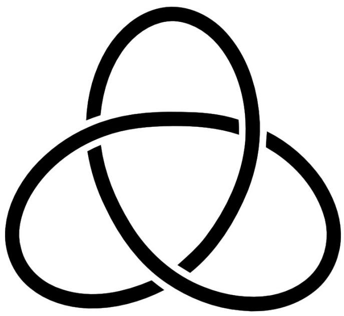
Solmupelin ratkeavuus



Ville Arvio

Kandidaatintutkielma
Matematiikka

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Jyväskylän yliopisto

10.1.2012

Sisällys

1. Johdanto

Alunperin kiinnostuin solmuista joulukuussa 2008, kun JYT & KVAT:n teatterikerhossa pelasimme solmupeliä noin tusinan ihmisen joukolla. Menimme rinkiin ja muodostimme solmun ottamalla sattumanvaraisesti toisia käsistä kiinni. Pähkäilimme, kokeilimme avata solmua, purimme silmukoita ja turhia tuplaylityksiä. Teimme kaikki sallitut liikkeet – useammankin kerran yrittäen. Syntyi erilaisia, keskenään isotooppisia solmuja. Mutta solmusta ei saatu muodostettua kehää. Se ei auennut ympyräksi puolenkaan tunnin yrittämisen jälkeen. Tästä tapahtumasta heräsi minulle alkuperäinen tutkimusongelma: Aukeavatko kaikki pelissä muodostetut solmut kehäksi? Onko solmupeliin aina ratkaisu?

1.1. Pelin kulku

Parhaimmillaan peli on kahdeksasta kuuteentoista pelaajalla. Alussa osallistujat menevät piiriin käden mitan päähän toisistaan. He laittavat silmät kiinni ja ojentavat kätensä eteen suoraksi. Tämän jälkeen he lähtevät rauhallisesti kulkemaan eteenpäin ja tarttuvat sattumanvaraisesti toista pelaajaa kämmenestä kiinni. Näin muodostuu solmu, joka pelaajien tulee avata kehäksi käsiä irrottamatta.

1.2. Oletuksia

Ongelman matemaattista analyysia varten meidän tarvitsee tehdä joitain oletuksia koskien muodostuvaa solmua ja pelin sääntöjä:

- Oletetaan, että syntyvä solmu on yhtenäinen.
  (solmu ei ole esimerkiksi linkki; kaksi sisäkkäistä kehää, vaan yksi yhtenäinen lanka avaruudessa)
- Käsiä ei saa irrottaa toisistaan missään vaiheessa, kaikki muu pyörintä ja liike on sallittua.
  (Reidemeisterin liikkeet ovat sallittuja, ks. 4.1.)
- Pelaajien rintamasuunnalla tai käsien kierteisyydellä ei ole ratkaisussa väliä.
  (yksinkertaistus tutkimusasetelmaan, joka on yleensä sanattomasti voimassa myös peliä pelattaessa)

Tässä kandidaatintutkielmassa tarkastellaan vain niin kutsuttuja kesyjä solmuja. Matemaattisesti mahdolliset ”villit”, äärettömyyksiin itseensä kietoutuvat solmut ovat toki matematiikassa mahdollisia mutta eivät konkreettisen tutkimusongelmamme kannalta oleellisia.

Havaintoja solmupelin ratkaisemisesta ihmisryhmillä perustuvat omiin kokemuksiini, eikä pelin ihmisryhmillä ratkaisemisesta ole tehty tieteelliset mitat täyttävää empiiristä tutkimusta ja aineiston keruuta. Esimerkit ovat mukana lähinnä pohdintana ihmisten käyttäytymis- ja matemaattisen maailman yhtenemispisteistä ja eroista.

Kuva 1: Matematiikan opiskelijoita ratkaisemassa solmupeliä LuK-seminaarissa keväällä 2011

1.3. Määritelmiä

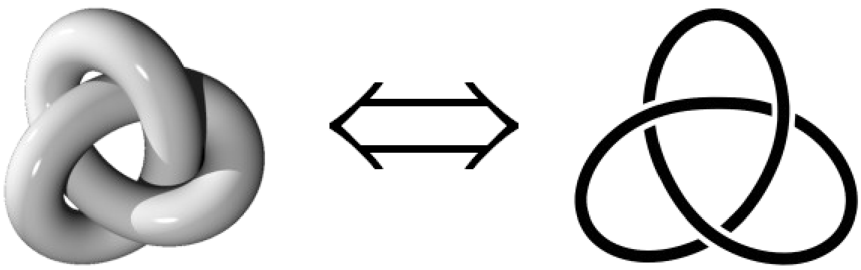
M1 ***Lanka*** on janan homeomorfinen kuva avaruudessa $\mathbb{R}^3$.
Langalla tarkoitetaan siis jatkuvaa, yksiulotteista oliota, jolla on pituus, mutta ei pintaa.

M2 ***Solmu*** on ympyrän homeomorfinen kuva $\mathbb{R}^3$:ssa. [2, s. 4]
Solmulla tarkoitetaan siis suljettua lankaa kolmiulotteisessa avaruudessa. Toisin sanoen avoimia ”narunpäitä” ei solmussa ole. [1, s. 17] [10a].

M3 ***Triviaalilla solmulla*** tarkoitetaan langan muodostamaa kehää, piiriä, ”ei-solmua”.
Kaikki muut solmut ovat ei-triviaaleja.

M4 ***Linkillä*** tarkoitetaan kahta tai useampaa, mahdollisesti toisiinsa kietoutunutta solmua. [10a]

M5 ***Diagrammi*** on solmun sellainen tasoprojektio, joka *ei kadota* solmun informaatiota.
Tarkoittaen, että tasoprojektioon on lisätty informaatio, kumpi langoista menee toisen yli ja mikä alitse lankojen risteyskohdissa.
Leikkaus- eli ***ylimenokohdalla*** tarkoitetaan paikkaa, missä solmun diagrammin tai varjon tasan kaksi lankaa risteävät. [1, s. 17]



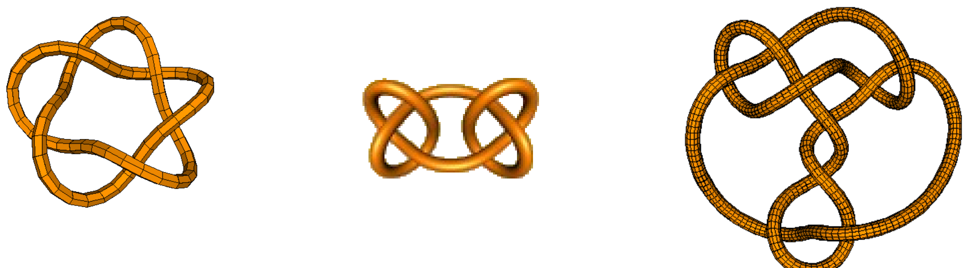
Kuva 2: Apilasolmu ja sen diagrammi

M6 ***Leikkausluku*** on ylimenokohtien, lankojen risteyskohtien lukumäärä solmussa. [1, s. 18]

M7 Solmu on ***yksinkertaisimmassa*** eli ***ratkaistussa muodossaan*** kun sen leikkausluku on minimissään.

M8 ***Alkeissolmulla*** tarkoitetaan sellaisen solmun diagrammia, joka on aseteltu niin, että siinä on mahdollisimman vähän ylimenokohtia. Alkeissolmu ei myöskään rakennu useammasta alkeissolmusta, jotka on liitetty peräkkäin samaan lankaan.
Toisin sanoen asettelun leikkausluku on mahdollisimman pieni ja solmu on mahdollisimman yksinkertaisessa eli ratkaistussa muodossa. Alkeissolmua voi verrata alkuluku-käsitteeseen.

M9 **Solmupelin ratkeavuudella** tarkoitetaan, että pelaajien on mahdollista avata solmu kehäksi eli he kykenevät muovaamaan ihmissolmusta kehän käsiä irrottamatta.
Solmun ratkaisemisella tarkoitetaan sen saattamista yksinkertaisimpaan muotoonsa, ks. M7.



Kuva 3: Kolme solmua, joiden leikkausluvut ovat 5, 6 ja 9.
Lisäksi laidoilla olevat solmut ovat alkeissolmuja. [10a, 14]

2. Solmuteorian historiaa

Solmut ja palmikot ovat tyypillinen koristekuvio muun muassa kelttiläisessä kansanperinteessä. Niitä esiintyy muun muassa niin keskiaikaisissa käsikirjoituksissa kuin venäläisten ikonien kehyksissäkin. [1, s. 14] Solmutaulukoita on luotu jo ainakin 1600-luvulta lähtien [1, s. 11]. Pieniä, solmuteoriaa koskevia aputuloksia oli osittain sattumalta, osittain sieltä täältä huomattu tai todistettukin jo 1800-luvulle tultaessa.

1800-luvun loppuun mennessä oli päästy verrattain pitkälle solmujen topologisessa, solmujen samankaltaisuuteen perustuvan vertailun avulla. 1899 Charles N. Little täydensi aiempia solmutaulukoita täydentämällä taulukot leikkauslukuun 10 saakka. Intoa luokitteluun saattoi antaa myös hypoteettinen aineen rakenteen tulkinta eetteriin muodostuneista pyörteistä, solmuista. Myöhemmin eetterihypoteesin mukana myös solmut vaipuivat joksikin aikaa unholaan muun muassa Mendelejevin alkuaineiden jaksollisen järjestelmän, suhteellisuusteorian ja Bohrin atomimallin selittäessä ja järjestäessä luonnonilmiöitä paikalleen. [1, s.19–20] [2, s.vii]

Vasta vuonna 1982 Kenneth A. Perko Jr. luokitteli alkeissolmut leikkauslukuun 11 saakka. Hän toimi työssään viimeisenä edelleen käsipelillä laskemiseen turvautuen. Tietotekniikan myötä löydettiin nopeasti alkeissolmuja lisää, ja nykyisin (Hoste, Thistlethwaite, Weeks 1998) alkeissolmut on luokiteltu leikkauslukuun 16 asti: niitä on jo 1 701 936 kappaletta. [1, s.20]

3. Abstraktiotasoja

(vrt. Liite 1)

Mallintaessamme solmupelin tutkimusongelmaa täytyy meidän ensiksi pukea tutkimusasetelma, solmupelin ihmissolmu ja tutkimusongelma matemaattiseen muotoon, karsia ongelmasta epäoleelliset piirteet pois ja tehdä joitain yksinkertaistuksia. Edelleen on tietenkin säilytettävä tutkimusongelman kannalta oleelliset piirteet siirryttäessä teoreettisen käsitteistön maailmaan.

Ensimmäiseksi siirrytään mallintamaan ihmisten muodostamaa solmua elottomilla, kärsivällisillä lego-ukoilla eli ihmismalleilla. Suurta mullistusta ei tässä vaiheessa vielä tehdä, vaan malli on lähinnä helposti paikallaan pysyvä ja hallitumpi kuin elävien ihmisten kanssa tutkittu tilanne.

Tämän jälkeen tehdään solmusta narumalli. Tällöin tehty oletus vastaa sitä, että ihmisten kädet ovat kuin kuminauhaa ja voisivat venyä kuinka pitkiksi tahansa. Myös ihmisten keskivartalot tällöin häivytetään osaksi lankaa. Näinpä abstraktiosta palaaminen takaisin ihmisten muodostamaan solmuun, tutkimusongelman konkreettiin asuun, ei välttämättä aina onnistu. Ihmisten käsissä olevat luut eivät taivu loputtomiin kuin lankamallin solmu, joka voi taipua mitä monimutkaisimpiin koukeroihin ja solmuihin. Tietysti ihmissolmukin saadaan tarvittaessa venytettyä: lisäämällä osallistujien määrää! Mutta tällöin, esimerkiksi 100 ihmisen solmupelissä pätee jo muita tilastollisia ja todennäköisyyksiin liittyviä sekä sosiaalisia ilmiöitä kuin 16 osallistujan pelissä tai teoreettisessa mallissa.

Kolmiulotteisesta narusolmusta voidaan muodostaa tasoprojektio eli diagrammi. Projisoimalla solmu diagrammiksi kaksiulotteiseen maailmaan ei kadoteta lainkaan informaatiota, kun tietyt piirteet merkitään ”varjoon” mukaan. Oleellista solmussa on, että langan yli- ja alimenokohdat saadaan tallennettua. Pelkkä auringon maahan jättämä varjo ei vielä sisällä tätä informaatiota.

Graafiteoriaa voitaisiin mahdollisesti käyttää solmun kuvaamiseen, onhan diagrammi selvästi verkko. Verkko säilyttää pisteiden väliset suhteet, mutta kuvatakseen solmua siihen täytyisi vielä liittää tieto ali- ja ylimenokohdista. Solmun tulkinta graafiksi antaisi meille valmiita matemaattisia työkaluja solmujen tutkimiseen. Valitettavasti jos menetämme informaation ali- ja ylimenokohdista, teemme kriittisen yleistyksen eikä voida puhua enää solmujen tutkimisesta. Entä auttaisivatko matriisit? Voitaisiinko solmu pukea matriisiksi, jolle voidaan etsiä optimaalinen asu? [5]

Solmujen luokittelussa oleellista on yli- ja alimenokohtien paikka sekä niiden lukumäärä. Näinpä meidän kannattaa kiinnittää huomiomme juuri solmun leikkauskohtien tarkasteluun.

Kuva 4: Solmun ratkaisua Mäkipartion johtajiston Possu-retkellä tammikuussa 2012

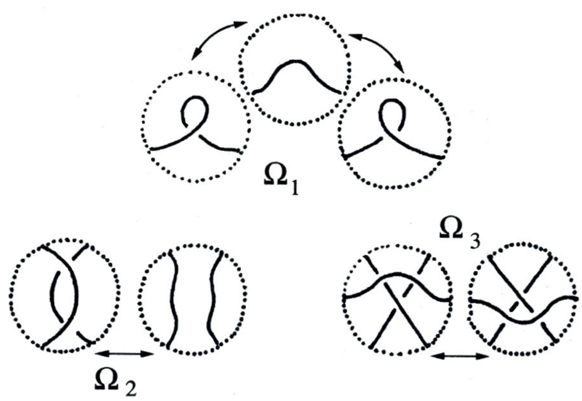
4. Reidemeisterin liikkeet ja teoreema

Keskeiseksi ongelmaksi solmupelin ratkaistavuuden analysoimisessa tulee, onko muodostunut solmu lopulta vain kierteille mennyt kehä. Ovatko kaksi solmua lopulta vain sama solmu, mutta vain kahdessa eri esitysmuodossa? Tuo sama ongelma, milloin eri solmut ovat topologisesti samanlaiset ja milloin erilaiset, on ollut keskeinen kautta koko solmuteorian historian, ja on edelleen polttava ongelma. Vielä matematiikassa ei ole kyetty aukottomasti luokittelemaan solmuja siten, että osataan varmasti sanoa, ovatko kaksi eri solmua kuitenkin sama solmu. [1, s. 98] [2, s. 110]

Intuitiivisesti voidaan päätellä, että kaksi eri *näköistä*, naruun solmittua solmua ovat samat, jos ne saadaan muokattua samannäköiseksi narua välillä katkaisematta. Tällöin solmut ovat *isotooppisia* keskenään. Solmu on siis itse asiassa isotooppinen ekvivalenssiluokka [1, s. 27]. Kolmiulotteisen solmun ja kaksiulotteisen diagrammin välillä pätee yhtenevyys, kunhan diagrammi pitää sisällään tiedon lankojen ylityksistä ja alituksista. Näin diagrammin perusteella voidaan narun avulla konstruoida solmu aina takaisin. Sallittuja, laillisia liikkeitä, jotka säilyttävät diagrammien isotooppisuuden, kutsutaan Reidemeisterin liikkeiksi. [1, s. 17–18, s. 43]

4.1. Reidemeisterin liikkeet

Ω_1 Pienen silmukan luominen tai tuhoaminen
Ω_2 Parittaisten ylimenokohtien luominen tai tuhoaminen
Ω_3 Kolmannen langan kuljettaminen kahden langan muodostaman ylimenokohdan yli



[1, s. 43–44]

Lisäksi voidaan solmun lankaa tietysti venyttää ja taivuttaa mielivaltaisesti, kunhan ylimenokohtien lukumäärä tai niiden keskinäinen asema ei muutu. [1 s. 43] Reidemeisterin liikkeet voidaan toteuttaa myös naruun tehdyssä solmussa, kunhan saksia ja liimaa ei käytetä. Solmupelissä sääntö, ettei käsiä saa välillä irrottaa, on tämän rajoitteen kanssa yhtäpitävä.

M10 **Ihmissolmulla** tarkoitetaan *solmupelissä* muodostunutta solmua, triviaalisolmua tai ei-triviaalia, ”aitoa” solmua.

Otetaan käsite käyttöön erotuksena matemaattisesta solmusta tai solmuluokasta ja tutkimusongelmamme kannalta ratkaisemattomasta ihmissolmusta; lankavyyhdistä, josta ei tiedetä, minkä solmun kanssa se on ekvivalentti. Ihmissolmussa ylimenokohtien määrä ei todennäköisesti ole minimissään.

Useimmiten solmupelissä syntyneet ihmissolmut ovat havaintojeni perusteella sangen yksinkertaisia ja *yleensä* isotooppisia kehän kanssa. Näinpä Reidemeisterin liikkein ihmissolmu ratkeaa. Reidemeisterin liikkeet on nimetty saksalaisen Kurt Reidemeisterin mukaan. Hänen julkaisemiaan ovat solmuteorian perusteokset *Knoten und Gruppen* (1928) ja *Knotentheorie* (1932). [1, s. 43]

4.2. Reidemeisterin teoreema

"Kaksi solmua ovat isotooppisia, jos ja vain jos niiden diagrammit saadaan toisistaan Reidemeisterin liikkeillä (ja triviaaleilla muunnoksilla)."

[1, s. 46]

Näinpä solmupeliin on olemassa ratkaisu, jos muodostettu ihmissolmu on alun perinkin ollut kehä! Koko solmupelin idea onkin purkaa ihmissolmu Reidemeisterin liikkeillä auki kehäksi monimutkaisemmasta asustaan. Tämän peliä leikkinyt lienee käytännössä kokeilemalla tehnytkin.

Kahden solmun samankaltaisuus voidaan määritellä myös täsmällisesti:

M1 Solmut ovat samat, jos on olemassa homeomorfismi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. [2, s. 4]

Jos tällainen kuvaus on olemassa, solmut edustavat samaa ekvivalenssiluokkaa, jolloin puhutaan että ne ovat sama solmu – vaikkakin ehkä eri tavalla $\mathbb{R}^3$:ssa kiertyneitä.

Mutta miten solmusta saadaan selville, milloin sillä on ratkaisu?
Entä mikä on vähimmäismäärä osallistujia, joka kykenee muodostamaan solmun, joka ei ratkea?

Mietittävää jälkimmäiseen kysymykseen:

1. Kerää kolmen henkilön ryhmä.
2. Menkää piiriin – eli nyt tasasivuiseksi kolmioksi.
3. Ojentakaa *oikea* kätenne suoraan eteenpäin.
4. Nyt ojenna *vasen* kätesi, joka menee edessä olevan *vierustoverin oikean* käden *yli* ja tarttuu kiinni sille vastaantulevaan käteen.
(Siis ensiksi *vasemmalla* olevan kaverin käden ylitse ja sitten *oikealla* olevan kaverin tarjoamaan käteen tartuen kiinni.)
5. Saatteko avattua näin muodostunutta solmua kehäksi käsiä irrottamatta?

Näin muodostettu solmu on *apilasolmu*. Apilasolmu on oma solmunsa, jonka leikkausluku on kolme. Ratkeaako solmupeli tällä kertaa? Voiko apilasolmusta muodostaa sopivilla liikkeillä kehän? Toisin sanoen, onko apilasolmu isotooppinen kehän kanssa?

Onko meillä nyt intuitiivinen hypoteesi, vastaesimerkkiehdokas siitä, että solmupelillä ei ehkä aina ole ratkaisua? Meidän täytyy enää varmistaa, että kehä ja apilasolmu todella ovat eri solmuja.

Kuva 5: Apilasolmu Mäkipartion johtajiston Possu-retkellä

5. Solmuinvariantit – solmujen luokittelu

M11 ***Solmuinvariantti*** tarkoittaa keinoa liittää solmun jokaiseen tasodiagrammiin jokin algebrallinen objekti (luku, polynomi), joka ei muutu solmua asetellessa eli vaihdettaessa solmujoukon edustajaa ekvivalenssiluokassa pysyen. Mikäli kaksi diagrammia antavat erilaisen invariantin, niitä vastaavat solmut eivät voi olla samat. [1, s. 66–67]

Invarianssi tarkoittaa samankaltaisuutta, että jotain ominaisuuksia säilyy samana. Invariantti on työkalu, jolla topologinen ongelma voidaan pukea algebralliseen muotoon. Tällöin tutkitaan solmujen erilaisuutta tietyn ominaisuuden suhteen. Invariantilla voidaan siis todistaa, että kaksi solmua ***eivät*** ole samat. Tällöin invarianssi antaa eri solmuille eri arvot. Ideaalissa tapauksessa jokaiselle solmulle on täsmälleen tietty oma invarianssiarvonsa – käytännössä näin ei kuitenkaan ole, vaan mikään tähänastinen solmuinvarianssi ei ole täydellinen. Käytännön kannalta on hyödyllistä, jos invariantti on suhteellisen yksinkertainen laskea – ja ehkäpä tietokoneen ymmärtämäksi algoritmiksikin muotoiltavissa. Yksinkertaisuuden sekä täsmällisyyden vaatimusten yhteen sovittaminen on tosin solmujen kanssa perin hankalaa. [1, s. 66–67, s. 98] [2, s. 110] [12a]

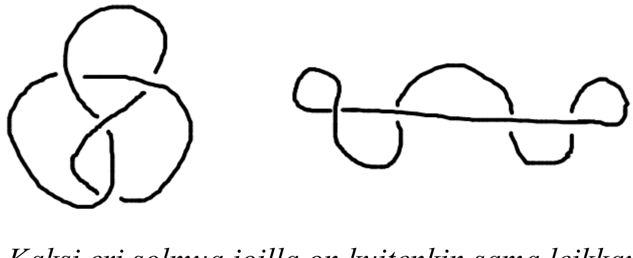
Kahden solmun todistaminen eri solmuksi sopivan invarianssin avulla on periaatteessa paljon helpompaa kuin solmujen todistaminen samaksi. Sama solmuhan voi olla eri tavoin avaruudessa kiertynyt (ks. 4.1). Myös saman solmun diagrammi voi olla erilainen solmua eri kulmasta katseltaessa! Ainut täydellinen invarianssi tällä matematiikan tietämyksellä on solmu itse. Invariantteja voidaan tietenkin käyttää myös linkkien tutkimiseen siinä missä solmujen. [2, s. 110]

5.1. Leikkauslukuinvariantti

Solmuja voidaan luokitella esimerkiksi niiden ylimenokohtien lukumäärän avulla. Leikkausluku tarkoittaa solmun lankojen risteyskohtien lukumäärää. Triviaalilla solmulla ei ole ratkaistuna enää yhtään leikkauskohtaa, kun taas apilasolmun leikkausluku on kolme. Mutta mistä tiedämme, ettei solmu, jonka leikkausluku on vaikkapa 12, ole vain itseensä kiertynyt triviaali solmu? Solmun leikkauslukuahan voidaan Reidemeisterin liikkeillä Ω_1 ja Ω_2 helposti vaihdella! [1, s. 67]

Näinpä meidän tulisi ensin ratkaista solmu mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon, jo ennen diagrammin leikkausluvun avulla luokittelua. Diagrammin leikkausluku ei sellaisenaan ole invariantti, vaan tarkastelemme leikkausluvun *minimiä* puhuttaessa leikkauslukuinvariantista. Myös kuten solmutaulukosta (ks. Liite 2) voimme nähdä, esimerkiksi leikkausluvulla 5 on olemassa kaksi aidosti erilaista alkeissolmua! Leikkausluku ei myöskään huomioi solmujen peilikuvia, jotka se katsoo samaksi solmuksi. Leikkausluku-invariantti on kelvollinen perustyöväline solmujen luokitteluun, mutta ei kovinkaan tarkka. [1, s. 67]

Käytännössä leikkauslukuinvariantti on usein vaikea laskea, koska se edellyttää solmun avaamista. Näinpä leikkauslukuun liittyy toinen solmuteorian merkittävistä ratkaisemattomista ongelmista: yleispätevän algoritmin löytäminen solmun avaamiseksi. Jos sellainen löytyisi, leikkauslukuinvarianssi olisi jo tehokkaampi työkalu erottamaan eri diagrammit. [1, s. 108]



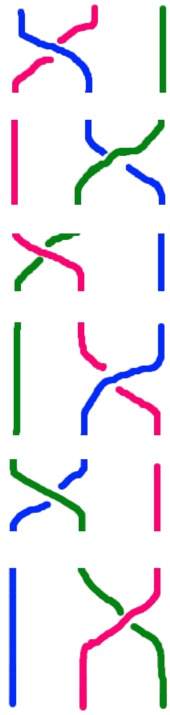
Kuva 6: Kaksi eri solmua joilla on kuitenkin sama leikkausluku: 4. Vasemmalla kasisolmu, joka on alkeissolmu, sekä kierteille mennyt triviaali solmu eli tavallinen kehä.

5.2. Palmikot

”Kaikki solmut voidaan esittää palmikoiden sulkeumina”

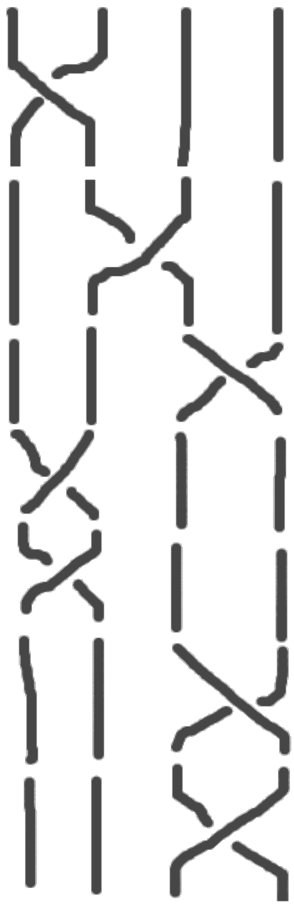
- Alexanderin lause
  James Waddel Alexander, 1923, [1 s. 29]

Palmikoita ovat pullapitko, hiusten letitys, köyden punominen ja niin edelleen. Palmikon voidaan ajatella syntyvän, kun kiinnitetään ”kattoon” tietty määrä koukkuja ja jokaiseen koukkuun ripustetaan lanka roikkumaan siitä alaspäin. Roikkuvia lankoja voidaan kietoa toisiinsa halutulla tavalla ja lopuksi naulata lankojen alapäät ”lattiaan” koukkujen alapuolelle. [1, s. 27] Emil Artin kehitti palmikkoteoriaa algebrallisen topologian osana jo 1927. [10b]



Kuva 7: palmikointi-ohje, jota toistamalla saa palmikoitua kolmen säikeen hiuspalmikon. Palmikkosanana AbAbAb.

Palmikoista saadaan algebrallinen ryhmä, kun määritellään laskutoimitukseksi palmikoiden kertolasku siten, että se on kahden palmikon liittäminen perätysten. Ensimmäisen palmikon ”lattia” liitetään toisen ”kattoon” ja ”välipohja” häivytetään pois. Näin määritellyn palmikkokertolaskun neutraalialkiona toimii triviaali palmikko, jonka kaikki langat ovat suoria. Triviaalissa palmikossa ei siis ole risteäviä lankoja. Triviaalilla palmikolla kertominen pitää palmikon topologisesti muuttumattomana, kuten algebrallisen neutraalialkion kuuluukin. Palmikkokertolasku on assosiatiivinen laskutoimitus. [5]



Kuva 8: AbCaaCc -palmikkosanaa kuvaava palmikko, jonka käänteis-palmikko on CcAAcBa.

Ryhmän vaatimukset täyttyvät, sillä joka palmikolla on olemassa *käänteispalmikko*, jolla kertomalla kertolaskun tulona saadaan triviaali palmikko; palmikkoryhmän neutraalialkio. Käänteispalmikon muodostaminen ei ole vaikeaa: tehdään palmikosta peilikuva alhaalta päin. Tällöin palmikot yhdistäessä leikkauskohdat purkavat toisensa yksi kerrallaan. [1, s. 37–39] [5].

Palmikoiden ryhmäominaisuus johtaa siis siihen, että palmikoita pystytään käsittelemään abstraktisti ja kykenemme merkitsemään palmikon informaation kirjaimin *alkeispalmikoiden* avulla. Alkeispalmikko pitää sisällään pelkästään yhden lankojen leikkauskohdan: vasen lanka menee oikean yli tai toisin päin, sekä monennetko nämä tietyt risteävät langat ovat. Muut langat pysyvät alkeispalmikossa suorina, risteämättöminä. Niinpä esimerkiksi kolmen langan palmikossa on neljä erilaista alkeispalmikkoa ja yleisesti alkeispalmikoita on $2 \cdot (n-1)$, missä n on lankojen lukumäärä. Näin voimme merkitä palmikon kirjainten kertolaskuna ja palmikko voidaan koodata *palmikkosanaksi*!

Esimerkiksi käänteispalmikossa ideana on, että jokainen alkeispalmikko muodostaa käänteisen ylimenokohdan, joka purkaa leikkauskohdan (vrt. Ω_2, 4.1). Esimerkiksi kuva 8:ssa palmikon lopussa peräkkäiset palmikot Cc kumoavat, purkavat toisensa suoriksi, risteämättömiksi langoiksi. Alkeispalmikko C:n käänteispalmikko on alkeispalmikko c. Palmikkosanalla AbbbCaCcB on sekä vasen että oikea käänteisalkio, joka on bCcAcBBBa.

Palmikon koodausta voikin verrata vaikkapa DNA-molekyylin sisältämään koodiin. [1, s. 39] Alkeispalmikoiden avulla palmikoita on helppo operoida myös tietoteknisillä algoritmeilla. Valitettavasti tämä toteamus ja Alexanderin lausekaan eivät kuitenkaan osaa sanoa, onko myös solmujen algoritminen luokittelu mahdollinen. [1, s. 42] On hyvä huomata, että palmikkoryhmä ei ole kommutatiivinen ryhmä. [1, s.38]

Solmujen luokittelu on vaikeampaa kuin palmikoiden, koska solmuista ei saada muodostettua algebrallista ryhmää. Kun laskutoimitukseksi solmujen joukolle määritellään solmukertolasku; solmujen perätysten liittäminen, saadaan siitä assosiatiivinen – jopa kommutatiivinen – laskutoimitus. Solmuryhmää muodostaessa solmuilla löytyy myös neutraalialkio: triviaali solmu. [1, s. 52–54] Mutta harmiksemme ryhmän tekeminen kaatuu siihen, että kaikille solmuille ei ole olemassa käänteissolmua. Solmujen joukossa pätee jopa vahva ominaisuus: *millään epätriviaalilla solmulla ei ole käänteissolmua*. [1, s.56]

Niin kutsutun Vogelin algoritmin avulla saadaan mikä tahansa solmu rullattua sopivasti siten, että siitä saadaan muodostettua palmikko. Algoritmin itsensä määritelmä on hankala ja tarkempi kuvaus algoritmistä löytyy viitteistä. [1, s. 31–37] Siltikään palmikot eivät tuo lopullista ratkaisua luokitteluongelmaan – palmikot ja solmut yhdistävän sopivan sileän homeomorfismikuvauksen löytäminen osoittautuu mahdottomaksi. Näinpä tutkimusongelmamme kannalta eivät palmikot tarjoa ratkaisua solmupelin ratkeavuuteen.

6. Polynomi-invariantit

Mutta entäpä jos aiemmin (ks. 4.2) kolmen henkilön solmupelin apilasolmun ratkaisuyrityksessä heittämmekin yhden käsiparien risteyskohdan alapuoliset kädet yläpuolisiksi käsiksi? Eli siis ”huijaamme” ja välillä irrotamme kädet toisistaan. Ratkeaako solmu nyt, ja mitä tällainen operaatio auttaa meitä?

Polynomi-invarianttia muodostaessa käytetään hyödyksi solmun ylimenokohtien hallittua purkamista ”kirurgisten” leikkaa liimaa -operaatioiden avulla. Tällöin siis käytämme ”laittomia” menetelmiä solmun muokkaamisessa. Mutta nyt pidämme kiinni tekemisistämme, huijaamme hallitusti. Aina yhtä lankojen leikkauskohtaa kerrallaan tutkimalla ja sen purkamalla saamme lopulta muodostettua täsmällisen, yksikäsitteisen polynomi-invariantin solmun diagrammista. [1, s. 62]

6.1. Solmun suunta

M12 Solmun diagrammi on ***suunnattu***, kun sille on valittu kiertosuunta.

Conwayn polynomin laskeminen tarvitsee teoreettisen apuvälineen: solmun suuntauksen. Se kertoo, mihin suuntaan lanka solmussa kulkee. Tällöin solmulle kiertynyt lanka voidaan ajatella nuolena, joka muodostaa solmun ja luettelee sen diagrammin ylimenokohdat tietyssä järjestyksessä. Kiertosuunnan valinnalla ei solmussa sinänsä ole merkitystä, sillä suunta on sopimuskysymys. [1, s. 62]

7. Conwayn polynomit (1973)

7.1. Conwayn vyyhtirelaatio

Conwayn polynomit muodostetaan *Conwayn vyyhtirelaation* ja ylimenokohtien purkuoperaatioiden kautta. Britti John Horton Conway onnistui 1973 liittämään suunnattuun solmuun kolme sääntöä, jotka kytkevät solmuun yhden muuttujan polynomin. Näiden sääntöjen kautta keskenään ekvivalenteilla solmuilla on sama polynomi-invariantti, mutta epäekvivalenttien solmujen polynomit yleensä eivät ole samat. [1, s. 67]

(i) *Invarianssi.* Saman solmun kaksi isotooppista esitystä tuottavat saman polynomin

$N \sim N' \Rightarrow \nabla(N) = \nabla(N')$

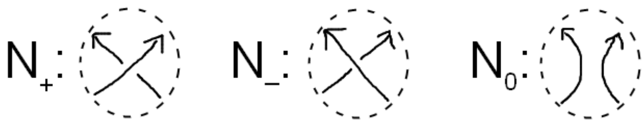
(ii) *Normalisaatio*. Triviaalin solmun polynomi on 1.

$\nabla(O) = 1$

(iii) *Conwayn vyyhtirelaatio*

$\nabla(N_+) - \nabla(N_-) = x \cdot \nabla(N_0)$, missä

N_+ , N_- ja N_0 tarkoittavat kolmea diagrammia, jotka ovat samanlaisia, identtisiä muualla paitsi yhden ylimenokohdan ympäristössä. [1, s. 68]



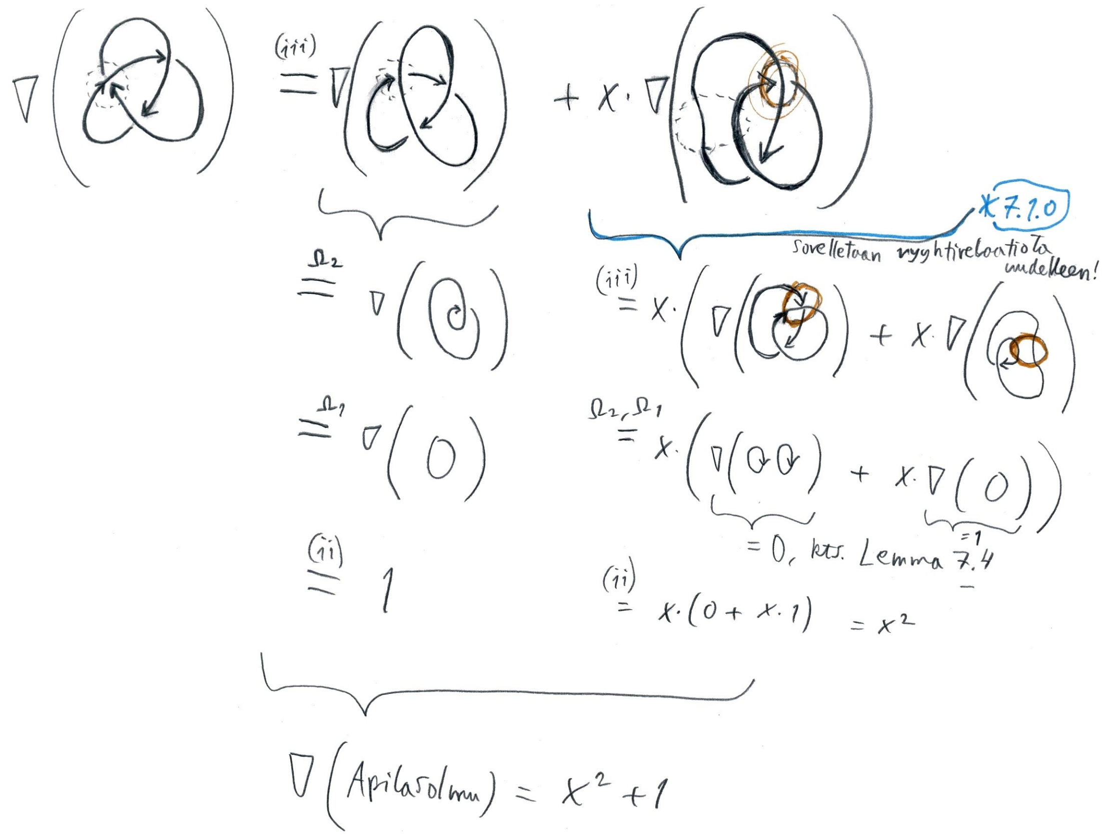
Kuva 9: Conwayn vyyhtirelaation ylimenokohtien purkamisoperaatiot

Näistä kolmesta kohdasta itse *vyyhtirelaatio* (*iii*) antaa meille työkalun mitä täytyy tehdä Conwayn polynomin muodostamiseksi. Se antaa ohjeen, miten diagrammista saadaan purettua ylimenokohdat. Lopulta leikkauskohtien purkaminen palautuu *normalisaatioon*; triviaalin solmun Conwayn polynomin laskemiseen (*ii*). Normalisaation tärkeä oletus on, että triviaalin solmun, kehän polynomi on 1. [1, s. 67, s. 70]

Invarianssi (i) on Conwayn todistama lause, joka takaa, että saman solmuluokan *kaikki* edustajat tuottavat saman polynomi-invariantin. Sana *kaikki* on nyt merkityksellinen – se tarkoittaa, että solmussa voi olla miten monta tahansa ”turhaa” väännöstä, käännöstä tai muuta Reidemeisterin liikettä. Näinpä leikkauslukuinvarianssista poiketen Conwayn polynomia laskettaessa solmun leikkausluvun ***ei*** tarvitse olla minimissään! Solmussa ja sen diagrammissa voi olla turhia kierteitä ja tästäkin ”hämäyksestä” huolimatta saman ekvivalenssiluokan kierteinen solmu saa saman polynomin! [1, s. 67, s. 70]

Solmun suuntaa tarvitaan N_0-tapauksessa, koska ilman suuntausta lankojen kulkusuunta ei ole yksikäsitteinen. Solmun suunta on tekninen apuväline – pelkästä narusta tai langasta ei oikeasti voi päätellä, mihin suuntaan se on mennyt. Jos solmu ei ole suunnattu – tai sitä ei huomata suunnata – ja kirurgisia leikkaa liimaa -operaatioita tehdään ylimenokohdille ”sattumanvaraisesti”, voidaan samalle solmulle saada usea eri polynomi. Mutta tämä olisi ristiriidassa invarianssin *(i)* kanssa, sillä *(i)*:n perusteella sama solmu tuottaa aina saman Conwayn polynomin. [1, s. 62]

7.2. Esimerkki: Apilasolmun Conwayn polynomien laskeminen

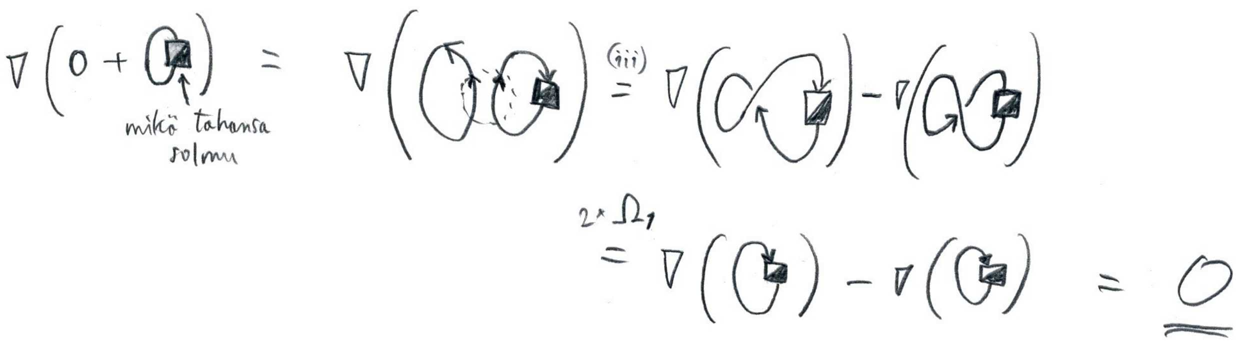


Triviaalin solmun Conway-polynomi on 1, kun taas apilasolmun Conwayn polynomi on x^2+1 . Näin *Invarianssin* perusteella (s.12 *(i)*) solmut eivät ole keskenään isotooppisia; ne todella ovat eri solmut! Kehästä ei saa millään muunnoksella eli Reidemeisterin liikkeiden yhdistelyllä tehtyä apilasolmua! Conwayn polynomit tarjoavat perustelun tutkimusongelmaamme: apilasolmua ei voi avata triviaaliksi solmuksi, koska $x^2+1\neq 1$.

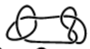
7.3. Lemma

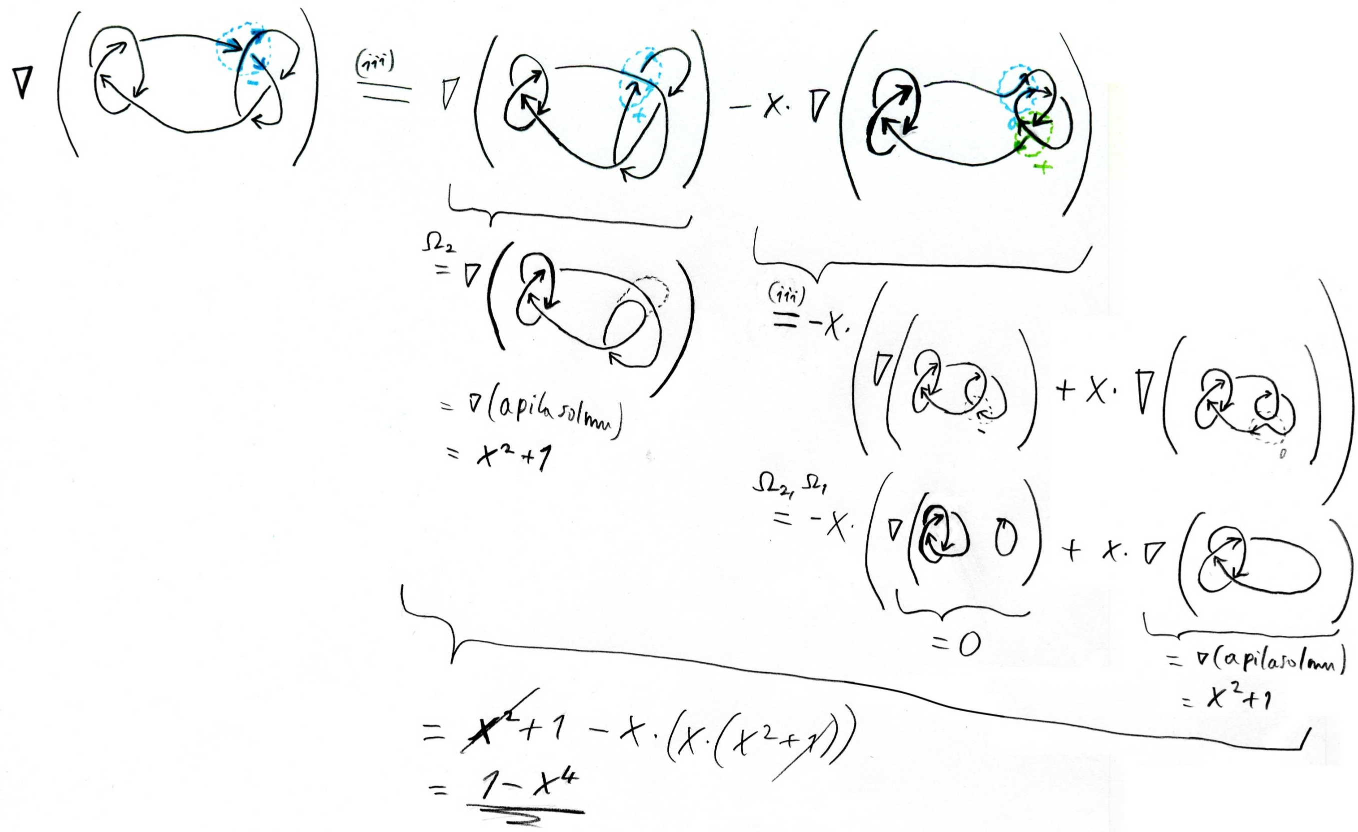
Kehän sekä minkä tahansa solmun toisiinsa kietoutumattoman linkin Conwayn polynomi on nolla.

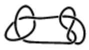
Todistus:



7.4. Conwayn polynomit solmuinvariantteina

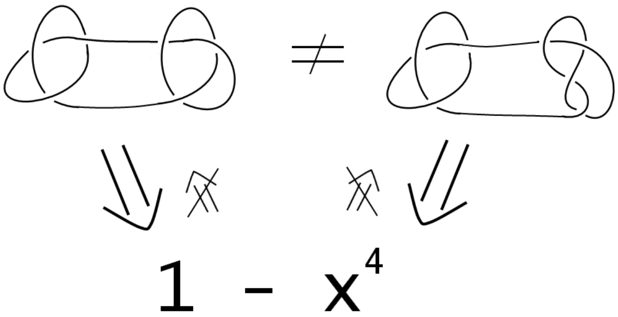
Voidaan osoittaa, että apila- ja kasisolmun yhdiste  saa Conwayn polynomikseen $1-x^4$. Lasketaan myös kaksinkertaiselle apilasolmulle  Conway-polynomi:



Mutta onko tulos väärä? Nythän sekä  että  molemmat saavat saman Conwayn polynomi-invariantin: $1-x^4$. Onko kyseessä laskuvirhe, vai missä on vika?

Itse asiassa virhettä ei ole. Conwayn polynomit eivät vain ole täydellisen tarkka invarianssi – ne eivät kykene erottomaan apila–apila- ja apila–kahdeksikko-alkeissolmujen yhdistesolmuja toisistaan. Erottelukyky ei riitä, vaikka solmuilla on eri minimaaliset leikkausluvut: kuusi ja seitsemän. Solmut saavat silti saman Conwayn polynomin: $1-x^4$.

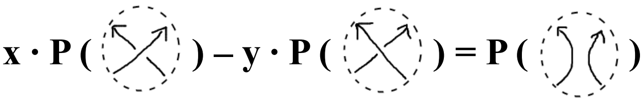
Niinpä tästä voidaan päätellä, että Conwayn polynomeilla voidaan varmasti todeta kaksi solmua eri solmuiksi, kun polynomit ovat erilaiset. Mutta Conwayn polynomien perusteella ei voida olla täysin varmoja, ovatko saman polynomin tuottaneet diagrammit varmasti sama solmu, eikä edes, ovatko saman polynomin tuottaneet solmut keskenään isotooppisia. [1, s. 70–71]



Myös riittävän – tai liian – monimutkaisille alkeissolmuilla löytyy solmut, jotka saavat saman Conwayn polynomin invariantikseen. [15b]

8. HOMFLY-polynomit (1985)

Conwayn polynomit eivät kykene erottamaan kaikkia solmuja toisistaan. Näinpä solmujen luokittelun työkalu ei ole vieläkään aukoton. Polynomi-invarianttien avulla solmujen luokittelua kehitettiin eteenpäin. Kuuden tiedemiehen 1985 kehittelemä, hieman tarkempi HOMFLY-polynomi-invarianssi eroaa Comwayn polynomista siinä, että HOMFLY-polynomeilla on kaksi muuttujaa. Conwayn polynomien määrittelemät (i) ja (ii) (ks. 7.1.) ovat voimassa, mutta vyyhtirelaatio saa HOMFLY-polynomilla P(x,y) muodon



[1, s. 72]

9. Jonesin polynomit (1987)

Hyödyllisiksi ja tarkemmaksi polynomi-invarianssiksi on osoittautunut uusiseelantilaisen Vaughan Jonesin kehittelemä ja amerikkalainen Louis Kaufmanin popularisoimat Jonesin polynomit (Jones 1985, Kauffman 1987). Ne kykenevät jo muun muassa erottamaan apilasolmun oikea- ja vasenkätiset versiot toisistaan. Apilasolmulle saadaan Jonesin polynomiksi joko $q^{-1}+q^{-3}-q^{-4}$ tai $q+q^{3}-q^{4}$ kätisyydestä riippuen. [1, s. 73, s. 83-85]

Jonesin polynomit poikkeavat Conwayn ja HOMFLY-polynomeista siinä, ettei niiden laskeminen vaadi diagrammin suuntaamista. Näin Jonesin polynomien laskussa käytettävät ylimenokohtien purkuoperaatiot ovat hieman erilaiset. [1, s. 76–78]
Jonesin polynomien ominaisuuksien erikoistapauksena saadaan, että Conwayn polynomien perusominaisuudet 7.1. pätevät myös Jonesin polynomeille: Niille pätevät siis Conwayn vyyhtirelaatio (iii) sekä invarianssi (i). [1, s. 83]

Tunnetuilla polynomi-invarianteilla kykenemme usein todistamaan kaksi solmua eri solmuiksi, mutta emme voi olla varmoja ovatko solmut täysin samat. Siihen ei polynomi-invarianttiemme erotuskyky vielä riitä kaikkien solmujen kanssa. Yleispätevän ja täsmällisen algoritmin etsiminen solmujen vertailemiseen jatkuu edelleen. [1, s. 70–72, s. 85, s.108]

Kuva 10: Apilasolmu kolmella henkilöllä muodostettuna.

10. Ratkeaako solmupeli aina?

Hämmästyttävää kyllä, kuten jo edellä kohdassa 4.2 totesimme, jo kolme ihmistä kykenee muodostamaan solmun, joka ei aukea. Ihmisten laittaessa sopivaa matemaattisen ovelaa säännönmukaisuutta toistaen kätensä muodostuu apilasolmu. Apilasolmu on täysin oma solmu, eikä se ole isotooppinen kehän kanssa. Apilasolmusta ei saa kehää millään Reidemeisterin liikkeellä. Tämä ihmissolmu ei ratkea.

Tietyn säännönmukaisuuden avulla muodostetusta kolmen hengen apilasolmussa aikuiset yleensä uskovat suhteellisen nopeasti, ettei solmu ole palautettavissa kehäksi. Toisinaan lasten kanssa tämän kokeilemiseen menee enemmän aikaa, ja he yrittävät kokeilemalla selvittää, palauttaisiko jokin liike, käden alta meno tai käännös solmun kehäksi. On käyttäytymistieteiden vuoro selittää, pelkäävätkö aikuiset nolostumista, ymmärtävätkö he nopeammin ettei ratkaisua ole, haluavatko lapset leikkiä vielä asian kanssa vai vain miettiä asiaa pitemmälle...

Oma tutkimuskysymyksensä on myös, mistä syystä joillain kolmen hengen ryhmillä muodostettu apilasolmu ratkeaa hämmästyttävän nopeasti...

11. Solmupeliä ja solmuteoriaa

Solmupelin luonne on enemmän ryhmäyttävä, ja ihmisryhmät soveltavat mieluummin pääosin arvataan ja kokeillaan -ratkaisumenetelmää kuin pitäisivät ongelmaa luonteeltaan älyllisenä ja pohdintana tehokkaasta algoritmista. Pelissä voidaan siis nähdä muun muassa ratkaisu- ja menetelmäsuuntautuneisuudessa eroja ihmisryhmien välillä.

Kuinka todennäköistä on, että pelissä muodostuu neljä tai yli neljä leikkauskohtaa sisältävä ei-triviaali alkeissolmu? Riittävän monen, sanotaan vaikkapa 16 osallistujan pelissä. Omien, tosin suhteellisen pienen otoksen havaintojen perusteella solmupeli yleensä ratkeaa. Sangen yleistä on myös muodostua triviaaleja kehiä linkkeinä tai kokonaan toisistaan erillisinä ihmiskehinä. Ei-triviaalin solmun muodostuminen on oikeastaan perin harvinaista omakohtaisen havaintomateriaalin perusteella!

Solmut ovat matematiikan uutta aluetta, suuremman kiinnostuksensa 1900-luvulla saanut matematiikan haara. Sen monet menetelmät ovat vielä tuoreita, eikä solmuteorian klassiseen ongelmaan eli solmujen luokitteluun ja kahden solmun vertailuun ole vielä löydetty aukotonta keinoa. Toinen suuri solmuteoreettinen ongelma, solmun avaamisen algoritmi odottaa niin ikään ratkaisua. Solmujen tutkimuksessa riittää vielä pohdittavaa, samoin solmupeliin algoritmisen, aina toimivan ratkaisun etsimisessä. Tämä tutkimusongelma on vasta solmuteoriaa raapaiseva.

Jatkokysymyksiä tuleville tutkimuksille voisi olla, millä todennäköisyydellä pelin alussa syntyy ratkaisematon solmu? Entä millä todennäköisyydellä solmu on yhtenäinen? Miten solmun muodostustapa vaikuttaa millaisia solmuja syntyy? Ovatko tietynlaiset solmut yleisempiä kuin toiset? Entäpä milloin kehän kanssa isotooppinen ihmissolmu – eli sekaisin mennyt triviaali solmu – on mahdollista ratkaista reaalimaailmassa, reaalimaailman rajoitukset sisältävässä tilanteessa? Toisin sanoen, milloin tulevat ihmisten fysiologiset rajoitukset vastaan kovin tiukasti sidotun solmun tapauksessa? Tietysti tällaiset tutkimuskysymykset ovat enemmänkin tilastotieteellistä tai fysiologista tutkimusta kuin matemaattista.

12. Matematiikan vinkit Solmupeliin

Matematiikan solmujen tuntemus kykenee antamaan muutaman käytännön sovelluksen ja neuvon solmupeliin.

intuitio → jos solmut ovat erilaiset → todista solmut eriksi esimerkiksi polynomi-invarianteilla
→ jos solmut ovat samat → Reidemeisterin liikkeillä ne saadaan muokattua samoiksi

12.1. Ylimenokohtien vähentäminen eli leikkausluvun pienentäminen auttaa kohti ratkaisua

Ylimenokohtien vähentäminen saa solmun yleensä kohti sen yksinkertaisinta muotoa. Tällöin solmu ei ole turhaan ”kiertynyt” itsensä ympäri tehden ylimääräisiä silmukoita. Kokoajan leikkausluvun pieneneminen vie solmua kohti kehää – jos solmu ylipäätänsä on kehä. [1, s. 48–49]

Tosin ei aina. On olemassa solmuja, joiden ylimenokohtia on lisättävä, jotta solmu yksinkertaistuisi. Väärästä kohtaa aloitettu kierteisyyden poisto johtaa umpikujaan, ennen kuin solmu on mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa. [1, s. 49, kuva 4] [12b]

12.2. Solmu ei aina ratkea

Jos ihmissolmu ei ole isotooppinen triviaalin solmun kanssa, ei solmupelillä ole ratkaisua. Tällöin sopivan invarianssin avulla voidaan yleensä, mutta ei vielä aina todistaa solmu ei-isotooppiseksi kehän kanssa. [1, s.70]

Erityisesti lasten kanssa toimiessa saadaan aina ratkaistavissa oleva solmu, kun osallistujat muodostavat solmun menemällä aluksi kehään ja sitten sekoittamalla triviaalin solmun sallituin Reidemeisterin liikkein. Tällöin solmu on edelleen isotooppinen kehän kanssa, ja solmupelillä on ratkaisu. Kaksi lasta voidaan erikseen ottaa ”ratkaisijoiksi”, ja kun muut sekoittavat triviaalin ihmissolmun, ratkaisijat voivat odottaa näköesteen takana, kunnes saavat tulla aukaisemaan solmun.

12.3. Ratkeamattomuuden todistaminen: ylimenokohdan vaihtaminen alimenokohdaksi

Jos yhden käsien ylimenokohdan vaihtaminen alimenokohdaksi saa yksinkertaisimmassa muodossaan olevan solmun ratkeamaan, ei alkuperäinen solmu olisi ollut ratkeava. Toisin sanoen alkuperäinen solmu ei ollut isotooppinen kehän kanssa. [1, s. 62] [13: Reidemeister's Theorem]

Lähteet

Kirjallisuuslähteet

[1]
Alexei Sossinsky: Solmut – Erään matemaattisen teorian synty
Suomeksi toimittanut Osmo Pekonen
Art House, Jyväskylä 2002

[2]
Richard H. Crowell, Ralph H. Fox: Introduction to Knot Theory
Springer-Verlag, 1963

[5]
MATA220 Algebra -luentokurssin muistiinpanot, kevät 2011
MATA 130 Euklidiset avaruudet muistiinpanot, kevät 2008
MATA140 Johdatus diskreettiin matematiikkaan, kesä 2007

Nettilähteet

[10]
The KnotPlot Site
http://knotplot.com/
luettu 31.5.2011
[10a] http://knotplot.com/knot-theory/
[10b] http://knotplot.com/knot-theory/braids.html

[11]
Robert Glenn Scharein: Interactive Topological Drawing
A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy
Department of Computer Science, The University of British Columbia, March 1998
http://www.knotplot.com/thesis/thesis_letter.pdf
luettu 31.5.2011

[12]
Tie me up, tie me down: Invariants: Unknotting number
The Chinese University of Hong Kong, Department of Mathematics
[12a] http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/invariants.html
[12b] http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/crossing.html
luettu 31.5.2011

[13]
First Week of Knot Theory in MasterMath Course on Quantum Groups and Knot Theory
Arjeh Cohen
http://www.mathadore.nl/mathadore/knots/old/les1.md
luettu 5.12.2011

[14]
http://newweb.cecm.sfu.ca/cgi-bin/KnotPlot/objtest/getknot
luettu 31.5.2011
kts myös: http://www.knotplot.com/models/

[15]
The Knot Atlas -wiki, Hosted by University of Toronto
http://katlas.org / http://katlas.math.toronto.edu
[15a] http://katlas.org/wiki/The_Alexander-Conway_Polynomial
[15b] http://katlas.org/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table
luettu 16.12.2011

Kuvalähteet

Kuva 1: Lauri Kahanpää, toukokuu 2011
Kuvat 4, 5, 10: Ville Arvio, tammikuu 2012

Lisälukemisto

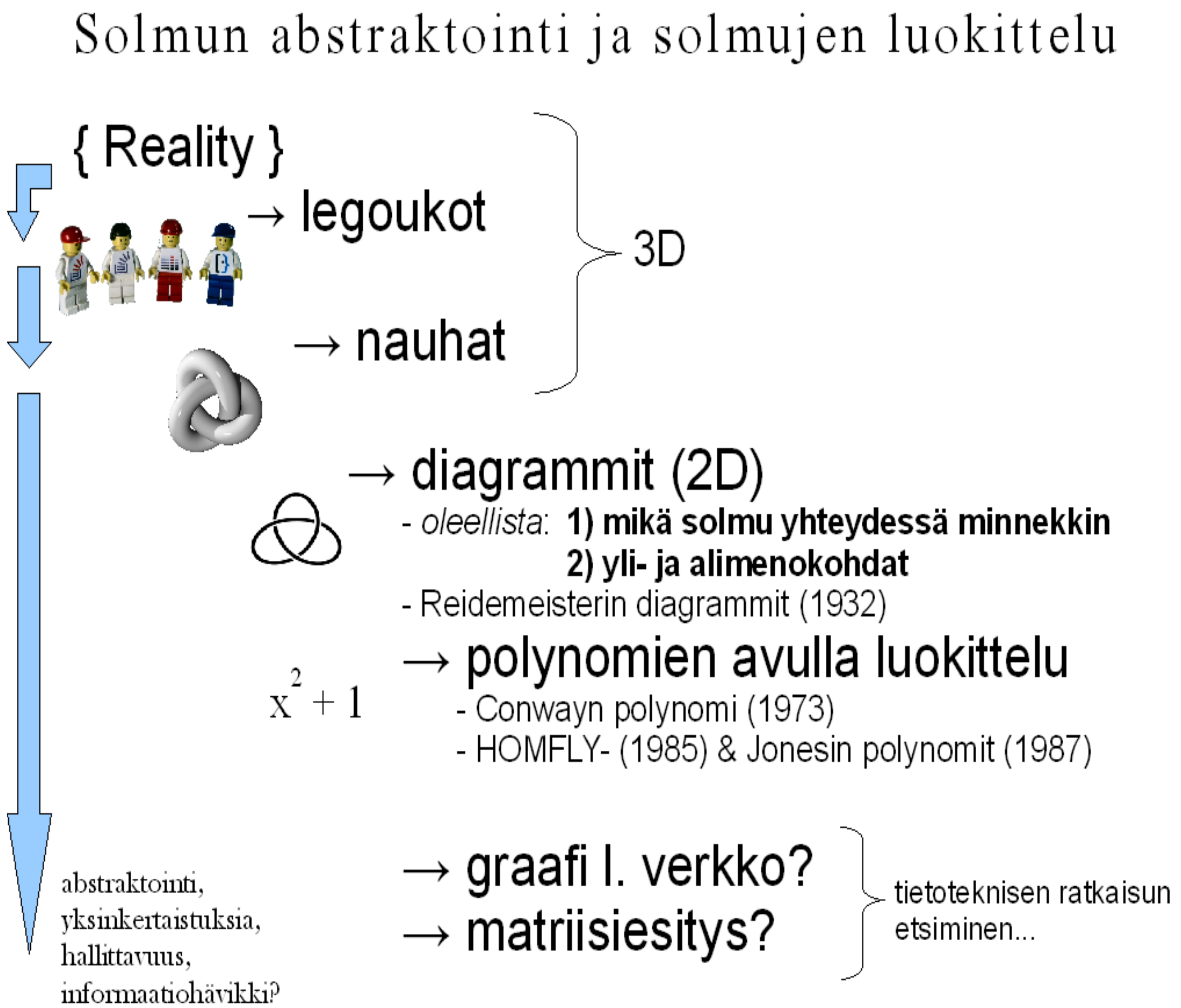
http://www.knotplot.com/thesis/fav7.pdf
- Hirviömäisen triviaalin solmun avaaminen ja osoittaminen Reidemeisterin liikkein, että solmu tosiaan on kehä

http://www.youtube.com/watch?v=Y1X6EiKTX18
- video kiertyneen triviaalin solmun purkamisesta

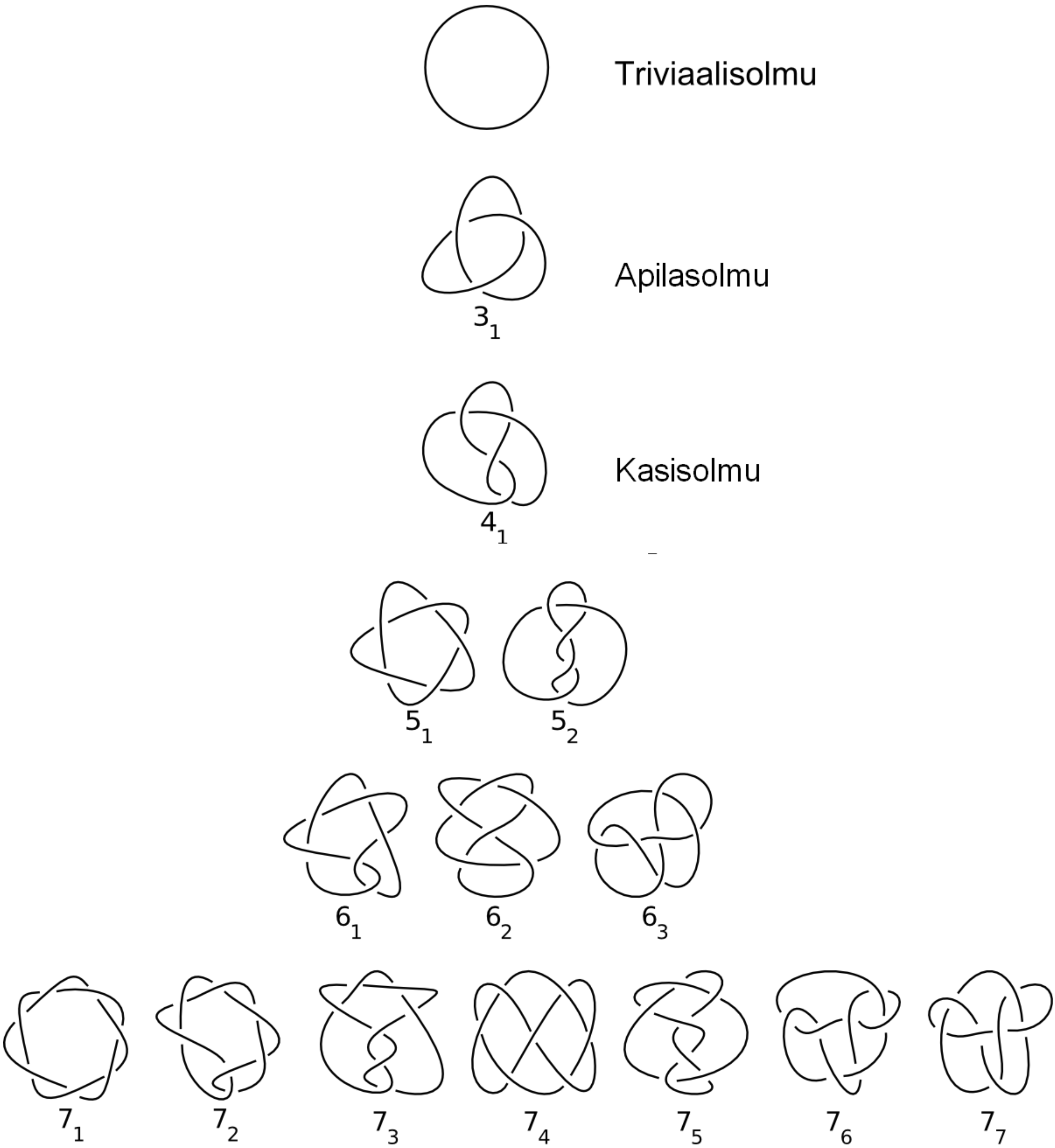
http://www.math.cuhk.edu.hk/publect/lecture4/invariants.html
- Erilaisia tapoja luokitella solmuja

http://www.knotplot.com/zoo/
- Alkeissolmuja ja -linkkejä

Liite 1 Tutkimusongelman abstrahointi solmupelistä polynomi-invariantteihin

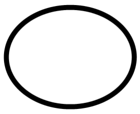
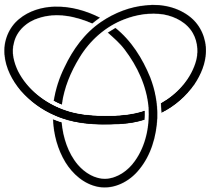
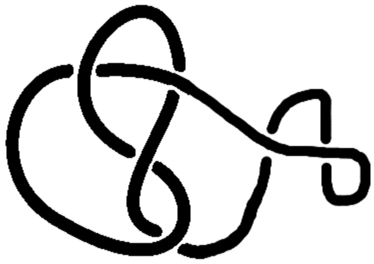


Liite 2 Solmutaulukko leikkauslukuun seitsemän saakka



Lähde: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/12/Knot_table.svg
(kuvaa muokattu kirjoittajan toimesta lisäämällä solmujen nimiä ja vaihtamalla järjestystä)

Liite 3 Solmujen invariantteja

Solmu:	**Triviaali solmu**, 0_1	**Apilasolmu**, 3_1	**Kasisolmu**, 4_1	**Kierteinen kasisolmu**
Solmun diagrammi:				
Leikkausluku:	0	3	4	6
Conwayn polynomi:	1	$1+x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$
HOMFLY-polynomi:	1	$-a^4+z^2a^2+2a^2$	$a^2-z^2-1+a^{-2}$	$a^2-z^2-1+a^{-2}$
Jonesin polynomi:	1	$q^{-1}+q^{-3}-q^{-4}$ tai $q+q^3-q^4$ kätisyydestä riippuen (tässä apilasolmu on oikeakätinen ja polynomi on $q+q^3-q^4$)	$q^2-q+1-q^{-1}\mp q^{-2}$	$q^2-q+1-q^{-1}\mp q^{-2}$

lähde: [15b], [1, s. 83]

Liite 4 Solmut suhteessa palmikoihin

PALMIKOT

- varustettuna palmikkokertolaskulla
- assosiatiivinen
  ts. $a \# (b \# c) = (a \# b) \# c$
- $\exists$ neutraalialkio
- $\exists$ käänteisalkio
  $\longrightarrow$ algebrallinen ryhmä
- kun $n>2$, ryhmä on epäkommutatiivinen
- alkeispalmikot
- palmikkosanat

SOLMUT

- varustettuna solmukertolaskulla
- assosiatiivinen
- $\exists$ neutraalialkio
- $\nexists$ käänteisalkiota
- on kommutatiivinen
  ts. $a \# b = b \# a$
- alkeissolmut

Solmujen ja palmikoiden välillä on yhteys: jokaisesta solmusta voidaan muodostaa palmikko – ja päinvastoin. Silti palmikoiden ja solmujen lanka-aritmetiikat on erilaisia. Niiden rakenne on jopa niin perustavaa laatua erilainen, että homeomorfista kuvausta solmujen ja palmikoiden välille ei yleisesti saada muodostettua.

Palmikkoon voidaan liittää alkeispalmikko, yksi pieni palmikon osa, mutta alkeispalmikon lisäämiselle ei löydy suoraa vastinetta solmusta, ainakaan tämä operaatio useasti toistaen. Alkeissolmut ovat rakenteeltaan erilaisia verrattuna alkeispalmikkoon: Alkeissolmu voidaan kuvitella liitettävän sen *ainoan* langan päähän. Alkeispalmikko taas liitetään palmikon *kaikkien* nauhojen päähän – siis usean langan päähän. Tämä on merkittävä ero solmu- ja palmikkoaritmetiikan rakenteessa.

Allegoriana solmujen ja palmikoiden välisen yhteyden määrittelyä ja säilymistä voidaan verrata funktion jatkuvuuteen: yksittäisissä pisteissä yhteys saattaa onnistua, mutta sen yleisemmin jatkuvuuden säilymistä ei löydetä millekään yhtenäiselle joukolle.