FYSA2042 osa B, kevät 2020

Koe pe 8.5.2020 klo 12:00-16:00.
Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.
PALAUTUSOHJE:
Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon

https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/Rz5nrDrZxQgdYR8
salasana: stafyapaja

nimettynä etunimi.sukunimi.pdf
Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam Friday May 8th 2020, 12:00-16:00.
Questions in English and a collection of formulae at the end. All material may be used but not copied.
RETURN INSTRUCTIONS:
Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box

https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/Rz5nrDrZxQgdYR8
password: stafyapaja

using the naming convention firstname.lastname.pdf
Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele lyhyesti.

   (a) (1p) Miksi fotonikaasun kemiallinen potentiaali $\mu = 0$?

   (b) (1p) Miksi ideaalisia bosoneja ja fermioneja on paljon helpompi käsitellä suurkanonisessa joukossa kuin kanonisessa?

   (c) (1p) Tilan i miehitysluvun odotusarvo on bosoneille

   $$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} ,$$

   ja fermioneille

   $$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} ,$$

   Miten näistä voi päätellä, että bosoneille voi tapahtua Bose-Einstein kondensaatio, muttei fermioneille?

   (d) (1p) Mitä Stefan-Boltzmann laki sanoo?

   (e) (2p) Miksi Debyen mallissa on samantekevää, valitaanko yksi akustinen moodi vai käytetäänkö esim. kolmea akustista moodia?

   (f) (2p) Miksi viskositeetti kuvaa liikemäärän siirtymistä aineessa?

   (g) (2p) Mistä johtuu, että kylmän ideaalisen bosonikaasun laskut ovat melko helpoja, kun taas kylmän ideaalisen fermionikaasun ominaisuuksien laskemiseen käytetään mutkikasta Sommerfeldin kehitelmää?

2. (a) (2p) Miksi valkoisen kääpiön suurin mahdollinen massa, n. 1,4 auringon massaa, saadaan käyttämällä elektronikaasulle nimenomaan ultrarelativistista energiaspektriä?

   (b) (2p) Kerro lyhyesti, mitä Boltzmannin yhtälön relaksaatioaika-approksimaatio tarkoittaa. Kerro mm. mikä relaksoituu ja mihin.

   (c) (3p) Boltzmannin yhtälö käyttää lähtökohtanaan klassisia liikeyhtälöitä, jotka ovat ajan suhteen symmetrisiä, ts. liikeyhtälöistä ei voi päätellä ajan suuntaa. Silti H-teoreema todistaa, että Boltzmannin teoriassa on funktio $H(t)$, joka onkin ajan suhteen epäsymmetrinen ja kertoo ajan suunnan. Mistä ajan suunta päätyi Boltzmannin teoriaan?

   (d) (2p) Jos sinulle esitettäisiin uusi hieno monihiukkasteoria, jossa aika olisi symmetrinen, niin miksi se ei voisi kuvata systeemien kehitystä kohti tasapainotilaa?

3. (a) (4p) Tarkastellaan yhtä bosonia laatikkopotentiaalissa. Mitä eroa on lämpökapasiteeteilla, jos perustila otetaan erikseen huomioon tai jos sen laskee mukaan samalla tavalla kuin muutkin tilat? Miksi jälkimmäisellä tavalla saatu lämpökapasiteetti on epäfysikaalinen?

   (b) (5p) Kuvaile Onsagerin ristikkäisrelaatioita ja niiden merkitystä. Mitä oletuksia relaatioiden johtamiseksi tehtiin ja kuinka rajoittavia ne ovat?

4. (a) (2p) Miten klassisen kaasun partitiofunktiossa otetaan huomioon hiukkasten identtisyys?
   (b) (2p) Jos monihiukkassysteemin partitiofunktio on tulo yhden hiukkasen partitiofunktioista, niin mitä se kertoo systeemistä?
   (c) (3p) Milloin suurkanonisen joukon käyttö voi johtaa epätarkkoihin tuloksiin?
   (d) (3p) Lähtien kanonisen joukon partitiofunktion määritelmästä (summa on yli mikrotilojen i)

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \ ,$$

   johda $Z : n$ lauseke tilatiheyden avulla. Selvästi tilatiheyskin sisältää kaiken tarvittavan tiedon systeemin termodynamiikan selvittämiseen. Kuvitellaan käänteinen tilanne: Jos käytettävissä on runsaasti kokeellista termodynaamista dataa, olisiko siitä helpompaa selvittää tilatiheys vaiko energiaspektri?

5. (a) (3p) Sommerfeldin kehitelmän avulla tiheydeksi saadaan ($\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ ja g on degeneraatio (vakio)))

$$\frac{N}{V} = g\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\mu^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{(k_BT)^2}{\mu^2} + ...\right] \ .$$

   Miten tätä kaavaa käytetään, jos fermioneja onkin vakiomäärä vakiotilavuudessa? Vai pitääkö kaava tässä tilanteessa lainkaan paikkansa?

   Bonuskysymys (3p): Kaava on johdettu suurkanonisessa joukossa, jossa hiukkasmäärä ei ole vakio. Miten edellä tehty oletus vakiomäärästä fermioneja pitäisi tulkita?
   (b) (2p) Kuvaile lyhyesti, mitä ns. fluktuaatio-dissipaatioteoreema tarkoittaa ja mihin sitä käytetään.
   (c) (3p) Fotonien tiheys on

$$\frac{N}{V} = \frac{2\zeta(3)}{\hbar^3 c^3 \pi^2}(k_BT)^3 \ ,$$

   missä $\zeta(3) \approx 1,20205$ ja c on valon nopeus. Eräässä aineessa on akustisia fononeja. Mikä on niiden tiheyden lämpötilariippuvuuden kaava, ja mitkä tekijät siihen vaikuttavat?
   (d) (2p) Miksi Einstein-Smoluchowski relaatiossa

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

   on oikealla puolella t, eikä t^2? Vastaukseksi ei riitä luennoissa annetun integraalin kopiointi, vaan fysikaalinen syy.

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Answer briefly to the following questions, justify your answer.

   (a) (1p) Why is the chemical potential of photon gas $\mu = 0$?

   (b) (1p) Why are ideal bosons and fermions a lot easier to consider in the grand canonical than in the canonical ensemble?

   (c) (1p) The expectation value of occupation number in state i is for bosons

   $$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} ,$$

   and for fermions

   $$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} .$$

   Based on these, how can you tell, that bosons are able to undergo Bose-Einstein condensation, while fermions can't?

   (d) (1p) What does the Stefan-Boltzmann law say?

   (e) (2p) Why doesn't it make any difference for the Debye model of lattice specific heat, whether you have just a single acoustic phonon or, say, three acoustic modes and use their average sound velocities?

   (f) (2p) Why does viscosity describe how momentum is transfered in a medium?

   (g) (2p) Why is it that the laws of cold, ideal bosons are relatively simple, whereas the calculation of the properties of cold, ideal fermion gas require the rather involved Sommerfeld expansion?

2. (a) (2p) Why is the maximum possible mass of a white dwarf, about 1.4 solar masses, achieved using electron gas with specifically ultrarelativistic energy spectrum?

   (b) (2p) Explain briefly, what is meant with the relaxation time approksimation of the Boltzmann equation. Tell e.g. what relazes and where.

   (c) (3p) The foundation of Boltzmann equation lies on classical equations of motion, which are known to be symmetric in time, that is, one cannot tell the direction of time from the equations of motion. Even so, the H-theorem proves, that in the Boltzmann theory there is a function $H(t)$, that indeed is not symmetric in time and specifies the direction of time. Where did the direction of time sneak in the Boltzmann theory?

   (d) (2p) If you were presented a fine, new many-body theory, which is symmetric in time, why couldn't it describe systems that evolve towards an equilibrium state?

3. (a) (4p) Let's consider one boson in a box potential. What's the difference of the heat capacity, if the ground state is taken into account separately vs. it's taken into account just like any other state? Why is the heat capacity computed in the latter way unphysical?

   (b) (5p) Describe Onsager's reciprocal relations and their significance. What assumptions does one make n deriving them and how restrictive are they?

4. (a) (2p) How does one take into account identical particles in the partition function of a classical gas?

   (b) (2p) If a many-body system has partition function which is a product of single particle partition function, then what does it tell about the system?

   (c) (3p) When may the use of grand canonical ensemble lead to inaccurate results?

   (d) (3p) Starting from the canonical partition function, defined as (sum is over microstates i)

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \ ,$$

   derive Z in terms of the density of states. Obviously also the density of states has all information needed to compute all thermodynamical properties. Imagine a reverse situation: With ample experimental thermodynamical data, is it easier to extract the density of states or the energy spectrum?

5. (a) (3p) The Sommerfeld expansion gives the density ($\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ and g is degeneration (constant))

$$\frac{N}{V} = g\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\mu^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\left[1 + \frac{\pi^2}{8}\frac{(k_B T)^2}{\mu^2} + ...\right] \ .$$

   How does one use this formula for a constant amount of fermions in a constant volume? Or is the formula invalid in this situation?

   Bonus question (3p): The above formula was derived in grand canonical ensemble, where the number of particles is not constant. How should one interpret the assumption of a constant amount of fermions in a constant volume?

   (b) (2p) Describe briefly what is meant by the sc. fluctuation-dissipation theorem how does one use it.

   (c) (3p) The density of photons is

$$\frac{N}{V} = \frac{2\zeta(3)}{\hbar^3 c^3 \pi^2}(k_B T)^3 \ ,$$

   where $\zeta(3) \approx 1,20205$ and c is the speed of light. A substance has acoustic phonons. What is the phonon density as a function of temperature, and on what factors does it depend on?

   (d) (2p) Why does the Einstein-Smoluchowski equation

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt$$

   have t, and not t^2, on the right hand side? Copying the integral given in the lecture notes is not enough; what is the physical reason?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600\ \mathrm{K} \approx 1\ \mathrm{eV}$, $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, $1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\text{rev.}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $E = -\dfrac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\dbinom{N}{n} \equiv \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} , \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N} , \quad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} , \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i , \quad p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} , \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i} , \quad \beta \equiv \frac{1}{k_B T}$$

$$\Omega_G(T,V,\mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z} , \quad p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} , \quad \mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$$

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2} , \quad Z_1(T,V) = V \lambda_T^{-3} , \quad Z_N(T,V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T,V)\right]^N$$

$$PV = N k_B T = nRT , \quad E = \frac{3}{2} N k_B T , \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$$

$$\langle n_i \rangle_{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T\to 0}{\rightarrow} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i) , \quad \frac{\partial \langle n_i \rangle_{\text{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T\to 0}{\rightarrow} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F) , \quad \langle n_i \rangle_{\text{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} , \quad \langle n_i \rangle_{\text{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$$

$$\Omega_{\text{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T\to 0}{\rightarrow} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i) , \quad \Omega_{\text{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$$

$$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k) , \quad \epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\ (NR) , \quad \epsilon(k) = \hbar c k\ (UR)$$

$$u(\omega,T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} , \quad u(T) = aT^4 , \quad I(T) = \sigma T^4 , \quad a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} , \quad \sigma = \frac{ac}{4}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1) , \quad \int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} , \quad \zeta(\tfrac{3}{2}) \approx 2.61 , \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} , \quad \zeta(\tfrac{5}{2}) \approx 1.34 , \quad \zeta(3) \approx 1.20 , \quad \zeta(\tfrac{7}{2}) \approx 1.13 , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\Gamma(p+1) = p! , \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) , \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} , \quad \int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$$

$$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a} , \quad \int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$$

$$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$$

$$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1, \ , \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1 , \quad e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} , \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0) \ , \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} , \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$$

Jos $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ ja $f = f_0 + f'$ ja $f' \ll f_0$, niin $f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$