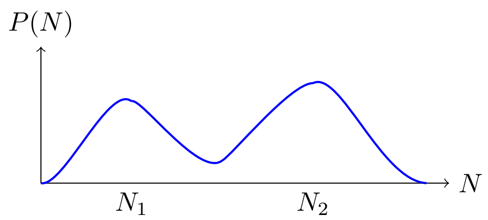
FYSA2042 kevät 2024
Harjoitus 2
Huom: Kurssilla arvioidaan vain yksi kirjallisena palautettu demovastaus!
Jos et osallistu tähän demotilaisuuteen, palauta ratkaisu ke 20.3.2024 klo 8:15 mennessä joko Moodleen, Matin työhuoneelle, sähköpostilla Matille, tai suoraan Matille viikon ensimmäisen demotilaisuuden alussa.

Demo 2
Note: Only one written demo return is accepted in this course!
If you are not attending this demo session, please return solutions by Wednesday 20.3.2024 8:15 to Moodle, Matti's office, email to Matti, or directly to Matti.
Questions in English are in the end of this sheet.

1. Tilojen energiat ovat 0, ϵ, 2ϵ ja 3ϵ. Kirjoita partitiofunktiot
   (a) kolmelle vuorovaikuttamattomalle bosonille
   (b) kolmelle vuorovaikuttamattomalle fermionille

2. Suurkanonisessa joukossa systeemin hiukkasluku vaihtelee, koska hiukkasia systeemin ja ympäristön (hiukkaskylpy) välillä. Systeemin hiukkasluvun odotusarvo $\langle N \rangle$ laskettiin luennoissa, mutta paljon muutakin voi laskea.
   (a) Osoita, että todennäköisyys että systeemissä on N hiukkasta saadaan kaavasta
   $$P(N) = \frac{z^N Z_N}{\mathcal{Z}} \ , \tag{1}$$
   missä $z = e^{\beta\mu}$ on fugasiteetti, Z_N on N hiukkasen kanoninen partitiofunktio, ja $\mathcal{Z}$ on suurkanoninen partitiofunktio.
   (b) Osoita, että edellä annettu $P(N)$ on oikein normitettu.

3. Jos todennäköisyydellä $P(N)$ on yksi maksimi, niin tilanne on melko selvä. Mutta mitä tarkoittaa, jos käyrässä on kuvan mukaisesti kaksi maksimia?



Vihje: Jos lämpötila on T ja systeemin tilavuus on V, ja siellä on melko suurilla todennäköisyyksillä hiukkasluvut N_1 tai N_2, niin mitä siellä on tekeillä?

4. Lämpötilassa T on N:n hiukkasen kemiallinen potentiaali

$$\mu(N,T) = F(N+1,T) - F(N,T) \ , \tag{2}$$

missä $F(N,T)$ on N:n hiukkasen Helmholtzin vapaa energia lämpötilassa T. Huomaa, että nyt tarkastellaan systeemiä pelkästään lämpökylvyssä, ei hiukkaskylvyssä. Tässä on siis kysymys *kanonisen joukon kemiallisesta potentiaalista* $\mu(N,T)$. Tarkastelun voisi tehdä myös lämpö- ja painekylvyssä, jolloin $\mu(N,T) = G(N+1,T) - G(N,T)$.

   (a) Miksi $\mu(N,T)$ on järkevää kirjoittaa em. tavalla? Vihje: Kirjoita dF ja lue siitä μ, ja sovella hiukkaslukuihin N ja $N+1$.

   (b) Suurkanonisessa joukossa hiukkasmäärää kontrolloi niinikään kemiallinen potentiaali, mutta kanoninen ja suurkanoninen kemiallinen potentiaali eivät yleensä ole samat. Osoita, että kanonisen joukon kemiallinen potentiaali $\mu(N,T)$ ja suurkanonisen joukon kemiallinen potentiaali $\mu(T)$ liittyvät toisiinsa kaavalla

$$\mu(N,T) = \mu(T) - k_B T \ln\left(\frac{P(N+1)}{P(N)}\right) \ , \tag{3}$$

   missä $P(N)$ on tehtävässä 1 annettu todennäköisyys, että systeemissä on N hiukkasta.

5. Keskustelunaihe: ^{4}He atomi koostuu kahdesta protonista, kahdesta neutronista ja kahdesta elektronista, jotka kaikki ovat fermioneja. Silti ^{4}He atomit ovat bosoneja. Miten fermioneista voi muodostua bosoni? Voiko bosoneista koota fermionin?

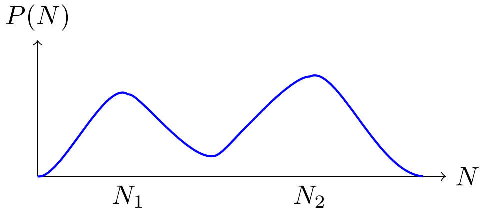
1. The states have energies 0, ϵ, 2ϵ, and 3ϵ. Give the partition function for
   (a) three bosons
   (b) three fermions

2. In the grand canonical ensemble the number of particles fluctuates, because particles move between the system and its environment (particle bath). The expectation value of particles $\langle N \rangle$ was calculated in the lecture notes, but there's more to tha can be done.
   (a) Show that the probability that the system has N particles is given by

   $$P(N) = \frac{z^N Z_N}{\mathcal{Z}} \ , \tag{4}$$

   where $z = e^{\beta\mu}$ is the fugacity, Z_N if the N-particle canonical partition function, and $\mathcal{Z}$ is the grand canonical partition function.
   (b) Show that $P(N)$ is correctly normalized.

3. If the probability $P(N)$ has one maximum, the situation is pretty clear. But what does it mean, if the curve has two maxima, depicted below?



Hint: If the temperature is T and the system volume is V, and there can be with high probability either N_1 or N_2 particles, then what is going on?

4. At temperature T the chemical potential of N particles is given by

$$\mu(N,T) = F(N+1,T) - F(N,T) \ , \tag{5}$$

where $F(N,T)$ is the N particle Helmholtz free energy at temperature T. Notice how the system is now only in a heta bath, not in a particle bath. In other words, we are discussing about *the chemical potential in the canonical ensemble* $\mu(N,T)$. The discussion could use also both heat and pressure bath, so that $\mu(N,T) = G(N+1,T) - G(N,T)$.

   (a) Why does $\mu(N,T)$ written in this way make sense? Hint: Write dF and read what μ is, apply the result for particle numbers N and $N+1$.

   (b) In the grand canonical ensemble the particle number is also controlled by the chemical potential, but the canonical and the grand canonical chemical potentials aren't usually the same. Show that $\mu(N,T)$ of the canonical ensemble and $\mu(T)$ of the grand canonical ensemble are related by the formula

$$\mu(N,T) = \mu(T) - k_B T \ln\left(\frac{P(N+1)}{P(N)}\right) \ , \tag{6}$$

   where $P(N)$ is the probability that there are N particles in the system (see question 1).

5. Discussion topic: ^{4}He atom is made of two protons, two neutrons, and two electrons, all of which are fermions. Still, ^{4}He atoms are bosons. How can fermions make up a bosons? Can bosons be collected to form a fermion?