FYSA2042 kevät 2024
Harjoitus 4
Huom: Kurssilla arvioidaan vain yksi kirjallisena palautettu demovastaus!
Jos et osallistu tähän demotilaisuuteen, palauta ratkaisu ke 10.4.2024 klo 8:15 mennessä joko Moodleen, Matin työhuoneelle, sähköpostilla Matille, tai suoraan Matille viikon ensimmäisen demotilaisuuden alussa.

Demo 4
Note: Only one written demo return is accepted in this course!
If you are not attending this demo session, please return solutions by Wednesday 10.4.2024 8:15 to Moodle, Matti's office, email to Matti, or directly to Matti.
Questions in English are in the end of this sheet.

1. Osoita, että kriittisen lämpötilan alapuolella vuorovaikuttamattomien bosonien entropia on

$$S = \frac{5}{2}\frac{PV}{T} = \frac{5}{2}\frac{k_B V}{\lambda_T^3}\zeta(5/2)\ . \tag{1}$$

Vihje: Käytä luennoissa johdettua paineen ja energiatiheyden välistä relaatiota, sekä Eulerin yhtälöä $U = TS - PV + \mu N$ (ks. kurssin A-osa).

2. Osoita, että vuorovaikuttamattomien fermionien entropia lähellä lämpötilaa $T = 0$ on

$$S = N\epsilon_F \frac{\pi^2}{2} T^{-1} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^2\ . \tag{2}$$

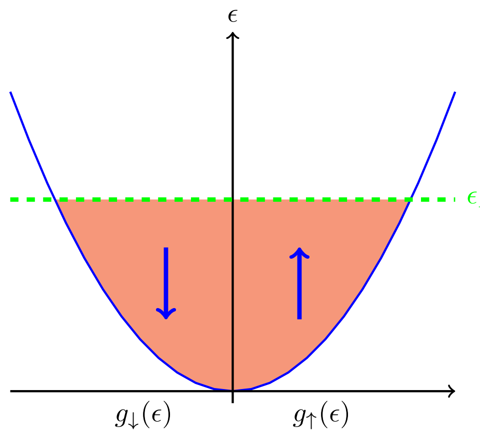
Kumman entropia kasvaa nopeammin T:n funktiona, bosonien vai fermionien? Miksi?

3. Osoita, että fotonin entropia ei riipu lämpötilasta.
Vihje: Laske fotonien lukumäärä N ja sisäenergia U, laske entropia fotonia kohti Eulerin yhtälöstä.
Merkitys: Lämmin kappale säteilee fotoneja Planckin lain mukaisella energiajakaumalla, mutta fotonin alkuperästä riippumatta sen entropia on lämpötilasta riippumaton universaali kvanttimekaaninen suure.

4. Kerro sanallisesti vapaan elektronikaasun magnetoituman paramagneettisen ja diamagneettisen osuuden fysikaalinen tausta.

5. Elektronien magneettinen momentti on μ_B (Bohrin magnetoni), ja ulkoisessa magneettikentässä B yksihiukkasenergiat ovat on $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B B$.

   (a) Kuvassa on hahmoteltu miehitetyt energiatilat tapauksessa $B = 0$. Hahmottele tilanne, kun $B \neq 0$.



(b) Osoita, että lämpötilassa $T = 0$ ideaalisen elektronikaasun magnetoituma on

$$M = \mu_B(N_+ - N_-) = \frac{3}{2}N\frac{\mu_B^2 B}{\epsilon_F} \qquad \text{Paulin paramagnetismi} \ , \tag{3}$$

pienen magneettikentän rajalla, $\mu_B B \ll \epsilon_F$, ja N_+ ja N_- ovat elektronien lukumäärät spinsuuntiin ja $N_+ + N_- = N$.

(c) Johda magneettisen suskeptiivisuuden lauseke ja laske magnesiumin (Mg) suskeptiivisuus. Mg:n fermienergia on 7 eV, tiheys on 1700 kg/m^3 eli $4,2 \times 10^{28}$ atomia/m^3 ja vapaita elektroneja on 2 per atomi (mitattu arvo lämpötilassa $T =$ 20 °C on $1,2 \times 10^{-5}$).

Kurssin A-osassa johdettiin vuorovaikuttamattomien magneettisten momenttien hilan Curien laki,

$$M = N\frac{\mu_B^2 B}{k_B T} \qquad \text{Curien paramagnetismi} \ . \tag{4}$$

Vertaa tästä saatavaa suskeptiivisuutta Paulin paramagnetismin kaavaan. Paulin paramagnetismiin vaikuttavat vain johtavuuselektronit, kun taas "tavalliseen", Curien paramagnetismiin vaikuttavat kaikki pariutumattomat elektronit; siksi jälkimmäinen on voimakkaampi. [1]

[1] Atomi on paramagneettinen, jos sillä on pariutumaton elektroni (atomilla on netto spin), muuten se on diamagneettinen.

1. Show that the entropy of noninteracting bosons below the critical temperature is

$$S = \frac{5}{2}\frac{PV}{T} = \frac{5}{2}\frac{k_B V}{\lambda_T^3}\zeta(5/2) \ . \tag{5}$$

Hint: Use the relation between pressure and energy density, derived in lecture notes, and Euler's equation (see course part A) $U = TS - PV + \mu N$.

2. Show that near $T = 0$ the entropy of noninteracting fermions is

$$S = N\epsilon_F \frac{\pi^2}{2} T^{-1} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^2 \ . \tag{6}$$

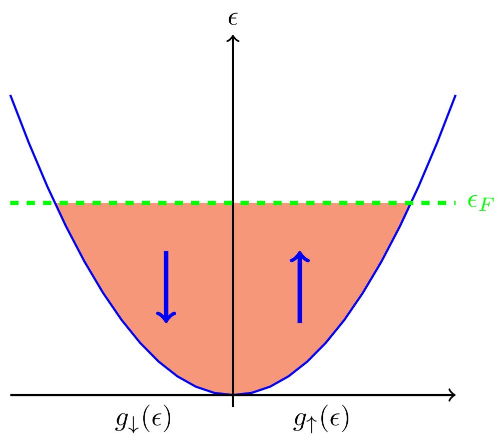
Which entropy grows faster as a function of T, bosons or fermions? Why?

3. Show that the entropy per photon is independent of temperature.
Hint: Write down the number of photons N, and internal energy U, find the entropy of a phonon using Euler's equation.
Significance: A warm body radiates photons according to the energy distribution given by Planck's law, but regardless of the origin of a photon, it's entropy is a universal temperature independent quantum mechanical property.

4. In words, explain the physics of the paramagnetic and diamagnetic contributions of the magnetization of free electron gas.

5. The electron magnetic moment is μ_B (Bohr magneton), and in external magnetic field B the single particle energies are $\epsilon_{\mathbf{p}} = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B B$.

   (a) The figure depicts the occupied energy states at $B = 0$. Sketch the situation for $B \neq 0$.



   (b) Show, that at $T = 0$ ideal electron gas has magnetization

$$M = \mu(N_+ - N_-) = \frac{3}{2}N\frac{\mu_B^2 B}{\epsilon_F} \quad \text{Pauli paramagnetism} \ , \tag{7}$$

   in the weak field limit, $\mu_B B \ll \epsilon_F$; N_+ and N_- are electron numbers in the two spin directions, and $N_+ + N_- = N$.

   (c) Derive the formula for magnetic susceptibility and calculate the susceptibility of magnesium (Mg). Mg has Fermi energy 7 eV, density 1700 kg/m^3 so that it has $4,2 \times 10^{28}$ atoms/m^3 and 2 free electrons per atom. (the measured value at $T = 20$ °C is $1,2 \times 10^{-5}$).
   In part A we derived the magnetization of noninteracting magnetic moments in lattice, Curie's law,

$$M = N\frac{\mu_B^2 B}{k_B T} \quad \text{Curie paramagnetism} \ . \tag{8}$$

Compare the resulting susceptibility with that of Pauli paramagnetism. Pauli paramagnetism comes from conduction electrons, while the "ordinary" Curie paramagnetism comes from all unpaired electrons, which makes the latter stronger. [2]

[2] An atom is paramagnetic, if it has an unpaired electron (the atom has a net spin), otherwise it's diamagnetic.