FYSA2042, Statistical Physics B
Vihjeet # 6

18. huhtikuuta 2024

Tehtävä # 1

(a) Vaikka yhtälössä esiintyy tuntematon satunnaisfunktio ξ, sen voi ratkaista integroimalla kuten minkä tahansa muun toisen kertaluvun tavallisen differentiaaliyhtälön, luentomonisteen esimerkeistä voi olla hyötyä. Ratkaisun pitäisi palautua tehtävänannon $F = 0$-lausekkeeseen nollavoiman rajalla, ja kannattaa merkitä $\ddot{x} = \dot{v}$.

(b) Kirjoita funktio $1 - e^{-\gamma t}$ Taylorin sarjana *toiseen kertalukuun*, ja sievennä. Mieti myös, miksi tällä kertaa tarvitsimme myös toisen kertaluvun termiä. Voit käyttää tietoa $\langle \xi \rangle = 0$.

Tehtävä # 2

Tämä tehtävä näyttää päältä päin paljon vaikeammalta kuin mitä se oikeasti on, joten kaikkien kannattaa vähintäänkin yrittää sitä.

(a) Sijoita jatkuvuusyhtälöön $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{diff}} + \mathbf{j}_{\text{drift}}$ ja sievennä.

(b) Sijoita diffuusio- ja ajautumisvirtojen lausekkeet tehtävänannon kaavaan (9) ja ratkaise saatu differentiaaliyhtälö z-suunnassa. Muista, että differentiaaliyhtälö (9) on voimassa kaikille vektorien komponenteille erikseen.

Tehtävä # 3

Tämä lasku menee läpi pitkälti tehtävänannon vinkeillä. Mikä yhtälö liittää diffuusiovakion D keskimääräiseen neliölliseen poikkeamaan $\langle x^2 \rangle$? Etsi tarvittavat vakiot netistä.

Tehtävä # 4

Tämä tehtävä on hiukan työläämpi kuin muut tehtävät, ja siksi kaksinkertaisten pisteiden arvoinen.

(a) Tässä tehtävässä tehdään useita koordinaatistomuunnoksia ja muuttujanvaihtoja, joten on erityisen tärkeää ymmärtää, että tehtäessä muunnos muuttujasta x muuttujaan x' jonkin muunnosyhtälön $x' = x'(x)$ mukaisesti, muuttujan x funktiolle $f(x)$ ei yleisesti päde $f(x) = f(x')$, eli pelkästään korvaamalla muuttuja x muuttujalla x' funktion $f(x)$ argumenttina ei saada oikein muunnettua funktiota. Onkin hyvä merkitä muunnettua funktiota eri tavalla kuin muuntamatonta, esimerkiksi $f(x) = \hat{f}(x'(x))$. Myös osittaisderivoitaessa muuttujanvaihdoilla on merkitystä. Jos meillä on osittaisderivaatta

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y, \tag{1}$$

niin tehtäessä muuttujanvaihto, joka kytkee muuttujat x ja y toisiinsa, eli $x'(x,y) = g(x,y) \Rightarrow y = h(x,x')$ joillakin funktioilla $g(x,y)$ ja $h(x,x')$, niin tyypillisesti

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)_y \neq \left(\frac{\partial \hat{f}(x,x')}{\partial x}\right)_{x'}. \tag{2}$$

Tämä johtuu siitä, että alkuperäisessä osittaisderivaatassa pidetään y, eli muuttujien x ja x' kombinaatio $h(x,x')$, vakiona, mutta muuttujia x ja x' ei yksinään pidetä vakioina.

(b) Vakio K ei esiinny lopullisessa tuloksessa, ja sen tehtävä on vain tehdä logaritmin $\ln(S(\tau)/K)$ argumentista dimensioton (eli muuttujalla S ja vakiolla K on samat yksiköt). Rahoitusteoriassa vakiolle K voidaan antaa syvempi merkitys, mutta tämän tehtävän kannalta riittää vain käsitellä sitä ajasta ja rahoitusvälineen hinnasta riippumattomana vakiona.

(c) Tämän kohdan voi tehdä ainakin kahdella melko suoraviivaisella tavalla. Voi joko keskittyä pelkästään diffuusiovakion arvon valintaan välittämättä siitä, onko vakion arvo positiivinen tai edes reaalinen. Vaihtoehtoisesti voi vaatia, että diffuusiovakio on arvon valinnan jälkeen reaalinen ja positiivinen, ja tehdä koordinaatistomuunnoksen ajalle, jolla saadaan yhtälöön halutut imaginääriyksiköt. Jälkimmäinen tapa on suositeltu, sillä se antaa ehkä selvemmän tavan tulkita Schrödingerin yhtälöä tehtävän (d)-kohdan kannalta.