FYSA2042 osa B

Koe 05.11.2021 klo 12:00-16:00.
Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam 05.11.2021 at 12:00-16:00.
Questions in English are at the end.
There are 5 questions.

1. (a) (1p) Milloin suurkanoninen joukko antaa samat tulokset kuin kanoninen joukko?
   (b) (1p) Milloin klassinen Maxwell-Boltzmann statistiikka on kyllin tarkka identtisten hiukkasten kuvaukseen?
   (c) (1p) Mitä tarkoittaa Bose-Einstein kondensaatio?
   (d) (2p) Hahmottele ideaalisen bosonikaasun faasidiagrammat (P, V)-tasossa (muutamia isotermejä), sekä (P, T)-tasossa.
   (e) (1p) Mitä Wienin siirtymälaki sanoo?
   (f) (2p) Miksi Debyen malli toimii paremmin kuin Einsteinin malli, erityisesti matalissa lämpötiloissa?
   (g) (2p) Mitä Boltzmannin teoriassa kuvaa törmäysintegraali?

2. (a) (2p) Miksi valkoisen kääpiön suurin mahdollinen massa, n. 1,4 auringon massaa, saadaan käyttämällä elektronikaasulle nimenomaan ultrarelativistista energiaspektriä?
   (b) (2p) Kerro lyhyesti, mitä Boltzmannin yhtälön relaksaatioaika-approksimaatio tarkoittaa. Kerro mm. mikä relaksoituu ja mihin.
   (c) (3p) Boltzmannin yhtälö käyttää lähtökohtanaan klassisia liikeyhtälöitä, jotka ovat ajan suhteen symmetrisiä, ts. liikeyhtälöistä ei voi päätellä ajan suuntaa. Silti H-teoreema todistaa, että Boltzmannin teoriassa on funktio $H(t)$, joka onkin ajan suhteen epäsymmetrinen ja kertoo ajan suunnan. Mistä ajan suunta päätyi Boltzmannin teoriaan?
   (d) (2p) Jos sinulle esitettäisiin uusi hieno monihiukkasteoria, jossa aika olisi symmetrinen, niin miksi se ei voisi kuvata systeemien kehitystä kohti tasapainotilaa?

3. (a) (4p) Tarkastellaan yhtä bosonia laatikkopotentiaalissa. Mitä eroa on lämpökapasiteeteilla, jos perustila otetaan erikseen huomioon tai jos sen laskee mukaan samalla tavalla kuin muutkin tilat? Miksi jälkimmäisellä tavalla saatu lämpökapasiteetti on epäfysikaalinen?
   (b) (5p) Kuvaile Onsagerin ristikkäisrelaatioita ja niiden merkitystä. Mitä oletuksia relaatioiden johtamiseksi tehtiin ja kuinka rajoittavia ne ovat?

4. (a) (2p) Miten partitiofunktiossa otetaan huomioon hiukkasten identtisyys?
   (b) (2p) Milloin Gibbsin korjaus on kyllin tarkka?
   (c) (4p) Tilavuudessa V on lämpötilassa T (i) N identtistä ideaalikaasuhiukkasta, tai (ii) fotonikaasua. Kirjoita näiden tapausten partitiofunktiot.

(d) (2p) Jos kokonaispartitiofunktio on edellisen kohdan partitiofunktioiden tulo, niin millaisesta systeemistä on kyse? Miten alkaisit selvittää systeemin termodynaamisia ominaisuuksia?

5. (a) (6p) Eristetyn laatikon tilavuus V ja sen sisäseinien lämpötila on T. Osoita, että termodynaamisessa tasapainossa laatikossa on keskimäärin

$$N = V \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \times a \tag{1}$$

fotonia, missä a on dimensioton luku.
Voit käyttää hyväksi tietoa, että fotonikaasun tilatiheys on $g = V\epsilon^2/(\pi^2\hbar^3c^3)$

(b) (4p) Osoita, että fotonikaasun lämpökapasiteetti on

$$C_V \propto T^3 \; . \tag{2}$$

QUESTIONS IN ENGLISH

1. (a) (1p) When do the grand canonical ensemble and the canonical ensemble give equal results?
   (b) (1p) When does the classical Maxwell-Boltzmann statistics describe identical particles accurately?
   (c) (1p) What is Bose-Einstein condensation?
   (d) (2p) Draw a schetch of ideal boson gas phase diagrams in (P, V)-plane (a few isotherms), and in (P, T)-plane.
   (e) (1p) What does the Wien displacement law say?
   (f) (2p) Why does the Debye model work better than the Einstein model, especially at low temperatures?
   (g) (2p) What does the collision terms in Boltzmann theory represent?

2. (a) (2p) Why is the maximum possible mass of a white dwarf, about 1.4 solar masses, achieved using electron gas with specifically ultrarelativistic energy spectrum?
   (b) (2p) Explain briefly, what is meant with the relaxation time approksimation of the Boltzmann equation. Tell e.g. what relazes and where.
   (c) (3p) The foundation of Boltzmann equation lies on classical equations of motion, which are known to be symmetric in time, that is, one cannot tell the direction of time from the equations of motion. Even so, the H-theorem proves, that in the Boltzmann theory there is a function $H(t)$, that indeed is not symmetric in time and specifies the direction of time. Where did the direction of time sneak in the Boltzmann theory?
   (d) (2p) If you were presented a fine, new many-body theory, which is symmetric in time, why couldn't it describe systems that evolve towards an equilibrium state?

3. (a) (4p) Let's consider one boson in a box potential. What's the difference of the heat capacity, if the ground state is taken into account separately vs. it's taken into account just like any other state? Why is the heat capacity computed in the latter way unphysical?
   (b) (5p) Describe Onsager's reciprocal relations and their significance. What assumptions does one make n deriving them and how restrictive are they?

4. (a) (2p) How does one take into account identical particles in the partition function?
   (b) (2p) When is the Gibbs correction accurate enough?
   (c) (4p) In volume V at temperature T we have (i) N identical ideal gas particles, or (ii) photon gas. Write down the partition functions.
   (d) (2p) If the total partition function is the product of the partition functions in the previous question, what kind of a system are we talking about? How would you begin to examine it's thermodynamical properties?

5. (a) (6p) An isolated box has volume v and the inner wall temperature is T. Show, that in thermodynamical equilibrium there are on average

$$N = V \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \times a \qquad (3)$$

photons in the box, where a is a dimensionless constant. You may use the fact, that the density of states of photon gas is $g = V\epsilon^2/(\pi^2\hbar^3c^3)$.

(b) (4p) Show that the heat capasity of photon gas is

$$C_V \propto T^3 \ . \tag{4}$$

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600\ \mathrm{K} \approx 1\ \mathrm{eV}$, $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, $1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\mathrm{rev}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$, $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$, $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

$\Omega_G(T,V,\mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}$, $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$, $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$

$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2}$, $Z_1(T,V) = V\lambda_T^{-3}$, $Z_N(T,V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T,V)\right]^N$

$PV = N k_B T = nRT$, $E = \frac{3}{2} N k_B T$, $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$

$\langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i)$, $\frac{\partial \langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F)$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$

$\Omega_{\mathrm{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i)$, $\Omega_{\mathrm{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$

$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k)$, $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (NR) , $\epsilon(k) = \hbar c k$ (UR)

$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$, $u(T) = aT^4$, $I(T) = \sigma T^4$, $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}$, $\sigma = \frac{ac}{4}$

$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1)$, $\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, $\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.61$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(\frac{5}{2}) \approx 1.34$, $\zeta(3) \approx 1.20$, $\zeta(\frac{7}{2}) \approx 1.13$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

$\Gamma(p+1) = p!$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$

$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}$, $\int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$

$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$

$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1,$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1$, $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0)$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

If $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ and $f = f_0 + f'$ and $f' \ll f_0$, then$f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$