FYSA2042 osa B

Koe 28.04.2023 klo 12:00-16:00 (joillekin 10:00-16:00) .
Tehtäviä on 5 kappaletta.
Viimeisellä sivulla on joukko kaavoja, joista voi olla hyötyä.

Exam 28.04.2023 at 12:00-16:00 (for some 10:00-16:00).
Questions in English are at the end.
There are 5 questions.
The last sheet has a collection of potentially useful formulae.

1. (a) (1p) Mitä Wienin siirtymälaki sanoo?

   (b) (1p) Mitä tarkoitetaan degeneroituneella elektronikaasulla?

   (c) (2p) Bosonien tilatiheys on $g(\epsilon)$, missä ϵ on energia. Bose-Einstein kondensaatio voi tapahtua lämpötilassa T_c, joka saadaan ratkaisemalla yhtälö

   $$N = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta_c \epsilon} - 1} \ , \quad \beta_c := \frac{1}{k_B T_c} \ , \tag{1}$$

   missä N on hiukkasluku. Perustele, miksi kondensaatiolämpötila saadaan yllä annetusta kaavasta.

   (d) (2p) Jos fononien tilatiheys on $g(\omega)$ ja värähtelijöitä on N kappaletta, niin Debyen mallissa Debye taajuuden ω_D määrittelee yhtälö

   $$3N = \int_0^{\omega_D} d\omega g(\omega) \ . \tag{2}$$

   Mistä tällainen ehto johtuu? Mikä on mallissa käytetty hilavärähtelyjen spektri $\epsilon(k)$? Kirjoita kaava, josta tilatiheys $g(\omega)$ voitaisiin lasketaan.

   (e) (2p) Hahmottele ideaalisen bosonikaasun faasidiagrammat (P, V)-tasossa (muutamia isotermejä), sekä (P, T)-tasossa (alueet tai muutamia isokooreja) .

   (f) (2p) Boltzmannin kuljetusteoriassa ratkaistaan faasiavaruuden tiheyttä $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Miten f:stä voi laskea monellako hiukkasella on liikemäärä välillä $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}]$? Jos kolmiulotteisessa systeemissä on N hiukkasta, niin hiukkasten paikkoja on $3N$ ja liikemääriä $3N$. Montako muuttujaa $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$:ssä on?

2. Suuren potentiaalin $\Omega(T, V, \mu)$ differentiaali on

   $$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \ . \tag{3}$$

   (a) (3p) Osoita, että homogeenisessa systeemissä $\Omega = -PV$.
   Vihje: Jos systeemin koko muuttuu λ-kertaiseksi, niin homogeenisen systeemin suuri potentiaali muuttuu λ-kertaiseksi. Kirjoita skaalausehto, derivoi se λ:n suhteen ja aseta lopuksi $\lambda = 1$.

   (b) (2p) Fononien ja fotonien hiukkasluku ei säily. Mikä niiden kemiallinen potentiaali on ja miksi?

(c) (4p) Osoita, että suurkanonisessa joukossa hiukkasluvun varianssi on

$$\sigma_N^2 := \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{V,T} . \tag{4}$$

Vihje: $\langle N \rangle = \sum_i p_i N_i$, missä $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$ ja $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$.

3. Einstein osoitti, että Brownin liikkeessä nesteen seassa olevien siitepölyhiukkasten tiheys $n(x,t)$ noudattaa diffuusioyhtälöä (1D tapaus)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} . \tag{5}$$

(a) (4p) Tarkastellaan siitepölyhiukkasten liikettä ajan t verran. Sovitaan, että hetkellä $t = 0$ kunkin hiukkasen paikka on origossa (ts. siirretään radat alkamaan origosta). Osoita, että tiheys

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{6}$$

toteuttaa yllä annetun diffuusioyhtälön (lisäksi alkuehto $n(x,0) = \delta(x)$ on voimassa, mutta tätä ei tarvitse osoittaa).

(b) (4p) Osoita, että edellä annettu tiheys $n(x,t)$ toteuttaa Einstein-Smoluchowski yhtälön

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt . \tag{7}$$

Aputulos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} . \tag{8}$$

(c) (2p) Kuinka paikan neliön odotusarvo $\langle x^2 \rangle$ voidaan mitata?

Mittauksen merkitys on se, että pyöreille hiukkasille, joiden säde on a, nesteessä, jonka viskositeetti on η, pätee

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \frac{k_B T}{3\pi a \eta} t . \tag{9}$$

Mitatusta $\langle x^2 \rangle$ voi laskea tunnettujen makroskooppisten suureiden a ja η avulla Boltzmannin vakio k_B, ja siitä Avogadron luku $N_A = R/k_B$ tunnetun kaasuvakion R avulla.

4. (a) (4p) Osoita, että lämpötilassa $T = 0$ ideaalisen fermionikaasun energia hiukkasta kohti ja paine ovat

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_F \quad , \; P = \frac{2}{5}\frac{N\epsilon_F}{V} . \tag{10}$$

(b) (2p) Miksi fermioneilla on nollasta poikkeava paine myös lämpötilassa $T = 0$?

(c) (4p) Luennoilla johdettiin kaasun viskositeetin kaava

$$\eta = \frac{1}{3} m l n \langle v \rangle , \tag{11}$$

missä kaasuhiukkasten massa on m, keskimääräinen vapaa matka on l, lukumäärätiheys on n ja keskimääräinen vauhti on $\langle v \rangle$; viimeksi mainittu riippuu vain lämpötilasta ja massasta m. Esitä perustelut sille, ettei viskositeetti riipu kaasun tiheydestä.

5. (10p) Elektronin liikettä z-suuntaisessa vakiomagneettikentässä $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ kuvaa Schrödingerin yhtälö

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{r}) = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m}\psi(\mathbf{r}) = \frac{(\hat{p}_x - eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}\psi(\mathbf{r}) = \epsilon\psi(\mathbf{r}) \ , \tag{12}$$

missä liikemääräoperaattorit ovat tavanomaiset $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ ja $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$. Käytä yritettä $\psi(\mathbf{r}) = e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\varphi(y)$, missä p_x ja p_z ovat reaalilukuja, ja johda funktion $\varphi(y)$ yhtälö

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}mw^2(y - y_0)^2\right)\varphi(y) = \left(\epsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi(y) \ , \tag{13}$$

missä

$$w := \frac{eB}{m} \qquad \text{syklotronitaajuus} \tag{14}$$

$$y_0 := \frac{p_x}{eB} \qquad \text{oskillaattorin keskipiste .} \tag{15}$$

Saatu yhtälö kuvaa harmonista oskillaattoria, joten mitkä ovat ratkaisuna saatavat energiatilat ϵ? Miksi makroskooppisella määrällä oskillaattoreita on sama energia, ts. miksi Landaun tasojen degeneraatio on makroskooppinen? Vihje: Missä keskipiste y_0 voi olla?

QUESTIONS IN ENGLISH

1. (a) (1p) What does the Wien displacement law say?

   (b) (1p) What is degenerate electron gas?

   (c) (2p) The boson density of states is $g(\epsilon)$, where ϵ is the energy. If the bosons condense, the Bose-Einstein condensation temperature T_c can be solved from the equation

   $$N = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta_c \epsilon} - 1} \ , \quad \beta_c := \frac{1}{k_B T_c} \ , \tag{16}$$

   where N is the number of particles. Where does this formula come from?

   (d) (2p) If the phonon density of states is $g(\omega)$, then in Debye model

   $$3N = \int_0^{\omega_D} d\omega g(\omega) \ . \tag{17}$$

   Where does this formula come from? What is the spectrum of lattice vibrations $\epsilon(k)$ in this model? Write a formula, where the density of states $g(\omega)$ could be calculated.

   (e) (2p) Draw a schetch of ideal boson gas phase diagrams in (P, V)-plane (a few isotherms), and in (P, T)-plane (general structure or a few isochores).

   (f) (2p) In Boltzmann transport theory the phase space density is $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. How do you get from f the number of particles that has momentum in the range $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}]$? If a three-dimensional system has N particles, then there are $3N$ positions and $3N$ momenta. How many variables are there in $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$?

2. The grand potential $\Omega(T, V, \mu)$ differential is

   $$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu \ . \tag{18}$$

   (a) (3p) If the system size of a homogeneous system is increased by factor λ, then Ω increases by factor λ. Show, that in a homogeneous system $\Omega = -PV$.
   Hint: write down the scaling condition and derive wrt. λ; set $\lambda = 1$ in the end.

   (b) (2p) Phonon ja photon particle number is not conserved. What is theis chemical potential and why?

   (c) (4p) Show, that in the grand canonical ensemble the variance of the particle number is

   $$\sigma_N^2 := \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{V,T} \ . \tag{19}$$

   Hint: $\langle N \rangle = \sum_i p_i N_i$, missä $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$ ja $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$.

3. Einstein showed that in brownian motion the density $n(x, t)$ of pollen in liquid satisfies the diffusion equation (1D case)

   $$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \ . \tag{20}$$

(a) (4p) Let's examine the motion of particles for the duration t, and use the convention, that particles at time $t = 0$ are at the origin (move the trajectories to start from the origin). Show that the density

$$n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{21}$$

satisfies the diffusion equation given above (also the initial condition, $n(x,0) = \delta(x)$, is satisfied, but you don't need to prove it).

(b) (4p) Show that the density $n(x,t)$ given above satisfies the Einstein-Smoluchowski equation

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \ . \tag{22}$$

Help result:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-y^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ . \tag{23}$$

(c) (2p) How can one measure the expectation value $\langle x^2 \rangle$?

The significance of the measurement is that for spherical particles of radius a in liquid with viscosity η have

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt = \frac{k_B T}{3\pi a \eta} t \ . \tag{24}$$

From the measured $\langle x^2 \rangle$, with known macroscopic a and η, one can determine the value of the Boltzmann constant k_B and from that the Avogadro number $N_A = R/k_B$ using the known gas constant R.

4. (a) (4p) show, that at temperature $T = 0$ ideal fermion gas the energy per particle and pressure are

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\epsilon_F \quad , \ P = \frac{2}{5}\frac{N\epsilon_F}{V} \ . \tag{25}$$

(b) (2p) Why do fermions have non-zero pressure even at $T = 0$?

(c) (4p) In the lecture notes we derived the formula for gas viscosity,

$$\eta = \frac{1}{3} m l n \langle v \rangle \ , \tag{26}$$

where the gas particles have mass m, mean free path l, number density n, and mean speed $\langle v \rangle$; the last on depends only on temperature and m. Give an explanation why viscosity is independent of gas density.

5. (10p) Electron motion in a uniform magnetic field in z direction, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, is described by the Schrödinger equation

$$\hat{\mathcal{H}}\psi(\mathbf{r}) = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m}\psi(\mathbf{r}) = \frac{(\hat{p}_x - eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}\psi(\mathbf{r}) = \epsilon\psi(\mathbf{r}) \ , \tag{27}$$

where the momentum operators are the usual $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, and $\hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$. Use the Ansatz $\psi(\mathbf{r}) = e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\varphi(y)$, where p_x and p_z are real numbers, and find the equation for the function $\varphi(y)$,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}mw^2(y - y_0)^2\right)\varphi(y) = \left(\epsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi(y) \ , \tag{28}$$

where

$$w := \frac{eB}{m} \qquad \text{syklotron frequency} \tag{29}$$

$$y_0 := \frac{p_x}{eB} \qquad \text{midpoint of oscillator .} \tag{30}$$

The equation describes a harmonic oscillator, so what are the energy states ϵ? Why a macroskopic number of oscillators have the same energy, that is, why are the Landau levels macroscopically degenerate? Hint: where can y_0 lie?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,1/\mathrm{mol}$

$k_B \times 11600$ K ≈ 1 eV , $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, 1 atm $= 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dU = \delta Q + \delta W \overset{\mathrm{rev}}{=} TdS - PdV$, $dU = TdS - PdV + \mu dN$

$F = U - TS$, $G = U - TS + PV$, $H = U + PV$, $\Omega = U - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} , \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} , \quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} , \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i , \quad p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} , \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i} , \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$

$$\Omega(T,V,\mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z} , \quad p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} , \quad \mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$$

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2} , \quad Z_1(T,V) = V\lambda_T^{-3} , \quad Z_N(T,V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T,V)\right]^N$$

$$PV = Nk_BT = nRT , \quad U = \frac{3}{2} N k_B T , \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$$

$$\langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i) , \quad \frac{\partial \langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F) , \quad \langle n_i \rangle_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} , \quad \langle n_i \rangle_{\mathrm{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$$

$$\Omega_{\mathrm{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i) , \quad \Omega_{\mathrm{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$$

$$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k) , \quad \epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\ (NR) , \quad \epsilon(k) = \hbar c k\ (UR)$$

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} , \quad u(T) = aT^4 , \quad I(T) = \sigma T^4 , \quad a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3} , \quad \sigma = \frac{ac}{4}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1) , \quad \int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} , \quad \zeta(\tfrac{3}{2}) \approx 2.61 , \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} , \quad \zeta(\tfrac{5}{2}) \approx 1.34 , \quad \zeta(3) \approx 1.20 , \quad \zeta(\tfrac{7}{2}) \approx 1.13 , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\Gamma(p+1) = p! , \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) , \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad \int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$$

$$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a} , \quad \int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$$

$$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\bigg|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$$

$$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1 , \quad e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} , \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0) \quad , \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} , \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

If $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ and $f = f_0 + f'$ and $f' \ll f_0$, then$f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$