FYSA2042 Statistinen Fysiikka osa B

Koe pe 16.4.2021 klo 12:00-16:00.
Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.
PALAUTUSOHJE:
Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/kyaXc92q3QqWqEj
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf
Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam on Friday, April 16th, 2021, 12:00-16:00.
Questions in English and a collection of formulae at the end. All material may be used but not copied.
RETURN INSTRUCTIONS:
Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/kyaXc92q3QqWqEj
using the naming convention firstname.lastname.pdf
Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin. Asiaankuuluvien kaavojen käyttö parantaa vastaustasi.

   (a) (1p) Milloin suurkanoninen joukko antaa oleellisesti samat tulokset kuin kanoninen joukko?

   (b) (1p) Mistä johtuu, että Landaun tasojen degeneraatio on makroskooppinen? Miten degeneraatio käyttäytyy, kun magneetti kenttää kasvatetaan?

   (c) (1p) Mitä tarkoittaa degeneraatiopaine ja miten se liittyy degeneraatioon?

   (d) (2p) Miksi ideaalisia bosoneja ja fermioneja on paljon helpompi käsitellä suurkanonisessa joukossa kuin kanonisessa?

   (e) (2p) Jos Bose-Einstein kondensaatiota tarkastelee suurkanonisessa joukossa, niin kondensoituneiden bosonien lukumäärä fluktuoi epäfysikaalisen paljon. Mistä tämä väärä tulos johtuu?

   (f) (2p) Demossa 5 tehtävässä 1 laskettiin lämpötila aineen sisällä, kun aineen lämmönjohtavuus on vakio, tilanteessa, jossa aineen pinnan lämpötila vaihtelee kuten $T(z=0,t) = T_0 \sin(\omega t)$. Tulokseksi saatiin

   $$T(z,t) = T_0 e^{-z/s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) \ ,$$

   missä T_0 on pinnan korkein lämpötila, z on etäisyys pinnasta, t on aika, ja s on tunkeutumissyvyys. Mikä on **fysikaalinen syy** sille, että sinifunktion argumentissa on $\omega t - \frac{z}{s}$ eikä pelkästään ωt, toisin sanoen, miksi kaavaan tulee vaihesiirto z/s?

(g) (1p) Luennoissa johdettiin Planckin mustan kappaleen säteilylaki

$$u(\omega, T) = \frac{1}{c^3\pi^2}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \ ,$$

joka kertoo energiatiheyden (kulma)taajuusvälillä $[\omega, \omega + d\omega]$. Usein haluamme kuitenkin energiatiheyden aallonpituusvälillä $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, missä $\lambda = 2\pi c/\omega$ ja c on valon nopeus, mutta tätä energiatiheyttä ei saa pelkästään sijoittamalla edelliseen $u(\omega, T)$:n lausekkeeseen $\omega = 2\pi c/\lambda$. Miksei?

2. (a) (4p) Johda vuorovaikuttamattomien bosonien ja elektronien suurkanonisen partitiofunktioiden lausekkeet

$$\mathcal{Z} = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_i}} \qquad \text{(bosonit)}$$
$$\mathcal{Z} = \prod_i \left[1 + ze^{-\beta\epsilon_i}\right] \qquad \text{(fermionit)} \ ,$$

missä $z = e^{\beta\mu}$ on fugasiteetti.

(b) (5p) Miten edellä annetuissa lausekkeissa esiintyvä kemiallinen potentiaali μ määräytyy? Esitä kaavat, joista μ:n voi periaatteessa laskea mielivaltaisessa lämpötilassa.

3. (a) (4p) Miksi makroskooppisessa systeemissä hiukkasluvun keskiarvoa voidaan käyttää termodynamiikan hiukkaslukuna, eli miksi on perusteltua kirjoittaa $N = \langle N \rangle$?

(b) (1p) Tarkastellaan yhtä hiukkasta. Onko mitään merkitystä sillä, onko kyseessä bosoni vai fermioni? Perustele vastaus.

(c) (4p) Tarkastellaan yhtä hiukkasta laatikkopotentiaalissa. Mitä eroa on lämpökapasiteeteilla, jos perustila otetaan erikseen huomioon tai ei? Miksi lämpökapasiteetti laskettuna ilman perustilan erityistä huomioonottamista on epäfysikaalinen?

4. Jos jakauma $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ toteuttaa Boltzmannin yhtälön, niin H-teoreeman mukaan funktio

$$H(t) = \int d^3r_1 d^3p_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$$

toteuttaa ehdon

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \ .$$

(a) (3p) Miksi tällainen ajan suhteen epäsymmetrinen funktio on pakko olla olemassa Boltzmannin teoriassa?

(b) (2p) Boltzmannin yhtälö perustuu klassisiin liikeyhtälöihin, jotka ovat ajan suhteen symmetrisiä. Mistä Boltzmannin yhtälön epäsymmetria ajan suhteen on peräisin?

(c) (2p) Mikä on Boltzmannin yhtälön tasapainojakauma?

(d) (3p) Kerro, mikä on relaksaatioaika-approksimaatio, ja miten se vie Boltzmannin yhtälön ratkaisua kohti tasapainojakaumaa.

(e) Bonustehtävä: Miten Boltzmannin yhtälö liittyy Navier-Stokes yhtälöön?

5. Langevinin yhtälö on

$$m\ddot{x} = -m\gamma v + \xi(t) + F_{\mathrm{ext}} \ .$$

(a) (2p) Mitä ominaisuuksia satunnaisvoimalle $\xi(t)$:lle yleensä oletetaan?

(b) (2p) Mitä hiukkasten liikkeestä voidaan sanoa tuntematta satunnaisvoimaa $\xi(t)$ tarkasti, ainoastaan käyttämällä sille tehtyjä yleisiä oletuksia?

(c) (4p) Einsteinin relaatio (tunnetaan myös Einstein-Smoluckowski relaationa) on

$$D = \mu k_B T \ ,$$

missä D on diffuusiovakio ja μ on likkuvuus. Esitä relaation johto. Miksi relaatio on merkittävä?

(d) (2p) Kerro, miten mustan kappaleen säteilyä voi kuvata kahdella eri tavalla, jotka kuitenkin ovat täysin ekvivalentteja: (i) joukkona vuorovaikuttamattomina harmonisia oskillaattoreita tai (ii) fotonikaasuna. Mikä todistaa, että ne todella ovat todella täysin ekvivalentteja, eli kumpikin on yhtä oikea tulkinta?

1. Answer briefly to following question. Including relevant formulas improves your answer.

   (a) (1p) When do the grand canonical ensemble and the canonical ensemble give essentially equal results?

   (b) (1p) Why do Landau levels have a macroscopic degeneracy? How does this degeneracy behave as the magnetic field strength increases?

   (c) (1p) What does degeneracy pressure mean, and how is it related to degeneracy?

   (d) (2p) Why are ideal bosons and fermions a lot easier to consider in the grand canonical than in the canonical ensemble?

   (e) (2p) If Bose-Einstein condensation is described in the grand canonical ensemble, the number of condensed bosons shows unphysically large fluctuations. What's the reason for this wrong result?

   (f) (2p) In demo 5 question 1 we calculated the temperature inside matter, when the heat conductivity is constant, in a situation, where the temperature on the surface varies as $T(z=0,t) = T_0 \sin(\omega t)$. The result is

$$T(z,t) = T_0 e^{-z/s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) ,$$

   where T_0 is the highest temperature on the surface, z is the distance from the surface (depth), t is time, and s is the penetration depth. What is the **physical reason**, that the sine function argument is $\omega t - \frac{z}{s}$ and not just ωt, in other words, why is there a phase shift z/s in the sine function angle?

   (g) (1p) In the lecture notes we derived Planck's law for black body radiation,

$$u(\omega, T) = \frac{1}{c^3\pi^2} \frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} ,$$

   which tells the energy density in the (angular)frequency range $[\omega, \omega + d\omega]$. Often we need the energy density in the wave length range $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, where $\lambda = 2\pi c/\omega$ and c is the speed of light, but this energy density can't be obtained by simply inserting $\omega = 2\pi c/\lambda$ to the given expression $u(\omega, T)$. Why not

2. (a) (4p) Derive the noninteracting boson and fermion grand canonical partition functions

$$\mathcal{Z} = \prod_i \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_i}} \qquad \text{(bosons)}$$
$$\mathcal{Z} = \prod_i \left[1 + ze^{-\beta\epsilon_i}\right] \quad \text{(fermions)} ,$$

   where $z = e^{\beta\mu}$ if the fugasity..

   (b) (5p) How does one determine the chemical potential μ in these formulas? Give the formulas, where μ can be in principle determined at any temperature.

3. (a) (4p) In a macroscopic system, why can one use expectation value of the particle number as the thermodynamical number of particles, that is, why is it well justified to write $N = \langle N \rangle$?

   (b) (1p) Let's examine a single particle. Is there any difference if it's a boson or a fermion?

(c) (4p) Let's examine a single particle in a box potential. What's the difference between heat capacities with and without taking the ground state separately into account? What makes the heat capacity computed without the ground state unphysical?

4. If a distribution $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ satisfies the Boltzmann equation, then according to the H-theorem the function

$$H(t) = \int d^3r_1 d^3p_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) \ln f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$$

satisfies the condition

$$\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0 \ .$$

(a) (3p) Why is it necessary to have such a time asymmetric function in the Boltzmann thoery?

(b) (2p) The Boltzmann equation is base on classical equations of motion, which are manifestly symmetrical in time reversal. Where does the time asymmetry come to the Boltzmann equation?

(c) (2p) What is the equilibrium distribution of the Boltzmann equation?

(d) (3p) Explain what is meant by the relaxation time approximation, and how does it drive the solution of the Boltzmann equation toward equilibrium.

(e) Bonus question: How is the Boltzmann equation related to the Navier-Stokes equation?

5. The Langevin equation is

$$m\ddot{x} = -m\gamma v + \xi(t) + F_{\text{ext}} \ .$$

(a) (2p) What properties do we usually assume the random force $\xi(t)$ has?

(b) (2p) What can we say about the motion on particles without knowing the random force $\xi(t)$ in detail, by only using the general assumptions made on the force?

(c) (4p) The Einstein relation (known also as the Einstein-Smoluckowski relation) is

$$D = \mu k_B T \ ,$$

where D is the diffusion constant, and μ is the mobility. Explain how it's derived. Why is the relation so remarkable?

(d) (2p) Explain how black body radiation can be described using two quite different, yet completely equivalent, ways: (i) as a collection of noninteracting harmonic oscillators, or (ii) as a photon gas. What proves, that they are really equivalent descriptions, meaning that both are equally correct?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600\ \mathrm{K} \approx 1\ \mathrm{eV}$, $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, $1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\mathrm{rev.}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$$S = k_B \ln \Omega\ ,\quad F = -k_B T \ln Z\ ,\quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z\ ,\quad ln(n!) \approx n \ln n - n\ ,\quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}\ ,\quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}\ ,\quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}\ ,\quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}\ ,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z\ ,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i\ ,\quad p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\ ,\quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i}\ ,\quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$

$$\Omega_G(T,V,\mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}\ ,\quad p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}\ ,\quad \mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$$

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2}\ ,\quad Z_1(T,V) = V \lambda_T^{-3}\ ,\quad Z_N(T,V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T,V)\right]^N$$

$$PV = N k_B T = nRT\ ,\quad E = \frac{3}{2} N k_B T\ ,\quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$$

$$\langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i)\ ,\quad \frac{\partial \langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F)\ ,\quad \langle n_i \rangle_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}\ ,\quad \langle n_i \rangle_{\mathrm{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$$

$$\Omega_{\mathrm{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i)\ ,\quad \Omega_{\mathrm{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$$

$$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k)\ ,\quad \epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\ (NR)\ ,\quad \epsilon(k) = \hbar c k\ (UR)$$

$$u(\omega,T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\ ,\quad u(T) = aT^4\ ,\quad I(T) = \sigma T^4\ ,\quad a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3}\ ,\quad \sigma = \frac{ac}{4}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1)\ ,\quad \int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\ ,\quad \zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.61\ ,\quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\ ,\quad \zeta(\frac{5}{2}) \approx 1.34\ ,\quad \zeta(3) \approx 1.20\ ,\quad \zeta(\frac{7}{2}) \approx 1.13\ ,\quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\Gamma(p+1) = p!\ ,\quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\ ,\quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\ ,\quad \int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$$

$$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}\ ,\quad \int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$$

$$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$$

$$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1,\ ,\quad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1\ ,\quad e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\ ,\quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0)\ ,\quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}\ ,\quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

Jos $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ ja $f = f_0 + f'$ ja $f' \ll f_0$, niin $f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$