a) joukko K on kompakti ja f ei ole jatkuva,
 - (b) kuvaus f on jatkuva, K on suljettu, mutta ei rajoitettu,
 - (c) kuvaus f on jatkuva, K on rajoitettu, mutta ei suljettu.
6. Tarkastellaan perheriitaa pelinä. Eemelillä ja Françoisella on kummallakin täsmälleen kaksi vaihtoehtoa: katsoa televisiosta jalkapallo-ottelua tai lähteä kävelyille kaupungille. Jos he ovat yksin, he molemmat ikävystyvät kaksi yksikköä. Jos he katsovat yhdessä jalkapallo-ottelua, Eemeli ei ikävysty lainkaan ja François ikävystyy yhden yksikön. Jos he molemmat lähtevät kävelyille, François ei ikävysty lainkaan ja Eemeli ikävystyy yhden yksikön. Esitä juuri määritelty kaksoismenetyksen kuvaus taulukkona ja määrää kummankin luontevat siirtosäännöt perheriidassa.
7. Määrää edellisen tehtävän tapauksessa siirtopari $(\bar{x}, \bar{y})$, joka on yhteistyöhaluttomien tasapaino.
8. Määrää edellisen tehtävän tapauksessa kummankin varovainen siirto ja sitä vastaava menetys (ikävystyminen).

Harjoitustehtäviä To 5.12.2002, MaD 251 klo 14.15.

1. Olkoot E ja F epätyhjiä joukkoja ja $f: E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Osoita, että

$$\sup_{y \in F} \inf_{x \in E} f(x, y) \leq \inf_{x \in E} \sup_{y \in F} f(x, y).$$

2. Todista apulause 4.1.1
3. Todista, että lauseen 4.1.8 kohdasta 2 seuraa kohta 3.
4. Todista, että lauseen 4.1.8 kohdasta 3 seuraa kohta 2.
5. Määrää kuvauksen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$ satulapisteet kahdella eri menetelmällä. Piirrä sen kuvaaja.
6. Määrää kuvauksen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3y - 3x^2y + 3xy - y$ satulapisteet kahdella eri menetelmällä.
7. Olkoot $E, F \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, ja $f: E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ siten, että $x \mapsto f(x, y)$ on alhaalta puolijatkua kaikilla $y \in F$. Osoita, että kuvaus

$$x \mapsto \sup_{y \in F} f(x, y), \quad E \rightarrow \overline{\mathbb{R}},$$

on alhaalta puolijatkua.

8. Osoita, että aidosti kuperan kuvauksen globaali minimikohta on yksikäsitteinen.
9. Olkoon kuvauksen $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satulapiste $(\bar{x}, \bar{y})$ ja olkoot siinä f :n osittaisderivaatat olemassa. Osoita, että

$$D_x f(\bar{x}, \bar{y}) = D_y f(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Kirjallisuutta

- [1] Jean-Pierre Aubin, “L’analyse non linéaire et ses motivations économiques”. Masson, Pariisi, 1984, venäjäksi Mir, Moskova, 1988.
- [2] I. Ekeland & R. Temam, “Analyse convexe et problèmes variationnels”, Dunod, Gauthier-Villars, Pariisi, 1974.
- [3] Hannu Karttunen: “Johdatus taivaanmekaniikkaan”, Limes ry, Helsinki, 1980.
- [4] Kaisa Miettinen, “Optimointi”, Jyväskylän yliopisto, matematiikan laitos, luentomoniste 33, 1995.
- [5] Peter Whittle: “Optimization over Time : Dynamic Programming and Stochastic Control”, Vol. 1, Wiley, Chichester, 1982.

Hakemisto

$C_n(x_0, x_1, \dots, x_n; y)$, 33

$D(S)$, 6

$F_\infty(x)$, 34

$F_j(x_j)$, 41

$F_n(x)$, 34

I_S , 5

$R(S)$, 6

S^{-1} , 6

Sx , 6

$[-\infty, \infty[$, 3

$[-\infty, \infty]$, 3

$\|\cdot\|$, 2

ϵ -maksimi, 11

ϵ -maksimikohta, 11

ϵ -minimi, 11

ϵ -minimikohta, 11

$\liminf_{n \rightarrow \infty}$, 18

$\liminf_{x \rightarrow x_0}$, 23

$\liminf_{x \rightarrow \infty}$, 24

$\limsup_{n \rightarrow \infty}$, 18

$\limsup_{x \rightarrow x_0}$, 23

$\limsup_{x \rightarrow \infty}$, 24

$] - \infty, \infty]$, 3

$d(x, y)$, 2, 21

xSy , 6

$x \prec y$, 9

$x \preceq y$, 8

$\text{epi } f$, 28

alараja-arvo

kuvauksen, 23

lukujonon, 18

alkuarvot tehtävä, 52

arvo

aito huonoin, 10

aito paras, 9

huonoin, 9

paras, 9

pienin, 1, 4

suurin, 1, 4

varovaisen siirron, 60

arvojoukko, 6

avaruus

Banachin, 30

diskreetti metrinen, 21

metrinen, 21

topologinen, 5

täydellinen metrinen, 22

etusijakohta

aito globaali, 9

globaali, 9

lokaali, 9

etäisyys, 2

gradienttimenetelmä, 57

haarukointi, 55

ideaalinen orsivaaka, 10

indikaattorifunktio, 5

iterointi, 55

jono

Cauchyn, 21

suppeneva, 21, 22

joukko

avoin, 2

Jordanin, 8

kompakti, 17, 29

kupera, 15, 18

nollamittainen, 8

varovaisten siirtojen, 60

järjestys

kokonais-, 8

lineaarinen, 8

osittain-, 8

karteellinen tulo, 6

kohdekuvaus, 3

kolmioepäyhtälö, 21

kontraktio, 51

kupera yhdiste, 15

kustannuskuvaus

diskontattu, 43

palautuskaavalla, 45

kuvaus

alhaalta puolijatkua, 26

jatkua, 27

kaksoismenetyksen, 58

kelpo, 5

kovera, 18

kupera, 15, 18

kutistus-, 51

Lipschitzin-jatkua, 51

moniarvoinen, 7

pahimman menetyksen, 59

vahva kutistus-, 51

- ylhäältä puolijatkuva, 26
- käänteissuhde, 6
- laajennettu lukusuora, 3
- lause
 - Banachin kiintopiste-, 51
 - Brouwerin kiintopiste-, 58, 64
 - Weierstraßin, 17, 29
- liikeyhtälö, 41
- mahdollinen maailma, 7
- maksimi
 - globaali, 4
 - lokaali, 2, 5
- maksimikohta
 - globaali, 1, 4
 - lokaali, 2, 5
- malli, 7
- menetys, 57
- metriikka, 21
- metrisointiongelma, 10
- minimi
 - globaali, 4
 - lokaali, 2, 5
- minimikohta
 - globaali, 1, 4
 - lokaali, 2, 5
- monitavoiteoptimointi, 40
- määrittelyjoukko, 6
- normaalimuotoinen peli, 58
- normi, 2
- objektifunktio, 3
- operaattori
 - Heavisiden, 16
 - kasvava, 15
- optimaalisuusperiaate
 - Bellmanin, 34
- optimaalisuusyhtälö, 35
- pallo
 - avoin, 2
- peli
 - nollasumma-, 60
- piste
 - kiinto-, 51
 - kärki-, 38
 - satula-, 61
 - stationaarinen, 49
- polku, 33
- raja-arvo
 - kuvauksen, 23, 25
- rajoite, 3, 5
- rekursiivinen ratkaisemisen, 35
- relaatio, 6
 - aito preferenssi-, 9
 - ekvivalenssi-, 7
 - indifferenssi-, 9
 - preferenssi-, 8
- riidaton siirtojen pari, 58
- side-ehto, 3, 5
- siirto
 - varovainen, 59, 60
- siirtosääntö, 57
 - luonteva, 59
- sisäpiste, 2
- stationaarinen piste
 - lokaalisti stabiili, 49
 - paikallisesti vakaa, 49
 - stabiili, 49
 - vakaa, 49
- suhde, 6
 - aito etusija-, 9
 - antisymmetrinen, 7
 - ekvivalenssi-, 7
 - etusija-, 8
 - heikosti yhtenäinen, 7
 - refleksiivinen, 7
 - samasija-, 9
 - symmetrinen, 7
 - transitiivinen, 7
 - yhtenäinen, 7
- suunnattu derivaatta, 30
- säättömuuttuja, 40
- takasijakohta
 - aito globaali, 10
 - globaali, 9
 - lokaali, 9
- tasapaino
 - Nashin, 59
 - yhteistyöhaluttomien, 59
- tila-avaruus, 40
- tilamuuttuja, 40
- tilayhtälö, 40
- vangin ongelma, 59
- yhtälö
 - Keplerin, 56
 - minimax-, 61
- yläraja-arvo
 - kuvauksen, 23
 - lukujonon, 18
- Zornin lemma, 8
- ääriarvotehtävä
 - lineaarinen, 37
 - sidottu, 37
 - sidottu globaali, 3, 5
 - sidottu lokaali, 3, 5
 - yhtäpitävä, 6