FYSA2042 kevät 2023
Harjoitus 6
Palauta ratkaisu ke 26.4.2023 klo 8:15 mennessä, jos et osallistu demotilaisuuteen.
Palautus joko Moodleen, Matin työhuoneelle, sähköpostilla Matille, tai suoraan Matille viikon ensimmäisen demotilaisuuden alussa.

Demo 6
Return solutions by Wednesday 26.4.2023, if you are not attending the demo session.
Returns to Moodle, Matti's office, email to Matti, or directly to Matti before the first demo session of the week.
Questions in English are in the end of this sheet.

1. Jos ulkoista voimaa ei ole, niin liikeyhtälön
$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi \tag{1}$$
ratkaisu on
$$x(t) = x(0) + v(0)\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) + \frac{1}{\gamma m}\int_0^t dt'\xi(t')\left(1 - e^{-\gamma(t-t')}\right) \ . \tag{2}$$
   (a) Johda $x(t)$ ulkoisen voiman F tapauksessa, eli ratkaise
$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi + F \ , \tag{3}$$
   käyttäen hyväksi edellä annettua $F = 0$ tapausta. Tarkastele tapauksia (i) F riippuu ajasta, ja (ii) F ei riipu ajasta.
   (b) Osoita, että lyhyen ajan $\gamma t \ll 1$ hiukkanen liikkuu ballistisesti,
$$\langle x(t)\rangle = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 + \mathcal{O}(t^3) \ , \tag{4}$$
   missä $a = F/m$ on hiukkasen kiihtyvyys ulkoisen voiman F vuoksi.

2. Lisätään diffuusiovirran lisäksi ajautumisvirta (drift),
$$\mathbf{j}_{\text{diff}}(\mathbf{r}, t) = -D\boldsymbol{\nabla}n(\mathbf{r}, t) \tag{5}$$
$$\mathbf{j}_{\text{drift}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t) \ , \tag{6}$$
missä $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ on ajautumisnopeus paikassa $\mathbf{r}$, ts. nopeus, jolla tiheys paikallisesti virtaa.
   (a) Johda Fokker-Planck yhtälö
$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}n) \qquad \text{Fokker-Planck yhtälö (3D)} \ . \tag{7}$$
   sijoittamalla kokonaisvirta jatkuvuusyhtälöön (ks. luennot).
   (b) Tarkastellaan Brownin liikettä gravitaatiokentässä. Gravitaatiovoima on $F = -mg$, missä g on gravitaatiokiihtyvyys, ja hiukkasten ajautumisnopeus on vakio,
$$u(z) = \mu F = -\mu mg \ , \tag{8}$$
   missä μ on liikkuvuus. Muuttumattomassa tilassa $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, ja diffuusiovirta ja ajautumisvirta z-suunnassa kumoavat toisensa, joten ratkaistava Fokker-Planck yhtälö on
$$j = j_{\text{diff}} + j_{\text{drift}} = 0 \ . \tag{9}$$
   Vertaa saatua tiheyttä statistisen mekaniikan tulokseen (C on vakio)
$$n(z) = C\exp\left(-\frac{mg}{k_BT}z\right) \ , \tag{10}$$
   niin saat tulokseksi Einsteinin relaation $D = \mu k_BT$.

3. Einstein laski vuonna 1905 kuinka kauas lähtökohdastaan säteeltään 1 μm pallo matkaa keskimäärin minuutin aikana vedessä, jonka lämpötila on 17 °C. Hän sai tulokseksi 6 μm, joten liikkeen voi havaita optisella mikroskoopilla. Toista lasku.
Vihje: tarvitset Stokesin lauseketta kitkakertoimen ja viskositeetin välille, sekä yhtälöä $D = \mu k_B T = \frac{k_B T}{\gamma m}$. Veden viskositeetti löytyy netistä.

4. Olkoon $S(\tau)$ määrätyn rahoitusvälineen (esim. osake, laina, ym.) hinta ajan τ funktiona ja $C(\tau, S(\tau))$ tästä johdannaisen rahoitusvälineen (esim. optio) hinta ajan ja rahoitusvälineen hinnan funktiona. Tiettyjen olettamusten vallitessa johdannaisen hinnan kehitystä voidaan mallintaa Black-Scholes -yhtälöllä

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}\right) + rS\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) - rC = 0\ , \tag{11}$$

missä r on riskivapaa korko ja σ rahoitusvälineen hinnan fluktuaatioiden voimakkuutta kuvaava volatiliteetti.

(a) Lähde liikkeelle yksiulotteisesta lämpöyhtälöstä homogeeniselle aineelle, ja tee koordinaatistomuunnos $x' = x - vt$ tasaisella nopeudella v (voit valita yksiköt s.e. $v = 1$) liikkuvaan koordinaatistoon. Tee tämän jälkeen toinen koordinaatistomuunnos muuttujista t ja $x'(t)$ uusiin muuttujiin τ ja $\hat{S}(\tau)$ muunnosyhtälöillä

$$t(\tau) = \frac{(r - \sigma^2/2)^2}{\sigma^2/2}(T - \tau) \quad \text{ja} \quad x'(t) = \hat{x}\left(\hat{S}(\tau)\right) = \hat{S}(\tau)\frac{(r - \sigma^2/2)}{\sigma^2/2}, \tag{12}$$

ja osoita, että lämpöyhtälö voidaan näiden muunnosten jälkeen kirjoittaa muodossa

$$\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \tau}\right)_{\hat{S}} = -(r - \sigma^2/2)\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau} + \frac{D_T \sigma^2}{2}\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau}, \tag{13}$$

missä $\hat{T}(\tau, \hat{S}) = T(t, x)$.

(b) Kirjoita seuraavaksi lämpötilafunktio $\hat{T}(\tau, \hat{S})$ tulona $e^{-r\tau}\hat{C}\left(\tau, \hat{S}(\tau)\right)$, ja näytä, että muuttujanvaihdolla $\hat{S} = \ln(S/K)$ saadaan Black-Scholes-yhtälö, kun termisen diffuusiokertoimen D_T arvo valitaan sopivasti.

(c) Minkälaisella koordinaatistomuunnoksella ja diffuusiovakion arvon valinnalla päädytään kolmiulotteisesta diffuusioyhtälöstä

$$\frac{\partial n(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -D\nabla^2 n(t, \mathbf{x}) \tag{14}$$

Schrödingerin yhtälöön

$$i\hbar\frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi(t, \mathbf{x}), \tag{15}$$

kun $n(t, \mathbf{x}) \to \psi(t, \mathbf{x})$ seuraa jostakin muunnoksesta? Minkälaista kvanttimekaanista systeemiä kyseinen yhtälö kuvaa?

(d) Diffuusioyhtälö mallintaa nimensä mukaisesti mikroskooppisten hiukkasten lukumäärätiheyden diffuusiota ajan kuluessa. Minkä suureiden "diffuusiota" lämpöyhtälö, Schrödingerin yhtälö, ja Black-Scholes -yhtälö kuvaavat?

1. If there is no external force, the equation of motion is

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi \tag{16}$$

and the solution is

$$x(t) = x(0) + v(0)\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) + \frac{1}{\gamma m}\int_0^t dt'\xi(t')\left(1 - e^{-\gamma(t-t')}\right) \ . \tag{17}$$

   (a) Find $x(t)$ in the presense of an external force F, e.g. solve

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi + F \ , \tag{18}$$

   using the case $F = 0$ solution given above. Examine the cases (i) F depends on time, and (ii) F doesn't depend on time.

   (b) Show, that during a short period $\gamma t \ll 1$ the particle motion is ballistic,

$$\langle x(t)\rangle = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 + \mathcal{O}(t^3) \ , \tag{19}$$

   where $a = F/m$ is the acceleration of the particle due to the external force F.

2. Let's combine diffusion current with drift current,

$$\mathbf{j}_{\text{diff}}(\mathbf{r}, t) = -D\boldsymbol{\nabla} n(\mathbf{r}, t) \tag{20}$$

$$\mathbf{j}_{\text{drift}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t) \ , \tag{21}$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ is the drift velocity at $\mathbf{r}$, i.e. the local velocity of the gas flow.

   (a) Derive the Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}n) \qquad \text{Fokker-Planck equation (3D)} \ . \tag{22}$$

   by inserting the total current to the continuity equation (see lecture notes).

   (b) Let's examine Brownian motion under gravity. The gravitational force is $F = -mg$, where g is the acceleration of gravity, and the drift velocity is constant,

$$u(z) = \mu F = -\mu m g \ , \tag{23}$$

   where μ is the mobility. In a steady state $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, and the diffusion and drift currents (in z direction) cancel each other, so the Fokker-Planck equation to be solved is

$$j = j_{\text{diff}} + j_{\text{drift}} = 0 \ . \tag{24}$$

   Compare the resulting density to the result given by statistical mechanics, (C is a constant)

$$n(z) = C\exp\left(-\frac{mg}{k_B T}z\right) \ , \tag{25}$$

   and you obtain the Einstein relation $D = \mu k_B T$.

3. Olkoon $S(\tau)$ määrätyn rahoitusvälineen (esim. osake, laina, ym.) hinta ajan τ funktiona ja $C(\tau, S(\tau))$ tästä johdannaisen rahoitusvälineen (esim. optio) hinta ajan ja rahoitusvälineen hinnan funktiona. Tiettyjen olettamusten vallitessa johdannaisen hinnan kehitystä voidaan mallintaa Black-Scholes -yhtälöllä

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}\right) + rS\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) - rC = 0 \ , \tag{26}$$

missä r on riskivapaa korko ja σ rahoitusvälineen hinnan fluktuaatioiden voimakkuutta kuvaava volatiliteetti.

(a) Lähde liikkeelle yksiulotteisesta lämpöyhtälöstä homogeeniselle aineelle, ja tee koordinaatistomuunnos $x' = x - vt$ tasaisella nopeudella v (voit valita yksiköt s.e. $v = 1$) liikkuvaan koordinaatistoon. Tee tämän jälkeen toinen koordinaatistomuunnos muuttujista t ja $x'(t)$ uusiin muuttujiin τ ja $\hat{S}(\tau)$ muunnosyhtälöillä

$$t(\tau) = \frac{(r - \sigma^2/2)^2}{\sigma^2/2}(T - \tau) \quad \text{ja} \quad x'(t) = \hat{x}\left(\hat{S}(\tau)\right) = \hat{S}(\tau)\frac{(r - \sigma^2/2)}{\sigma^2/2}, \tag{27}$$

ja osoita, että lämpöyhtälö voidaan näiden muunnosten jälkeen kirjoittaa muodossa

$$\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \tau}\right)_{\hat{S}} = -(r - \sigma^2/2)\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau} + \frac{D_T \sigma^2}{2}\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau}, \tag{28}$$

missä $\hat{T}(\tau, \hat{S}) = T(t, x)$.

(b) Kirjoita seuraavaksi lämpötilafunktio $\hat{T}(\tau, \hat{S})$ tulona $e^{-r\tau}\hat{C}\left(\tau, \hat{S}(\tau)\right)$, ja näytä, että muuttujanvaihdolla $\hat{S} = \ln(S/K)$ saadaan Black-Scholes-yhtälö, kun termisen diffuusiokertoimen D_T arvo valitaan sopivasti.

(c) Minkälaisella koordinaatistomuunnoksella ja diffuusiovakion arvon valinnalla päädytään kolmiulotteisesta diffuusioyhtälöstä

$$\frac{\partial n(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -D\nabla^2 n(t, \mathbf{x}) \tag{29}$$

Schrödingerin yhtälöön

$$i\hbar\frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi(t, \mathbf{x}), \tag{30}$$

kun $n(t, \mathbf{x}) \to \psi(t, \mathbf{x})$ seuraa jostakin muunnoksesta? Minkälaista kvanttimekaanista systeemiä kyseinen yhtälö kuvaa?

(d) Diffuusioyhtälö mallintaa nimensä mukaisesti mikroskooppisten hiukkasten lukumäärätiheyden diffuusiota ajan kuluessa. Minkä suureiden "diffuusiota" lämpöyhtälö, Schrödingerin yhtälö, ja Black-Scholes -yhtälö kuvaavat?

1. If there is no external force, the equation of motion is

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi \tag{31}$$

and the solution is

$$x(t) = x(0) + v(0)\frac{1}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) + \frac{1}{\gamma m}\int_0^t dt'\xi(t')\left(1 - e^{-\gamma(t-t')}\right) \ . \tag{32}$$

   (a) Find $x(t)$ in the presense of an external force F, e.g. solve

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} + \xi + F \ , \tag{33}$$

   using the case $F = 0$ solution given above. Examine the cases (i) F depends on time, and (ii) F doesn't depend on time.

   (b) Show, that during a short period $\gamma t \ll 1$ the particle motion is ballistic,

$$\langle x(t)\rangle = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 + \mathcal{O}(t^3) \ , \tag{34}$$

   where $a = F/m$ is the acceleration of the particle due to the external force F.

2. Let's combine diffusion current with drift current,

$$\mathbf{j}_{\text{diff}}(\mathbf{r}, t) = -D\boldsymbol{\nabla} n(\mathbf{r}, t) \tag{35}$$

$$\mathbf{j}_{\text{drift}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t) \ , \tag{36}$$

where $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ is the drift velocity at $\mathbf{r}$, i.e. the local velocity of the gas flow.

   (a) Derive the Fokker-Planck equation

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n - \boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}n) \qquad \text{Fokker-Planck equation (3D)} \ . \tag{37}$$

   by inserting the total current to the continuity equation (see lecture notes).

   (b) Let's examine Brownian motion under gravity. The gravitational force is $F = -mg$, where g is the acceleration of gravity, and the drift velocity is constant,

$$u(z) = \mu F = -\mu mg \ , \tag{38}$$

   where μ is the mobility. In a steady state $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$, and the diffusion and drift currents (in z direction) cancel each other, so the Fokker-Planck equation to be solved is

$$j = j_{\text{diff}} + j_{\text{drift}} = 0 \ . \tag{39}$$

   Compare the resulting density to the result given by statistical mechanics, (C is a constant)

$$n(z) = C\exp\left(-\frac{mg}{k_BT}z\right) \ , \tag{40}$$

   and you obtain the Einstein relation $D = \mu k_B T$.

3. In 1905, Einstein calculated how far from the starting point a spherical particle of radius $1\,\mu$m traverses on average in one minute in water at temperature $17\,°$C. He got the result $6\,\mu$m, quite observable using an optical microscope. Repeat the calculation. Hint: You'll need Stokes' relation for friction coefficient and viscosity, and the equation $D = \mu k_B T = \frac{k_B T}{\gamma m}$. The viscosity of water is in the net.

4. Let $S(\tau)$ be the price of a certain financial instrument (e.g. stock, loan etc.) as a function of time τ, and $C(\tau, S(\tau))$ the price of the derived financial instrument (e.g. option, future, contract etc.) as a function of time and the price of the financial instrument. Under certain assumptions, the price development of the derived financial instrument can be modeled using the Black-Scholes equation,

$$\left(\frac{\partial C}{\partial \tau}\right) + rS\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) - rC = 0 \ , \tag{41}$$

where r is the risk-free rate, and σ the volatility describing the price fluctuations of the financial instrument.

(a) Starting from the one-dimensional heat equation for homogeneous matter, use the coordinate transformations $x' = x - vt$ to a coordinate system that moves with the constant velocity v (you may choose units so that $v = 1$). After that, make another tranformation from t and $x'(t)$ to new variables τ and $\hat{S}(\tau)$ using

$$t(\tau) = \frac{(r - \sigma^2/2)^2}{\sigma^2/2}(T - \tau) \quad \text{ja} \quad x'(t) = \hat{x}\left(\hat{S}(\tau)\right) = \hat{S}(\tau)\frac{(r - \sigma^2/2)}{\sigma^2/2}, \tag{42}$$

and show that the heat equation can now be written in the form

$$\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \tau}\right)_{\hat{S}} = -(r - \sigma^2/2)\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau} + \frac{D_T \sigma^2}{2}\left(\frac{\partial \hat{T}(\tau, \hat{S})}{\partial \hat{S}}\right)_{\tau}, \tag{43}$$

where $\hat{T}(\tau, \hat{S}) = T(t, x)$.

(b) Next, write the temperature function $\hat{T}(\tau, \hat{S})$ as a product $e^{-r\tau}\hat{C}\left(\tau, \hat{S}(\tau)\right)$, and show that with the change of variables $\hat{S} = \ln(S/K)$ you recover the Black-Scholes equation, with a suitable choice of the thermal diffusivity D_T.

(c) What coordinate transformation and choice of the diffusion constant turns the three-dimensions diffusion equation

$$\frac{\partial n(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -D\nabla^2 n(t, \mathbf{x}) \tag{44}$$

into the Schrödingerin equation,

$$i\hbar\frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t, \mathbf{x}), \tag{45}$$

assuming $n(t, \mathbf{x}) \to \psi(t, \mathbf{x})$ using some unspecified transformation. What kind of quantum system does the equation desctribe?

(d) The diffusion equation is a model of diffusion of the number density of microscopic particles as time advances. What quantities “diffuse” in the heat equation, in the Schrödinger equation, and in the Black-Scholes equation, respectively?