FYSA2042 osa B

Koe pe 18.6.2021 klo 12:00-16:00.
Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.
PALAUTUSOHJE:
Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi Tehtäviä on 5 kappaletta.

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin:
   (a) (1p) Milloin suurkanoninen joukko antaa oleellisesti samat tulokset kuin kanoninen joukko?
   (b) (1p) Milloin klassinen Maxwell-Boltzmann statistiikka on kyllin tarkka identtisten hiukkasten kuvaukseen?
   (c) (1p) Miksi Debyen malli toimii paremmin kuin Einsteinin malli, erityisesti matalissa lämpötiloissa?
   (d) (1p) Mitä Stefan-Boltzmann laki sanoo?
   (e) (2p) Miksi ideaalisia bosoneja ja fermioneja on paljon helpompi käsitellä suurkanonisessa joukossa kuin kanonisessa?
   (f) (2p) Hahmottele ideaalisen bosonikaasun faasidiagrammat (P, V)-tasossa (muutamia isotermejä), sekä (P, T)-tasossa.
   (g) (2p) Mitä Boltzmannin teoriassa kuvaa törmäysintegraali?

2. (a) (5p) Bose-Einstein kondensaatio voi syntyä esim. puristamalla bosonikaasua tai laskemalla kaasun lämpötilaa. Mistä kaavoista kondensaatiotilavuus ja toisaalta kondensaatiolämpötila lasketaan?
   (b) (4p) Tarkastellaan yhtä hiukkasta laatikkopotentiaalissa. Mitä eroa on lämpökapasiteeteilla, jos perustila otetaan erikseen huomioon tai ei? Miksi lämpökapasiteetti laskettuna ilman perustilan erityistä huomioonottamista on epäfysikaalinen?

3. (a) (6p) Jos jakauma $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ toteuttaa Boltzmannin yhtälön, niin H-teoreeman mukaan funktio

$$H(t) = \int d^3r_1 d^3p_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$$

   toteuttaa ehdon

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \ .$$

   Miksi tällainen ajan suhteen epäsymmetrinen funktio on pakko olla olemassa Boltzmannin teoriassa?
   (b) (3p) Boltzmannin teorian oletuksena on ns. molekulaarinen kaaos. Mitä tällä oletuksella tarkoitetaan ja miten se liittyy edellisessä kohdassa mainittuun ajan epäsymmetriaan?

4. (a) (5p) Sommerfeldin kehitelmän avulla tiheydeksi saadaan ($\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ ja degeneraatio g on vakio)

$$\frac{N}{V} = g\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\mu^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{(k_B T)^2}{\mu^2} + ...\right] .$$

Miten tätä kaavaa voi käyttää, jos oletetaan fermionien tiheys N/V tunnetuksi?

(b) (5p) Tarkastellaan N:ää vuorovaikuttamatonta bosonia L^2 kokoisessa neliössä (2D kaasu) termodynaamisella rajalla. Energiaspektri on $\epsilon_k = \hbar^2 k^2/(2m)$, ja tilatiheydeksi on nyt pelkkä vakio, $g(\epsilon) = \frac{gL^2}{\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)$. Osoita tilatiheyden avulla, ettei 2-ulotteisessa ideaalisessa bosonikaasussa ole Bose-Einstein kondensaatiota.
Vihje: Kondensaatiolämpötilassa T_c on kemiallinen potentiaali $\mu = 0^-$, mutta silloin hiukkasluku $N = \langle N \rangle$ pitäisi saada integraalista, joka ei suppene.

5. (a) (4p) Mikä valkoisissa kääpiötähdissä vastustaa gravitaatiovoimia? Miksi valkoisen kääpiön massa ei voi olla suurempi kuin n. 1,4 auringon massaa?

(b) (2p) Miksi Einstein-Smoluchowski relaatiossa

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

on oikealla puolella t, eikä t^2? Vastaukseksi ei riitä luennoissa annetun integraalin kopiointi, vaan fysikaalinen syy.

(c) (4p) Kerro, miten mustan kappaleen säteilyä voi kuvata kahdella eri tavalla, jotka kuitenkin ovat täysin ekvivalentteja: (i) joukkona vuorovaikuttamattomina harmonisia oskillaattoreita tai (ii) fotonikaasuna. Miksei toinen kuvaus ole toista parempi?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1{,}3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8{,}3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600\ \mathrm{K} \approx 1\ \mathrm{eV}$, $0\,^\circ\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$, $1\ \mathrm{atm} = 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9{,}82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2{,}998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1{,}054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1{,}66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\mathrm{rev.}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $E = -\dfrac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\dbinom{N}{n} \equiv \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

$C_V = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\dfrac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$, $C_P = T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$, $\kappa_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$, $\kappa_S = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$

$\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$, $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$, $\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, $p_i = \dfrac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, $\beta \equiv \dfrac{1}{k_B T}$

$\Omega_G(T, V, \mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}$, $p_i = \dfrac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$, $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$

$\lambda_T = \left(\dfrac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2}$, $Z_1(T, V) = V \lambda_T^{-3}$, $Z_N(T, V) = \dfrac{1}{N!}\left[Z_1(T, V)\right]^N$

$PV = N k_B T = nRT$, $E = \dfrac{3}{2} N k_B T$, $\left(\dfrac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta V} = \dfrac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$

$\langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}} = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i)$, $\dfrac{\partial \langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F)$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{BE}} = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$

$\Omega_{\mathrm{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i)$, $\Omega_{\mathrm{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$

$\sum_i f(k_i) \approx \dfrac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k)$, $\epsilon(k) = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (NR) , $\epsilon(k) = \hbar c k$ (UR)

$u(\omega, T) = \dfrac{\hbar}{\pi^2 c^3} \dfrac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$, $u(T) = aT^4$, $I(T) = \sigma T^4$, $a = \dfrac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}$, $\sigma = \dfrac{ac}{4}$

$\int_0^\infty dx \dfrac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1)$, $\int_0^\infty dx \dfrac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^s}$, $\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.61$, $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(\frac{5}{2}) \approx 1.34$, $\zeta(3) \approx 1.20$, $\zeta(\frac{7}{2}) \approx 1.13$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$

$\Gamma(p+1) = p!$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$, $\int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\dfrac{d^n}{da^n} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$

$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \dfrac{1}{2a}$, $\int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\dfrac{d^n}{da^n} \dfrac{1}{2a}\right]_{a=1}$

$\int d\epsilon \dfrac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \dfrac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\dfrac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$

$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \dfrac{a}{1-x}, |x| < 1,$, $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1$, $e^x = \sum_{n=0}^\infty \dfrac{x^n}{n!}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\dfrac{1}{\tau}(f - f_0)$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

Jos $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ ja $f = f_0 + f'$ ja $f' \ll f_0$, niin $f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$