FYSA2042 osa B, kevät 2020 https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/Tq74DPsZgoY5jtj

salasana: stafyapaja

Koe pe 17.4.2020 klo 12:00-16:00.
Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.
PALAUTUSOHJE:
Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/Tq74DPsZgoY5jtj
salasana: stafyapaja
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf
Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam Friday March 20th 2020, 12:00-16:00.
Questions in English and a collection of formulae at the end. All material may be used but not copied.
RETURN INSTRUCTIONS:
Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/Tq74DPsZgoY5jtj
password: stafyapaja
using the naming convention firstname.lastname.pdf
Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele lyhyesti.

   (a) (1p) Miksi ideaalisia bosoneja ja fermioneja on paljon helpompi käsitellä suurkanonisessa joukossa kuin kanonisessa?

   (b) (1p) Mitä tarkoittaa Bose-Einstein kondensaatio?

   (c) (1p) Mitä Wienin siirtymälaki sanoo?

   (d) (1p) Miksi Debyen malli toimii paremmin kuin Einsteinin malli, erityisesti matalissa lämpötiloissa?

   (e) (2p) Diffuusiovakio kuvaa aineen siirtymistä. Mikä suure kuvaa liike-energian siirtymistä aineen osien välillä? Entä mikä taas liikemäärän siirtymistä?

   (f) (2p) Mistä johtuu, että kylmän ideaalisen bosonikaasun laskut ovat melko helpoja, kun taas kylmän ideaalisen fermionikaasun ominaisuuksien laskemiseen käytetään mutkikasta Sommerfeldin kehitelmää?

   (g) (2p) Jos Boltzmannin teorian törmäystermi (törmäysintegraali) jätetään pois, voiko systeemi päästä koskaan termodynaamiseen tasapainoon?

2. (a) (3p) Mikä valkoisissa kääpiötähdissä vastustaa gravitaatiovoimia? Miksi valkoisen kääpiön massa ei voi olla suurempi kuin n. 1,4 auringon massaa?

   (b) (6p) Jos jakauma $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ toteuttaa Boltzmannin yhtälön, niin H-teoreeman mukaan funktio

$$H(t) = \int d^3r_1 d^3p_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$$

   on ajan suhteen epäsymmetrinen,

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \ .$$

   Miksi Boltzmannin teoriassa on pakko olla *jokin* ajan suhteen epäsymmetrinen funktio?

3. (a) (4p) Tarkastellaan yhtä bosonia laatikkopotentiaalissa. Mitä eroa on lämpökapasiteeteilla, jos perustila otetaan erikseen huomioon tai jos sen jättää ? Miksi lämpökapasiteetti ilman perustilaa laskettuna on epäfysikaalinen?

   (b) (5p) Kerro, miten mustan kappaleen säteilyä voi kuvata kahdella eri tavalla, jotka kuitenkin ovat täysin ekvivalentteja: (i) joukkona vuorovaikuttamattomina harmonisia oskillaattoreita tai (ii) fotonikaasuna.

4. (a) (2p) Miten partitiofunktiossa otetaan huomioon hiukkasten identtisyys?
   (b) (2p) Milloin Gibbsin korjaus on kyllin tarkka?
   (c) (4p) Tilavuudessa V on lämpötilassa T (i) N identtistä ideaalikaasuhiukkasta, tai (ii) fotonikaasua. Kirjoita näiden tapausten partitiofunktiot.
   (d) (2p) Jos kokonaispartitiofunktio on edellisen kohdan partitiofunktioiden tulo, niin millaisesta systeemistä on kyse? Miten alkaisit selvittää systeemin termodynaamisia ominaisuuksia?

5. (a) (2p) Perustele väite, ettei yksiulotteisessa Isingin mallissa ole faasimuutosta.
   (b) (2p) Jos summa yli mikrotilojen kirjoitetaan summana yli energioiden kertaa degeneraatio, niin mistä degeneraatio tulee? Mitä summattavalta suureelta on vaadittava, että summa yli mikrotilojen voidaan sieventää tällä tavalla?
   (c) (2p) Diffuusioyhtälö on muotoa

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \ ,$$

   missä $n(\mathbf{r}, t)$ on aineen (lukumäärä)tiheys.
   (i) Myös ääniaallot ovat tiheysvaihteluita $n(\mathbf{r}, t)$, mutta kuvaako niitä diffuusioyhtälö? Pelkkä kyllä/ei vastaus ei riitä.
   (ii) Päteekö ääniaalloille Fickin laki $\mathbf{j} = -D\boldsymbol{\nabla} n$? Entä päteekö jatkuvuusyhtälö $\partial n/\partial t + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$, missä $\mathbf{j}$ on jokin virta?
   (d) (2p) Diffusiovakion voi laskea tuntemalla
   (i) hiukkasten keskimääräinen nopeus $\langle v \rangle$ ja keskimääräinen vapaa matka l,

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle l \ ,$$

   (ii) Boltzmannin yhtälöstä tuntemalla relaksaatioaika τ ja lämpötila T:

$$D = \frac{\tau k_B T}{m} \ .$$

   Miten $\langle v \rangle$, l, τ ja T liittyvät toisiinsa? Miten kitkavakio γ liittyy näihin?
   (e) (2p) Miksi Einstein-Smoluchowski relaatiossa

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

   on oikealla puolella t, eikä t^2? Vastaukseksi ei riitä luennoissa annetun integraalin kopiointi, vaan fysikaalinen syy.

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Answer briefly to the following questions, justify your answer.

   (a) (1p) Why are ideal bosons and fermions a lot easier to consider in the grand canonical than in the canonical ensemble?

   (b) (1p) What does Bose-Einstein condensation mean?

   (c) (1p) What does the Wien displacement law say?

   (d) (1p) Why is the Debye model more accurate than Einstein's model, especially at low tempeatures?

   (e) (2p) The diffusion constant describes movement of matter. What quantity describes transfer of kinetic energy between different parts? And what describes momentum transfer in matter?

   (f) (2p) Why is it that the laws of cold, ideal bosons are relatively simple, whereas the calculation of the properties of cold, ideal fermion gas require the rather involved Sommerfeld expansion?

   (g) (2p) If one leaves out the collision term in the Boltzmann theory, can it describe how a system reaches thermodynamical equilibrium?

2. (a) (3p) What counteract gravity in white dwarf stars? Why can't the dwarf mass exceed about 1.4 solar mass?

   (b) (6p) If the distribution $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ satisfies the Boltzmann equation, then the H-theorem says that the function

$$H(t) = \int d^3r_1 d^3p_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$$

   is asymmetric in time, that is,

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \, .$$

   Why must Boltzmann theory have *some* function that is asymmetric in time?

3. (a) (4p) Let's consider one boson in a box potential. What's the difference of the heat capacity, if the ground state is taken into account separately vs. it's not taken into account? Why is the heat capacity without the ground state unphysical?

   (b) (5p) Using your own words, explain how black body radiation can be described using two different but equivalent views (i) as a collection of noninteracting harmonic oscillators, or (ii) as a photon gas.

4. (a) (2p) How does one take into account identical particles in the partition function?
   (b) (2p) When is the Gibbs correction accurate enough?
   (c) (4p) In volume V at temperature T we have (i) N identical ideal gas particles, or (ii) photon gas. Write down the partition functions.
   (d) (2p) If the total partition function is the product of the partition functions in the previous question, what kind of a system are we talking about? How would you begin to examine it's thermodynamical properties?

5. (a) (2p) Justify briefly, that a one-dimensional Ising model can't have a phase transition.
   (b) (2p) If a sum over microstates is written as degeneracy times a sum over energies, where does the degeneracy factor originate? What property must the summed quantity have, to allow the sum over microstates to be simplified like this?
   (c) (2p) The diffusion equation is

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \ ,$$

   where $n(\mathbf{r}, t)$ is the (number) density of matter.
   (i) Sound waves are fluctuations in density $n(\mathbf{r}, t)$, too, but does the diffusion equation describe them? A bare yes/no answer is not good enough.
   (ii) Considering sound waves, is Fick's law $\mathbf{j} = -D\boldsymbol{\nabla} n$ valid? What about the validity of the continuity equation $\partial n/\partial t + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0$, where $\mathbf{j}$ is some current?
   (d) (2p) The diffusion constant can be calculated either knowing
   (i) the mean particle velocity $\langle v \rangle$, and the mean free path l,

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle l \ ,$$

   (ii) temperature T and the relaxation time τ in Boltzmann equation,

$$D = \frac{\tau k_B T}{m} \ .$$

   How are $\langle v \rangle$, l, τ, and T related with each other? How does the drag coefficient γ relate to these?
   (e) (2p) Why does the Einstein-Smoluchowski equation

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

   have t, and not t^2, on the right hand side? Copying the integral given in the lecture notes is not enough; what is the physical reason?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600$ K ≈ 1 eV , $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, 1 atm $= 1.013 \times 10^5$ Pa , $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ Js , $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}$ eV , $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\text{rev.}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$, $C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$, $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

$\Omega_G(T, V, \mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}$, $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$, $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$

$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2}$, $Z_1(T, V) = V \lambda_T^{-3}$, $Z_N(T, V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T, V)\right]^N$

$PV = N k_B T = nRT$, $E = \frac{3}{2} N k_B T$, $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$

$\langle n_i \rangle_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i)$, $\frac{\partial \langle n_i \rangle_{\text{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F)$, $\langle n_i \rangle_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$, $\langle n_i \rangle_{\text{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$

$\Omega_{\text{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i)$, $\Omega_{\text{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$

$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k)$, $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (NR) , $\epsilon(k) = \hbar c k$ (UR)

$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$, $u(T) = aT^4$, $I(T) = \sigma T^4$, $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15\hbar^3 c^3}$, $\sigma = \frac{ac}{4}$

$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1)$, $\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, $\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.61$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(\frac{5}{2}) \approx 1.34$, $\zeta(3) \approx 1.20$, $\zeta(\frac{7}{2}) \approx 1.13$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

$\Gamma(p+1) = p!$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$

$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}$, $\int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$

$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\bigg|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$

$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1,$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1$, $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0)$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

Jos $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ja $f = f_0 + f'$ ja $f' \ll f_0$, niin $f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$