FYSA2042 Statistinen Fysiikka osa B

Koe pe 7.5.2021 klo 12:00-16:00.
Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.
PALAUTUSOHJE:
Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/yEGJxnzsRq9R9Ng
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf
Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam on Friday, May 7th, 2021, 12:00-16:00.
Questions in English and a collection of formulae at the end. All material may be used but not copied.
RETURN INSTRUCTIONS:
Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box
https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/yEGJxnzsRq9R9Ng
using the naming convention firstname.lastname.pdf
Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

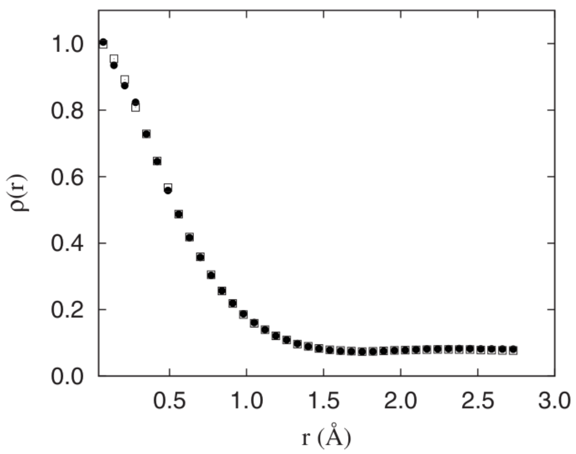
1. Vastaa lyhyesti seuraaviin kysymyksiin. Asiaankuuluvien kaavojen käyttö parantaa vastaustasi.
   (a) (1p) Jos hiukkasluku ei säily, niin miksi silloin kemiallinen potentiaali $\mu = 0$?
   (b) (1p) Mitä tarkoittaa degeneraatiopaine ja miten se liittyy degeneraatioon?
   (c) (2p) Mitä ovat Landaun tasot?
   (d) (2p) Missä tilanteissa suurkanonisen joukon käyttö ei ole oikein?
   (e) (2p) Jos Bose-Einstein kondensaatiota tarkastelee suurkanonisessa joukossa, niin kondensoituneiden bosonien lukumäärä fluktuoi epäfysikaalisen paljon. Mistä tämä täysin väärä tulos johtuu?
   (f) (2p) Planckin säteilylaki saadaan laskemalla säteilyn energiatiheys,
   $$\frac{E}{V} = \frac{1}{V}\sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{\beta\epsilon_i}-1} = \frac{1}{V}\int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)\frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1} \ ,$$
   käyttäen spektriä $\epsilon(k) = \hbar ck$. Miksi perustilaa, jolle $\epsilon = 0$ ja $g(\epsilon) = 0$, ei tässä tarvitse käsitellä erikseen, vaan summa voidaan laskea integraalina käyttäen tilatiheyttä $g(\epsilon)$?

2. (a) (4p) Jos kanoninen tilatiheys $g_N(E)$ tunnetaan kaikille hiukkasmäärille N, niin miten lasketaan suurkanoninen partitiofunktio?
   (b) (3p) Kerro, mitä tarkoitetaan (i) Paulin paramagnetismilla, ja (ii) Landaun diamagnetismilla. Kerro myös mikä ne aiheuttaa.

(c) (2p) Valkoisen kääpiön Chandrasekharin raja on n. 1,4 $M_\odot$, joka saavutetaan, kun tähden gravitaatiota tasapainottaa ultrarelativistisen degeneroituneen elektronikaasun paine. Millä voidaan perustella sitä, että tähden elektronikaasu on degeneroitunutta?

3. (a) (5p) Systeemin energiatiloilla on eri energiat ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ja ϵ_4. Kirjoita kanonisen partitiofunktion lausekkeet, kun systeemissä on kaksi hiukkasta, ja ne ovat (i) bosoneja tai (ii) fermioneja.

   (b) (4p) Laatikosta löytyi kuvassa esitetty yksihiukkastiheysmatriisi $\rho(r) := \rho_1(|\mathbf{r}|)$. Se on homogeenisen bosonisysteemin (kahdella tavalla) laskettu tulos jossain lämpötilassa. Onko aineessa Bose-Einstein kondensaatti? Perustele vastauksesi.



4. (a) (4p) Boltzmannin yhtälöstä relaksaatioaika-approksimaatiossa saadaan lämmönjohtavuudelle lauseke

$$\kappa = \frac{5\tau n k_B^2 T}{m} ,$$

missä τ on relaksaatioaika, n on hiukkasten lukumäärätiheys, ja m on hiukkasten massa. (i) Tarkasta, että yhtälön yksiköt ovat oikein. (ii) Esitä fysikaalinen perustelu sille, että lämmönjohtavuus kasvaa relaksaatioajan kasvaessa.

   (b) (2p) Mitä tarkoitetaan Wiedemann-Franz lailla, ja milloin sen voi olettaa olevan voimassa?

   (c) (4p) Tarkasteltaessa liikemäärän siirtymistä eri nopeudella liikkuvien kerrosten välillä saatiin aineen viskositeetiksi

$$\eta = \frac{1}{3}\ell m n \left(\frac{6k_BT}{\pi m}\right)^{1/2} ,$$

missä ℓ on keskimääräinen vapaa matka. Esitä jokin perustelu sille, ettei viskositeetti riipu aineen massatiheydestä $\rho = mn$, vaikka se esiintyykin em. lauseekkeessa.

   (d) Bonustehtävä: Viskositeetti relaksaatioaika-approksimaatiossa on

$$\eta = \tau k_B T n ,$$

Edellisessä kohdassa esitettiin myös kaava viskositeetille. Miten selittäisit saatujen viskositeetin lausekkeiden eroja, mm. eri T:n potenssin?

5. (a) (4p) Väriaineen diffuusiovakio vedessä on tyypillisesti noin $D = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. Kuinka kauan kestää väriainemolekyyliltä diffundoitua keskimäärin metrin päähän lähtöpisteestään? Verrattaessa tulosta havaintoihin on selvää, ettei diffuusio voi olla tärkein mekanismi, jolla väriaine leviää vedessä.

   (b) (4p) Oletaan tunnetuiksi pallomaisten hiukkasten säde a, sekä niiden viskositeetti η ja diffuusiovakio D jossain väliaineessa. Miten näillä tiedoilla voi laskea Avogadron luvun N_A arvon?

   (c) (2p) Einsteinin relaatio (tunnetaan myös Einstein-Smoluchowski relaationa) on

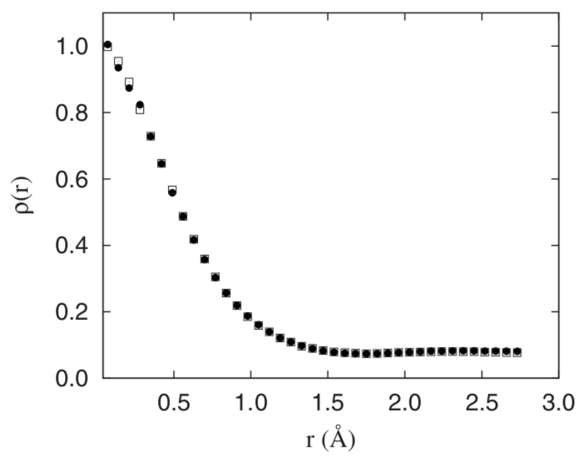
$$D = \mu k_B T \ ,$$

   missä D on diffuusiovakio ja μ on liikkuvuus. Miksi relaatio on merkittävä?

1. Answer briefly to following question. Including relevant formulas improves your answer.
   (a) (1p) If the number of particles is not conserved, why is their chemical potential $\mu = 0$?
   (b) (1p) What does degeneracy pressure mean, and how is it related to degeneracy?
   (c) (2p) What are Landau levels?
   (d) (2p) Under what conditions is the use of grand canonical ensemble incorrect?
   (e) (2p) If Bose-Einstein condensation is described in the grand canonical ensemble, the number of condensed bosons shows unphysically large fluctuations. What's the reason for this wrong result?
   (f) (2p) The Planck radiation law is derived by calculating the energy density of radiation,
   $$\frac{E}{V} = \frac{1}{V}\sum_i \frac{\epsilon_i}{e^{\beta\epsilon_i}-1} = \frac{1}{V}\int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)\frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1} ,$$
   using the spectrum $\epsilon(k) = \hbar ck$. Why don't we have to take the ground state, which has $\epsilon = 0$ and $g(\epsilon) = 0$, separately, but instead just write the sums as an integral using the density of states $g(\epsilon)$?

2. (a) (4p) If the canonical density of states $g_N(E)$ is known for all particle numbers N, how does one calculate the grand canonical partition function?
   (b) (3p) Explain what is meant by (i) Pauli paramagnetism, and (ii) Landau diamagnetism. Tell also what is causing them.
   (c) (2p) The Chandrasekhar limit of a white dwarf is about 1.4 $M_\odot$, which is reached when stars gravity is balanced by the pressure of ultrarelativistic degenerate electron gas. Why is it justified to assume that electron gas in a white dwarf is degenerate?

3. (a) (5p) The energy states of a system are separate, at energies ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, and ϵ_4. Write down the canonical partition function for a two particle system, when the particles are (i) bosons, or (ii) fermions.
   (b) (4p) In a drawer I found the one-body density matrix $\rho(r) := \rho_1(|\mathbf{r}|)$ shown in the figure. It represents the calculated results (actually two calculations) for a homogenious boson system at an unspecified temperature. Does the matter have a Bose-Einstein condensate? Justify your answer.



4. (a) (4p) The Boltzmann equation in the relaxation time approximation gives for the thermal conductivity the expression

$$\kappa = \frac{5\tau n k_B^2 T}{m} ,$$

where τ is the relaxation time, n is the number density of particles, and m is the particle mass. (i) Check that the units are correct. (ii) Give a physical reason why the thermal conductivity increases with increasing relaxation time.

(b) (2p) What does Wiedemann-Franz law stand for, and when is it supposedly valid?

(c) (4p) In examining the momentum transfer between layers moving with different velocities, we found that the viscosity is

$$\eta = \frac{1}{3}\ell m n \left(\frac{6k_B T}{\pi m}\right)^{1/2} ,$$

where ℓ is the mean free path. Give a justification to the notion, that viscosity doesn't depend on the mass density of matter, $\rho = mn$, even though it appears in this formula.

(d) Bonus question: Viscosity in the relaxation time approximation is, on the other hand,

$$\eta = \tau k_B T n ,$$

How would you explain the differences between the two expressions for η, e.g. the different power of T?

5. (a) (4p) The diffusion constant of dye in water is typically about $D = 1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$. How long would it take for a dye molecule to travel diffusively on average one meter away from it's point of origin? Comparing the result with observations, it's clear that diffusion can't be the main mechanism of dye spreading in water.

(b) (4p) Let's assume we know the radius a of spherical particles, their viscosity η and diffusion constant D in some medium. How can we calculate the Avogadro number N_A based on the data?

(c) (2p) The Einstein relation (known also as the Einstein-Smoluchowski relation) is

$$D = \mu k_B T ,$$

where D is the diffusion constant and μ is mobility. What's the significance of the relation?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, $R = k_B N_A = 8.3143\,\mathrm{J/(mol\,K)}$, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{1/mol}$

$k_B \times 11600\ \mathrm{K} \approx 1\ \mathrm{eV}$, $0\,^\circ\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$, $1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $g = 9.82\,\mathrm{m/s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, $1\,\mathrm{J} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}$, $m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$ $1u = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$dE = \delta Q + \delta W \overset{\mathrm{rev.}}{=} TdS - PdV$, $dE = TdS - PdV + \mu dN$

$F = E - TS$, $G = E - TS + PV$, $H = E + PV$, $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$

$S = k_B \ln \Omega$, $F = -k_B T \ln Z$, $E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$, $ln(n!) \approx n \ln n - n$, $\binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$

$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$, $C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$, $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N}$, $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$

$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1}$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$, $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$

$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, $Z = \sum_i e^{-\beta E_i}$, $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$

$\Omega_G(T, V, \mu) = -k_B T \ln \mathcal{Z}$, $p_i = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$, $\mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}$

$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}\right)^{1/2}$, $Z_1(T, V) = V \lambda_T^{-3}$, $Z_N(T, V) = \frac{1}{N!}\left[Z_1(T, V)\right]^N$

$PV = N k_B T = nRT$, $E = \frac{3}{2} N k_B T$, $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}}{T \Delta V_{1\to 2}}$

$\langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1} \overset{T \to 0}{\to} \theta(\epsilon_F - \epsilon_i)$, $\frac{\partial \langle n_i \rangle_{\mathrm{FD}}}{\partial \epsilon_i} \overset{T \to 0}{\to} -\delta(\epsilon_i - \epsilon_F)$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{BE}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$, $\langle n_i \rangle_{\mathrm{MB}} = e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}$

$\Omega_{\mathrm{FD}} = -k_B T \sum_i \ln[1 + e^{-\beta(\epsilon - \mu)}] \overset{T \to 0}{\to} -\sum_i (\mu - \epsilon_i)\theta(\mu - \epsilon_i)$, $\Omega_{\mathrm{BE}} = k_B T \sum_i \ln[1 - e^{-\beta(\epsilon - \mu)}]$

$\sum_i f(k_i) \approx \frac{gV}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f(k)$, $\epsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (NR) , $\epsilon(k) = \hbar c k$ (UR)

$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$, $u(T) = aT^4$, $I(T) = \sigma T^4$, $a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3}$, $\sigma = \frac{ac}{4}$

$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x - 1} = p!\zeta(p+1)$, $\int_0^\infty dx \frac{x^p}{e^x + 1} = (1 - 2^{-p})\zeta(p+1)$

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, $\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.61$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(\frac{5}{2}) \approx 1.34$, $\zeta(3) \approx 1.20$, $\zeta(\frac{7}{2}) \approx 1.13$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

$\Gamma(p+1) = p!$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_0^\infty dx x^{2n} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right]_{a=1}$

$\int_0^\infty dx x e^{-ax^2} = \frac{1}{2a}$, $\int_0^\infty dx x^{2n+1} e^{-ax^2} = (-1)^n \left[\frac{d^n}{da^n} \frac{1}{2a}\right]_{a=1}$

$\int d\epsilon \frac{f(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \approx \int_0^\mu d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left.\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon}\right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$

$\sum_{n=0}^\infty a x^n = \frac{a}{1-x}, |x| < 1,$, $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ |x| < 1$, $e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f = -\frac{1}{\tau}(f - f_0)$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$

Jos $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ja $f = f_0 + f'$ ja $f' \ll f_0$, niin $f' \approx -\tau(\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f_0 + \dot{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}} f_0)$