Statistinen Fysiikka B-osa tentti 28.4.2023 vastauksia

Vesa Apaja

May 2023

1. (a) Mustan kappaleen säteilyn energiatiheyden maksimi siirtyy lineaarisesti lämpötilan mukana, $\omega_{\max} \propto T$.

   (b) Kun $T \ll T_F$, miehittävät elektronit alimmat energiatilat Paulin kieltosäännön sallimalla tavalla; tämä on degeneroitunut elektronikaasu.

   (c) Bosonien lukumäärän saa kaavasta

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1} \ . \tag{1}$$

Jos summan yli tilojen muuttaa integraaliksi käyttäen tilatiheyttä $g(\epsilon)$, niin

$$N = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} \ . \tag{2}$$

Jotta N olisi vakio, pitää μ:n kasvaa kun lämpötila laskee, mutta koska bosoneilla $\mu < 0$, niin matalin lämpötila T_c, jossa N saadaan integraalista on tapaus $\mu = 0^-$,

$$N = \int d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta_c \epsilon} - 1} \ . \tag{3}$$

Tämä määrittelee Bose-Einstein kondensaatiolämpötilan T_c, koska tätä matalammassa lämpötilassa oikean puolen integraali on alle N, mikä tarkoittaa, että osa hiukkasista kondensoituu perustilaan, eikä integraali laske näiden määrää oikein.

   (d) Jos värähtelevien atomien tai molekyylien lukumäärä on N ja avaruuden dimensio 3, niin värährelymoodeja voi olla korkeintaan $3N$. Debyen mallissa spektri $\hbar\omega = \hbar c k$, josta laskettu fononien tilatiheys on (tämän voi laskea myös kertymäfunktion avulla)

$$g(\omega) = \sum_i \delta(\omega - c k_i) \propto \int d^3k \delta(\omega - ck) = \int dk k^2 \delta(\omega - ck) \propto \omega^2 \ . \tag{4}$$

Debyen mallissa ei lasketa Debye taajuutta ω_D korkeampia taajuuksia, koska värähtelijöiden välimatka sanelee hilavärähtelyiden lyhimmän mahdollisen aallonpituuden. Siksi pitää asettaa katkaisutaajuus ω_D,

$$3N = \int_0^{\omega_D} d\omega g(\omega) \ . \tag{5}$$

   (e) Luennoissa. $P-T$ tasossa on rajakäyrä, jolla BE-kondensaatio alkaa, eikä sen vasemmalle puolelle päästä lainkaan. Myös isokooreja (V vakio) voi piirtää, näitä löytyy luennoista.

   (f) Faasiavaruuden tiheydessä $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ on kolmiulotteisessa systeemissä 3+3+1 = 7 muuttujaa. Tämä on valtava yksinkertaistus ottaen huomioon, että N hiukkasella on $3N$ koordinaattia ja sama määrä liikemääriä. Faasiavaruuden tilavuuselementissä $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$, toisin sanoen paikkavälillä $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$ ja liikemäärävälillä $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}]$, on hiukkasia

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \tag{6}$$

kappaletta. Liikemäärävälillä $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}]$ hiukkasia on (paikka on mitä hyvänsä, integroidaan pois)

$$d\mathbf{p} \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r} \tag{7}$$

2. (a) Homogeenisessa systeemissä suuri potentiaali λ-kertaistuu, kun systeemin koko kasvaa λ-kertaiseksi, ja koska $\Omega(T, V, \mu)$, on vain V muuttuu λ-kertaiseksi. Saadaan ehto

$$\Omega(T, \lambda V, \mu) = \lambda \Omega(T, V, \mu) \quad , T, \mu \text{ vakioita} \tag{8}$$

Derivoimalla yhtälön puolet λ:n suhteen saadaan (T, μ vakioita, en merkitse)

$$\frac{\partial \Omega(T, \lambda V, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda \Omega(T, V, \mu)] \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \Omega(T, \lambda V, \mu)}{\partial (\lambda V)} \frac{\partial (\lambda V)}{\partial \lambda} = \Omega(T, V, \mu) \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \Omega(T, \lambda V, \mu)}{\partial (\lambda V)} V = \Omega(T, V, \mu) \ . \tag{11}$$

Asettamalla $\lambda = 1$ tästä seuraa

$$\frac{\partial \Omega(T, V, \mu)}{\partial V} V = \Omega(T, V, \mu) \ , \tag{12}$$

ja koska $d\Omega = -SdT - PdV - Nd\mu$, on yhtälön vasemman puolen osittaisderivaatta $-P$, ja tulos on $\Omega(T, V, \mu) = -PV$. Jos jäit miettimään, miksi derivoitiin λ:n suhteen ja lopuksi asetettiin $\lambda = 1$, niin se tehtiin jotta saadaan selville suuren potentiaalin derivaatta (”muutosnopeus”), jos systeemin kokoa alettaisiin skaalata.

(b) Jos hiukkasluku ei säily, voi suuren potentiaalin differentiaalissa termi $-\mu dN$ olla mitä hyvänsä, eikä energia säilyisi - paitsi jos $\mu = 0$. Vaaditaan siis $\mu = 0$ fotoneille ja fononeille.

(c) Tämä on derivointitehtävä, aloita laskemalla

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu}\right)_{V,T} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\sum_i N_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}\right)_{V,T} \ . \tag{13}$$

Derivoitavaa μ:tä on kahdessa paikkaa, osoittajan derivoinnista tulee $\langle N^2 \rangle$, ja nimittäjän derivoinnista tulee $-\langle N \rangle^2$.

3. (a) Derivointitehtävä, yllättävän paljon tuotti ongelmia.

(b) Laskettavana on odotusarvo

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \ . \tag{14}$$

Merkitään $y = x/\sqrt{4Dt}$,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} (4Dt)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-y^2} = 4Dt \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2Dt \ . \tag{15}$$

Jos tehtävässä annettua integraalia ei halua käyttää, niin kaavakokoelman integraalista

$$\int_0^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{16}$$

saa k.o. integraalin derivoimalla puolittain a:n suhteen ja asettamalla lopuksi $a = 1$; koska integraali on nollasta äärettömiin, pitää tulos kertoa kahdella.

(c) Pannaan esim. nesteeseen mahdollisimman samanlaisia hiukkasia, jotka näkyvät mikroskoopissa. Tarkkaillaan hetken aikaa (vaikkapa filmataan), ja mitataan lopulta kuinka kauas lähtökohdastaan kukin hiukkanen ehti ajan funktiona. Tästä saadaan $\langle x^2 \rangle$, tai kolmiulotteisessa tapauksessa $\langle r^2 \rangle$. Plotataan t:n funktiona ja kulmakertoimesta saadaan yksiulotteisessa tapauksessa selville $2D$, kolmiulotteisessa tapauksessa $6D$, missä D on diffuusiovakio.

4. (a) Kun $T = 0$, on kaikki tilat fermienergiaan ϵ_F saakka miehitetty, loput tyhjiä: miehityksen odotusarvo on askelfunktio θ. Termodynaamisella rajalla tilasumman voi kirjoittaa integraalina,

$$\sum_i \to g_{\text{deg}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 V} := aV \int d^3k \ , \tag{17}$$

koska hiukkasille laatikossa sallittuja k-arvoja on kuhunkin suuntaan $2\pi/L$ välein ja $L^3 = V$. Degeneraatiota g_{deg} ei nyt tarvita (se olisi 2 spin-1/2 fermioneille). Merkitsen vakioita lyhyesti a:lla, mutta pidän tilavuuden näkyvissä paineen laskemista varten. Laskut voi tehdä lyhyesti, jos muistaa ei-relativististen vuorovaikuttamattomien fermionien tilatiheyden olevan muotoa $g(\epsilon) = aV\epsilon^{1/2}$, mutta käyn tässä läpi integroinnit k-avaruudessa. Fermionien energia on

$$E = \sum_i \epsilon_i \langle n_i \rangle = \sum_i \epsilon_i \theta(\epsilon_F - \epsilon_i) = \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} k_i^2 \theta(\epsilon_F - \frac{\hbar^2}{2m} k_i^2) \tag{18}$$

$$= aV \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3k k^2 \theta(\epsilon_F - \frac{\hbar^2}{2m} k^2) \ , \tag{19}$$

Koska $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2$, niin steppifunktio katkaiseen k-integraalin arvolla k_F,

$$E = aV \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} d^3k k^2 = aV \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \int_0^{k_F} dk k^4 = aV \frac{\hbar^2}{2m} 4\pi \frac{k_F^5}{5} \ . \tag{20}$$

Hiukkasluku saadaan samaan tapaan,

$$N = \sum_i \epsilon_i \langle n_i \rangle = aV \int d^3k \theta(\epsilon_F - \frac{\hbar^2}{2m} k^2) = aV 4\pi \int_0^{k_F} dk k^2 = aV 4\pi \frac{k_F^3}{3} \ , \tag{21}$$

joten energia fermionia kohti on

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2 = \frac{3}{5} \epsilon_F \ . \tag{22}$$

Paineen saa helpoimmin, jos muistaa luennoilta kaavan $P = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$ (tämän johtamiseen ei saa käyttää ideaalikaasun tilayhtälöä, vaikka se antaakin saman tuloksen!) Suoraan laskemalla

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T,N} = -\frac{3}{5} N \left(\frac{\partial \epsilon_F}{\partial V} \right)_{T,N} = -\frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial (k_F^2)}{\partial V} \right)_{T,N} \tag{23}$$

$$= -\frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \left(\frac{3N}{aV4\pi} \right)^{2/3}}{\partial V} \right)_{T,N} = -\frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{a4\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{\partial V^{-2/3}}{\partial V} \right)_{T,N} \tag{24}$$

$$= \frac{3}{5} N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{a4\pi} \right)^{2/3} \frac{2}{3} V^{-5/3} = \frac{2}{5} N \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{a4\pi V} \right)^{2/3}}_{\epsilon_F} V^{-1} \tag{25}$$

$$= \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V} \ . \tag{26}$$

Arvostelin tämän kevyellä asteikolla, pääasia on saada lähtökohdat kuntoon.

(b) Fermionit ovat Paulin kieltosäännön vuoksi äärellisillä liikemäärän tiloilla, minkä vuoksi ne aiheuttavat painetta myös lämpötilassa $T = 0$.

(c) Demotehtävä. Odotusarvo $\langle v \rangle$ riippuu vain lämpötilasta, joten viskositeetti on $\eta \propto \ell n$. Tiheyden n kasvaessa keskimääräinen vapaa matka ℓ lyhenee samassa suhteessa, siksi tulo ℓn ja viskositeetti ovat kaasuille hyvin tarkasti tiheydestä riippumaton.

5. Landaun tasot käsitellään luennoissa. Sijoitetaan yrite, tärkeintä on pitää selvillä mikä on liikemääräoperaattori (hatulliset) ja mikä pelkkä luku (p_x ja p_z yritteessä),

$$\frac{(\hat{p}_x - eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}\psi(\mathbf{r}) \tag{27}$$

$$= \frac{(\hat{p}_x)^2 - 2eBy\hat{p}_x + (eBy)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\varphi(y) \tag{28}$$

$$= \frac{-\hbar^2\partial_x^2 + 2eByi\partial_x + (eBy)^2 - \hbar^2\partial_y^2 - \hbar^2\partial_z^2}{2m} e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\varphi(y) \tag{29}$$

$$= e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\frac{1}{2m}\left[p_x^2 - 2eByp_x + (eBy)^2 - \hbar^2\partial_y^2 + p_z^2\right]\varphi(y) \tag{30}$$

$$= \epsilon\; e^{i(p_x x + p_z z)/\hbar}\varphi(y) \tag{31}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m}\left[p_x^2 - 2eByp_x + (eBy)^2 - \hbar^2\partial_y^2 + p_z^2\right]\varphi(y) = \epsilon\varphi(y)\ . \tag{32}$$

Siirretään $p_z^2/(2m)$ oikealle ja kirjoitetaan termejä neliöksi,

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + \frac{1}{2m}(p_x - 2eByp_x + (eBy)^2)\right]\varphi(y) = \left(\epsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi(y) \tag{33}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + \underbrace{\frac{(eB)^2}{2m}}_{\frac{1}{2}m\omega^2}(y - \underbrace{\frac{p_x}{eB}}_{y_0})^2\right]\varphi(y) = \left(\epsilon - \frac{p_z^2}{2m}\right)\varphi(y)\ . \tag{34}$$

Tämä on harmonisen oskillaattorin yhtälö, joten tuloksena saadaan Landaun tasot,

$$\epsilon - \frac{p_z^2}{2m} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon = (n + \frac{1}{2})\hbar + \frac{p_z^2}{2m}\omega\ . \tag{36}$$

Kutakin kvanttilukua n ja siten energiaa vastaa suuri joukko oskillaattoreita, joilla on vain eri keskipiste y_0. Keskipiste voi olla missä hyvänsä aineen sisällä magneettikenttää kohtisuorassa suunnassa. Jos kappaleen dimensiot ovat $L_x \times L_y \times L_z$, niin y_0 voi olla tasossa, jonka koko on $L_x \times L_y$. Tämä on makroskooppinen luku, siksi Landaun tasojen degeneraatio on makroskooppinen.