**FYSA2042 kevät 2023**
Harjoitus 5
**Huom: Kurssilla arvioidaan vain yksi kirjallisena palautettu demovastaus!**
Jos et osallistu tähän demotilaisuuteen, palauta ratkaisu ke 17.4.2024 klo 8:15 mennessä joko Moodleen, Matin työhuoneelle, sähköpostilla Matille, tai suoraan Matille viikon ensimmäisen demotilaisuuden alussa.

Demo 5
**Note: Only one written demo return is accepted in this course!**
If you are not attending this demo session, please return solutions by Wednesday 17.4.2024 8:15 to Moodle, Matti's office, email to Matti, or directly to Matti.
Questions in English are in the end of this sheet.

1. Oletetaan, että aineen pinnalla lämpötila vaihtelee periodisesti taajuudella $\omega$,

$$T(z=0,t) = T_0 \sin(\omega t) \ . \tag{1}$$

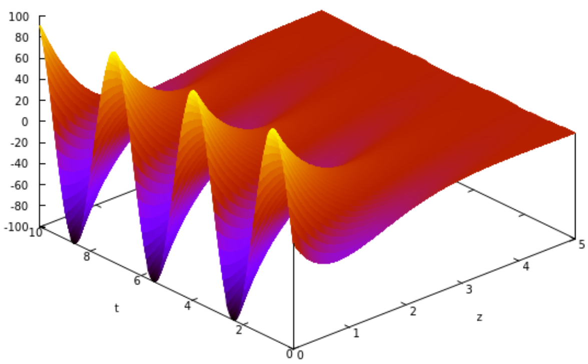
Lämpötila syvyyden $z$ ja ajan $t$ funktiona saadaan ratkaisemalla differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \ , \tag{2}$$

missä $D_T$ on vakio, ja tuloksena saadaan lämpötila aineen sisällä,

$$T(z,t) = T_0 e^{-z/s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) \ , \tag{3}$$

missä $s = (2D_T/\omega)^{1/2}$ on tunkeutumissyvyys.

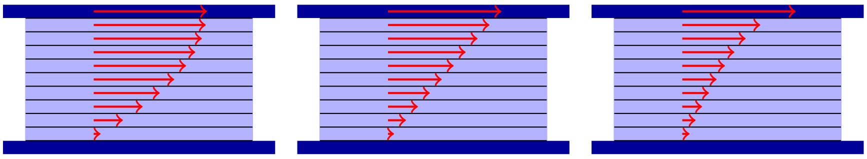



Käy läpi ratkaisu Matikkapakista (alikohta `Sovellus: Lämmön johtuminen`). Kiinnitä huomiota (i) tarvittaviin matemaattisiin menetelmiin (ii) ratkaisun fysikaalisiin vaatimuksiin. Miksi ratkaisussa on $\omega t - \frac{z}{s}$, eikä pelkkä $\omega t$?

2. Johda luennoilla annettu Wiedemann-Franz laki lämmönjohtavuuden $\kappa$ ja sähkönjohtavuuden $\sigma$ välillä.

3. Osoita, että Maxwell-Boltzmann kaasun keskimääräinen vapaa matka on kääntäen verrannollinen tiheyteen. Seuraus: viskositeetti ei riipu kaasun tiheydestä.

4. Ylempi levy liikkuu oikealle ja alempi levy on paikallaan. Kuvan nuolet esittävät kaavamaisesti fluidin (kaasun tai nesteen) virtausta kerroksittain, nuolten pituus vastaa virtausnopeutta. Ovatko kuvien esittämät tilanteet fysikaalisesti mahdollisia? Hahmottele putkessa virtaavan nesteen nopeusprofiili (netistä löytyy paljon kuvia).



5. Boltzmannin $H$-teoreeman mukaan $\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0$, missä yhtäsuuruus pätee termodynaamisessa tasapainossa. Tasapainossa (ks. luennot)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow f_{1'} f_{2'} - f_1 f_2 = 0 \Leftrightarrow \ln f_{1'} + \ln f_{2'} = \ln f_1 + \ln f_2 \ . \tag{4}$$

missä $f_k := f_0(\mathbf{p}_k)$. Osoita, että

$$f_0(\mathbf{p}) = a_1 e^{-a_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2} \ , \tag{5}$$

missä $a_1$ ja $a_2$ ovat vakioita, ja $\mathbf{p}_0$ on kaasun keskimääräinen virtausnopeus. Vakiot voidaan määrätä normittamalla ja asettamalla energian odotusarvoksi ekvipartitioteoreeman $\frac{3}{2}k_B T$, ja osoittautuu, että $f_0(\mathbf{p})$ on Maxwell-Boltzmann jakauma.
Vihje: Yhtälö (4) on suureen $\ln f_0(\mathbf{p})$ säilymislaki törmäyksissä. Ainoat liikemäärästä $\mathbf{p}$ riippuvat suureet, jotka säilyvät törmäyksissä ovat (i) liikemäärän komponentit $p_x$,$p_y$,$p_z$ (ii) liike-energia ($\mathbf{p}^2$), ja (iii) vakio, ja näiden lineaarikombinaatiot. Selvitä mitä kertoimet $c_1, ..., c_5$ ovat lausekkeessa

$$\ln f_0(\mathbf{p}) = c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 pz + c_4 \mathbf{p}^2 + c_5 \ . \tag{6}$$

1. Assuming, that the surface of a material is exposed to periodically (frequency $\omega$) varying temperature,

$$T(z=0,t) = T_0 \sin(\omega t) \ . \tag{7}$$

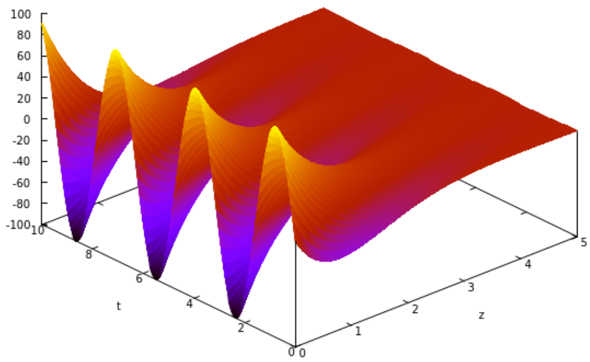
The temperature inside the material varies as a function of time $t$ and depth $z$ is found by solving the differential equation

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \ , \tag{8}$$

where $D_T$ is constant, and the result is

$$T(z,t) = T_0 e^{-z/s} \sin\left(\omega t - \frac{z}{s}\right) \ , \tag{9}$$

where $s = (2D_T/\omega)^{1/2}$ is the penetration depth.

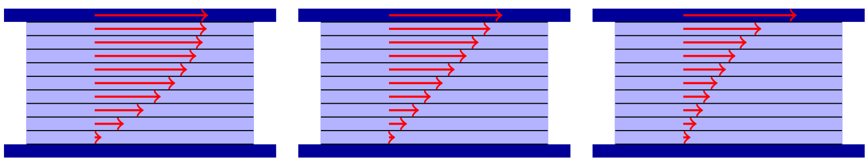



Go through the solution in Matikkapakki (subsection `Sovellus: Lämmön johtuminen`). Pay attention to (i) mathematical tools (i) physical requirements for the solution. It's in Finnish, but you get an ideal of the math. Can you explain why the solution has $\omega t - \frac{z}{s}$, and now just $\omega t$?

2. Derive the Wiedemann-Franz between thermal conductivity $\kappa$ and electric conductivity $\sigma$.

3. Show, that the mean fee path of Maxwell-Boltzmann gas is inversely proportional to to density. Consequently, viscosity is independent of density.

4. The upper plate moves to the right, while the lower plate is static. The arrows show schematically, the flow of the fluid in layers, the length of the arrows correspond the flow velocity. Are all the depicted situations physically possible? Draw a scetch of the velocity profile of fluid flowing in a pipe (plenty of figures in the net).



5. According to Boltzmann $H$-theorem $\frac{\partial H}{\partial t} \leq 0$, where the equality applies in thermodynamical equilibrium. In equilibrium we get (given in lecture notes)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow f_{1'} f_{2'} - f_1 f_2 = 0 \Leftrightarrow \ln f_{1'} + \ln f_{2'} = \ln f_1 + \ln f_2 \ . \tag{10}$$

where $f_k := f_0(\mathbf{p}_k)$. Show, that

$$f_0(\mathbf{p}) = a_1 e^{-a_2(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)^2} \ , \tag{11}$$

where $a_1$ and $a_2$ are constants, and $\mathbf{p}_0$ is the average flow momentun of the gas. The constants can be determined with normalizaton and setting the energy expectation value to $\frac{3}{2}k_B T$, the equipartition value; it turns out that $f_0(\mathbf{p})$ is the Maxwell-Boltzmann distribution.
Hint: Eq. (10) is a conservation law for $\ln f_0(\mathbf{p})$ in collisions. The only momentum-dependent collision invariants are (i) momentum components $p_x$,$p_y$,$p_z$, (ii) kinetic energy ($\mathbf{p}^2$), and (iii) a constant, and their linear combinations. Find out the coefficients $c_1, ..., c_5$ in the expression

$$\ln f_0(\mathbf{p}) = c_1 p_x + c_2 p_y + c_3 pz + c_4 \mathbf{p}^2 + c_5 \ . \tag{12}$$