Statistinen Fysiikka B-osa tentti 8.4.2022 vastauksia

Vesa Apaja

April 2022

1. (a) Bosoneille tilan i miehitysluvun odotusarvo on

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \ , \tag{1}$$

joten alimmalle tilalle $i = 0$ ja $\epsilon_i = 0$ saadaan

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta\mu} - 1} \geq 0 \Rightarrow e^{\beta\mu} \leq 1 \Rightarrow \mu \leq 0 \ , \tag{2}$$

koska miehitysluvun odotusarvo ei voi olla negatiivinen. Raja $\mu = 0^-$ toteutuu Bose-Einstein kondensaatiossa.

(b) Mustan kappaleen säteilyn energiatiheyden maksimi siirtyy lineaarisesti lämpötilan mukana, $\omega_{\max} \propto T$.
Vääriä vastauksia, kopioitu varmaan kaavakokoelmasta:
$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$ on Planckin säteilylaki, ei Wienin siirtymälaki.
$I(T) = \sigma T^4$ on Stefan-Boltzmann laki säteilyteholle, ei Wienin siirtymälaki.

(c) Kun $T \ll T_F$, miehittävät elektronit alimmat energiatilat Paulin kieltosäännön sallimalla tavalla; tämä on degeneroitunut elektronikaasu. Degeneroituneen elektronikaasun paine on suurin silloin, jos kaasu on lisäksi ultrarelativistista, ja silloin paine kykenee juuri ja juuri estämään 1,4 auringon massaisen tähden luhistumisen gravitaation vaikutuksesta. Tämä on Chandrasekharin massa.

(d) Luennoissa. $P - T$ tasossa on rajakäyrä, jolla BE-kondensaatio alkaa, eikä sen vasemmalle puolelle päästä lainkaan. Myös isokooreja (V vakio) voi piirtää, näitä löytyy luennoista.

(e) Törmäysintegraali kertoo sen, miten paljon faasiavaruuden tiheys $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ muuttuu sen seurauksena, että hiukkasten törmäys muuttaa niiden liikemääriä $\mathbf{p}$. Toisin sanoen, törmäysintegraali kertoo, miten hiukkasten sironta vaikuttaa tiheyteen f.

(f) Fotonien lukumäärä ei säily, joten $\mu = 0$. Energian muutos on μdN, ja koska dN voi olla mitä hyvänsä, niin jos olisi $\mu \neq 0$, niin energiakin voisi olla mitä hyvänsä.

(g) BE-kondensaatiota käsitellään kokonainen luku luennoissa. Lyhyesti, bosonien alimman tilan miehitysluvun odotusarvo $\langle n_0 \rangle$ on BE-kondensaatiossa makroskooppinen, $\langle n_0 \rangle \sim N$.

2. Suoraan luennoista. Yksihiukkastilalle i (kaava tehtävälapulla)

$$\mathcal{Z}_i = \sum_n e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)n} \ , \tag{3}$$

ja bosoneille $n = 0, 1, ..., \infty$ (sarja on geometrinen) ja fermioneille $n = 0, 1$. Summaksi saadaan

$$\mathcal{Z}_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} \ \text{(bosonit)} \quad \mathcal{Z}_i = 1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \ \text{(fermionit)} \ . \tag{4}$$

Suurkanoninen partitiofunktio on ($\mathcal{Z} = \prod_i \mathcal{Z}_i$ (kaava tehtävälapulla). Suuri potentiaali on bosoneilla (tulon logaritmi on logaritmien summa)

$$\Omega = -k_B T \ln(\mathcal{Z}) = -k_B T \sum_i \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} = k_B T \sum_i \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}) \ , \tag{5}$$

ja tilan i miehitysluvun odotusarvo on (kaava tehtävälapulla, helppo johtaakin)

$$\langle n_i \rangle = \frac{\partial \omega}{\partial \epsilon_i} = k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \sum_j \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}) \ . \tag{6}$$

Tärkeää: Muutin summausindeksiksi j:n, etteivät indeksit sekoitu -indeksisekoiluja oli puolessa tenttivastauksia! Derivoidaan termi kerrallaan,

$$\langle n_i \rangle = k_B T \sum_j \frac{\frac{\partial}{\partial \epsilon_i}[1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}]}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} = k_B T \sum_j \frac{-(-\beta) e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)} \frac{\partial \epsilon_j}{\partial \epsilon_i}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} \ , \tag{7}$$

ja koska

$$\frac{\partial \epsilon_j}{\partial \epsilon_i} = \delta_{ij} \ , \tag{8}$$

jää j-summasta vain termi $j = i$,

$$\langle n_i \rangle = \frac{e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \quad \text{bosonit} \ . \tag{9}$$

Fermionien lasku menee samalla tavalla.

3. (a) Perustietoa, tämä pitäisi osata. Suoraan luennoista.
Tapa 1:
Laske tilojen kertymäfunktio $N(\epsilon)$, eli montako tilaa on energian ϵ alapuolella, ja laske derivaatta, $g(\epsilon) = dN(\epsilon)/d\epsilon$. Ehto tiloille, jotka ovat energian ϵ alapuolella on

$$\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(i_1^2 + i_2^2 + i_3^2)\frac{\pi^2}{L^2} \leq \epsilon \Leftrightarrow (i_1^2 + i_2^2 + i_3^2) \leq \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{L^2}{\pi^2}\epsilon}_{R^2} \ , \tag{10}$$

eli pisteet (i_1, i_2, i_3) ovat R-säteisen pallon sisäpuolella, ja kukin piste vie tilavuuden 1. Koska L on suuri, on $R \gg 1$, ja tilojen lukumäärä pallon sisällä on $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{1}$. Koska pisteitä (i_1, i_2, i_3) on vain positiivisella puolella, on niitä 3-ulotteisessa k-avaruudessa vain 1/8 tilavuudesta. Kussakin pisteessä on degeneraation g kertoma määrä tiloja, joten kertymäfunktio on

$$N(\epsilon) = \frac{1}{8} \times g \times \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{1} \ . \tag{11}$$

Sijoita R ja derivoi $N(\epsilon)$. Tulos on $g(\epsilon) \propto \epsilon^{1/2}$.
Tapa 2:

$$g(\epsilon) = \sum_i \delta(\epsilon - \epsilon_i) = g \sum_{\mathbf{k}} \delta(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) \ , \tag{12}$$

missä g on k-tilojen degeneraatio. Koska k-tiloja on π/L välein kaikkiin 3 suuntaan positiivisella puolella (kaksinkertaistaa tilatiheyden joka suuntaan), on k-avaruuden tilatiheys $(2\pi/L)^3 = (2\pi)^2/V$, missä V on laatikon tilavuus. Jos L on suuri, muodostavat tilat jatkuvan massan, ja summan voi korvata integraalilla,

$$\sum_{\mathbf{k}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3/V} \ , \tag{13}$$

ja tilatiheys on

$$g(\epsilon) = g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3/V} \delta(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) = \frac{gV}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty dk k^2 \delta(\epsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m}) \ . \tag{14}$$

Muutujan vaihto, $x := \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$,

$$g(\epsilon) = \frac{gV}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^\infty dx x^{1/2}\delta(\epsilon - x) = \frac{gV}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2} , \tag{15}$$

missä Diracin deltan integrointi on nyt triviaali.

(b) Tehtävälapussa on typo, pitäisi olla potenssi 3, ei 2,

$$Z = \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right)^N , \tag{16}$$

jotta yksiköt olisivat oikein (Z on dimensioton). Typo ei vaikuta johtopäätöksiin. Kerroin $1/N!$ on Gibbsin korjaus, joten kyseessä on identtisten hiukkasten systeemi. Partitiofunktio on tulon muotoa,

$$Z = \frac{1}{N!}Z_1^N , \tag{17}$$

jossa yhden hiukkasen partitiofunktion Z_1 on vain korotettu potenssiin N, siksi kyseessä on vuorovaikuttamattomien hiukkasten systeemi.

Tilayhtälö helpolla tavalla:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -\left(\frac{\partial(-k_B T \ln Z)}{\partial V}\right)_{T,N} = k_B T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{T,N} \tag{18}$$

$$= k_B T\left(\frac{\partial \ln V^N}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{k_B T}{V} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow PV = N k_B T \quad \text{ideaalikaasun tilayhtälö} . \tag{20}$$

Derivointi oli helppo, koska

$$\ln Z = \ln V^N + \text{termejä, joissa ei ole } V\text{:tä} . \tag{21}$$

Tilayhtälö vaikeammalla tavalla:
Suurkanoninen partitiofunktio on ($z := e^{\beta\mu}$ on fugasiteetti)

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^\infty z^N Z_N = \sum_{N=0}^\infty z^N \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda_T^3}\right)^N = \sum_{N=0}^\infty \frac{1}{N!}\left(\frac{zV}{\lambda_T^3}\right)^N = \exp(\frac{zV}{\lambda_T^3}) , \tag{22}$$

sillä $e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!}x^i$. Suuripotentiaali ja paine ovat

$$\Omega = -k_B T \ln \mathcal{Z} = -k_B T \frac{zV}{\lambda_T^3} \tag{23}$$

$$P = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V}\right)_{T,\mu} = k_B T \frac{z}{\lambda_T^3} . \tag{24}$$

Näyttää rumalta, mutta lasketaan myös hiukkasluku,

$$N = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)_{T,V} = k_B T \frac{V}{\lambda_T^3}\left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)_{T,V} = k_B T \frac{V}{\lambda_T^3}\left(\frac{\partial e^{\beta\mu}}{\partial \mu}\right)_{T,V} \tag{25}$$

$$= k_B T \frac{V}{\lambda_T^3}\beta z = \frac{Vz}{\lambda_T^3} . \tag{26}$$

Sijoitetaan aiempaan, ja tulos on jälleen $PV = N k_B T$.

4. (a) Bohr-vanLeeuwen teoreema liittyy klassisen teorian magetismin kuvaukseen, vastaus löytyy luennoista, ja se oli demotehtäväkin.

   (b) Landaun tasot löytyvät luennoista, niistä oli myös demotehtävä.

   (c) Värähtelymoodien määrä, merkitsen sitä N_{moodit}, saadaan integroimalla tilatiheys,

$$N_{\text{moodit}} = \int_0^\infty d\omega g(\omega) = \int_0^{\omega_D} d\omega \frac{9N}{\omega_D^3}\omega^2 = 3N \ , \tag{27}$$

   joten katkaisutaajuus ω_D on valittu siten, että N:llä värähtelijällä kolmessa ulottuvuudessa on $3N$ värähtelymoodia. Debyen mallissa moodit ovat akustisia fononeja, joiden dispersio on $\omega = ck$, missä c on äänen nopeus. Äänen nopeus voi olla eri pitkittäisille ja poikittaisille värähtelyille, mutta se ei vaikuta Debyen mallin ominaislämpöön, vain ω_D kuvaa ainetta.

5. (a) Einstein-Smoluchowski relaatio liittää Brownin satunnaisliikkeessä olevien hiukkasten liikkeen diffuusioon (diffuusiovakio D). liike on siksak-liikettä, joten $\langle x^2\rangle \sim t$, eikä kuten tavanomaisessa suoraviivaisessa liikkeessä $\langle x^2\rangle \sim t^2$.

   (b) Fluktuaatio-dissipaatio-teoreema on kuvattu luennoissa. Ulkoisen häiriön aiheuttama muutos, jonka energia lopulta dissipoituu systeemiin, on täsmälleen samanlainen muutos, jota häiritsemättömässä systeemissä nimitetään statistiseksi fluktuaatioksi. Yksi tapaus on liikkuvuuden μ, joka liittyy viskositeetin γ kuvaamaan dissipaatioon kaavalla $1/(m\gamma)$, ja nopeusfluktuaatioiden yhteys. Jos muistaa kaavankin niin aina parempi.

   (c) Fotonit ovat bosoneja, joiden $\mu = 0$ (hiukkasluku ei säily), ja tilatiheys $g(\epsilon)$ annettiin tehtävälapulla. Fotonien lukumäärä on

$$N = \langle N\rangle = \sum_i \langle n_i\rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta\epsilon_i}-1} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon)\frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1} \tag{28}$$

$$= \frac{V}{\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 \frac{1}{e^{\beta\epsilon}-1} \ . \tag{29}$$

   Muuttujanvaihdolla $x := \beta\epsilon$ saadaan

$$N = \frac{V}{\hbar^3c^3}(k_BT)^3 \underbrace{\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x-1}}_{a} = V\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3 a \ , \tag{30}$$

   missä a on vakio.