FYSA2041 osa A

Koe 25.02.2022 klo 12:00-16:00.
Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam 25.02.2022 at 12:00-16:00.
Questions in English are at the end.
There are 5 questions.

1. Kerro lyhyesti:

   (a) (2p) Miksi lämpövoimakoneen hyötysuhde on $\eta < 1$, eli kaikkea kuumasta lämpövarastosta otettua lämpöä ei voi muuttaa työksi?

   (b) (2p) Miksi työ ja lämpö ovat epäeksakteja differentiaaleja, eli miksei prosessissa tehtyä työtä voi laskea integraalina

   $$W = \int_{\text{alkutila}}^{\text{lopputila}} dW = W(\text{lopputila}) - W(\text{alkutila}) \quad \Leftarrow \text{väärin} \ . \tag{1}$$

   (c) (4p) Entropian muutos osataan laskea vain reversiibelille prosessille alkutilasta lopputilaan. Miksi tulos on oikea, vaikka prosessi olisi todellisuudessa irreversiibeli?

   (d) (2p) Selitä, miksi ideaalisen Carnot'n koneen hyötysuhde on suurin hyötysuhde, joka kahden lämpötilan välillä toimivalla lämpövoimakoneella voi olla.

2. (a) (5p) Osoita, että

   $$U = -T^2 \left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right)_V \ ,$$

   missä U on sisäenergia ja F on Helmholzin vapaa energia. Hiukkasluku on vakio.

   (b) (4p) Johda a)-kohdan tulos käyttäen kaavoja

   $$\begin{aligned} F &= -k_B T \ln Z \\ p_r &= \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \\ U &= \sum_r p_r E_r \ , \end{aligned}$$

   missä summa on yli mikrotilojen r.

3. Landaun teoriassa spinsysteemin Helmholzin vapaa energia F on magnetoituman $\mathcal{M}$ funktio,

   $$F = F_0(T) + a_2(T - T_c)\mathcal{M}^2 + a_4\mathcal{M}^4 - B\mathcal{M} \ .$$

   (a) (1p) Osoita, että korkeissa lämpötiloissa ($T \gg T_c$, pieni $\mathcal{M}$) on termodynaamisessa tasapainossa voimassa Curien laki $\mathcal{M} = cB/T$ (vakio c).

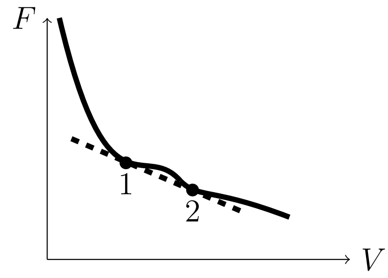
   (b) (2p) Osoita, että termodynaamisessa tasapainossa spontaani ($B = 0$) magnetoituma saa arvot

   $$\begin{cases} \mathcal{M} = 0 & \text{, jos } T > T_c \\ \mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}(T_c - T)} & \text{, jos } T < T_c. \end{cases}$$

(c) (4p) Jos $B = 0$, osoita, että faasitransitiossa $(\partial F/\partial T)$ on jatkuva, mutta $(\partial^2 F/\partial T^2)$ epäjatkuva. Onko faasitransitio 1. kertaluvun transitio vai jatkuva transitio; miksi?

(d) (3p) Miten ominaislämpö C käyttäytyy faasitransitiossa? Edelleen $B = 0$.

4. Kuvassa on erään aineen tilayhtälöstä laskettu Helmholtzin vapaan energian isotermi $F(V)$. Pisteissä 1 ja 2 on käyrällä $F(V)$ yhteinen tangentti (katkoviiva).



(a) (4p) Pisteiden 1 ja 2 välissä on alue, jossa käyrää $F(V)$ vastaavan isotermin $P(V)$ derivaatta on positiivinen. Osoita, että aine olisi epästabiili, joten käyrän tämä osa on epäfysikaalinen. Ovatko epästabiiliusrajat samat kuin faasimuutospisteet 1 ja 2?

(b) (3p) Miksi aine faasiseparoituu pisteiden 1 ja 2 välissä ja seuraa katkoviivaa, eikä käyrää $F(V)$?

(c) (3p) Osoita, että pisteiden 1 ja 2 välissä faaseilla on sama paine.

5. Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän energiatilat ovat

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \ n = 0, 1, \ldots \ ,$$

missä ω on värähtelijän kulmataajuus. Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn, jonka lämpötila on T. Laske värähtelijän sisäenergia ja lämpökapasiteetti.

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Explain briefly:

   (a) (2p) Why is the upper limit to the efficiency of a heat engine $\eta < 1$, meaning all heat taken from a hot reservoir can't be converted to work?

   (b) (2p) Why are work and heat inexact differentials, in other words, why can't one calculate the work done in a process as an integral

$$W = \int_{\text{initial state}}^{\text{final state}} dW = W(\text{final state}) - W(\text{initial state}) \quad \Leftarrow \text{wrong} \ . \tag{2}$$

   (c) (4p) The change in entropy can be calculated only for a reversible process from an initial state to a final state. Why is the result correct, even though the process in reality be irreversible?

   (d) (2p) Explain why the ideal Carnot engine has the largest efficiency coefficient among heat engines working between two temperatures.

2. (a) (5p) Show, that

$$U = -T^2 \left(\frac{\partial (F/T)}{\partial T} \right)_V \ ,$$

   where U is the internal energy and F if the Helmholz free energy. The number of particles is constant.

   (b) (4p) Derive the formula given in a) using the formulas

$$\begin{aligned} F &= -k_B T \ln Z \\ p_r &= \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \\ U &= \sum_r p_r E_r \ , \end{aligned}$$

   where the sum is over microstates r.

3. In the Landau theory, the Helmholz free energy F of a spin system is a function of magnetization $\mathcal{M}$,

$$F = F_0(T) + a_2(T - T_c)\mathcal{M}^2 + a_4\mathcal{M}^4 - B\mathcal{M} \ ,$$

   where $F_0(T)$ doesn't depend on $\mathcal{M}$.

   (a) (1p) Show that at high temperatures ($T \gg T_c$, small $\mathcal{M}$) in thermodynamical equilibrium the Curie law $\mathcal{M} = cB/T$ (contant c) is valid.

   (b) (2p) Showm that in thermodynamical equilibrium spontaneous ($B = 0$) magnetization has the values

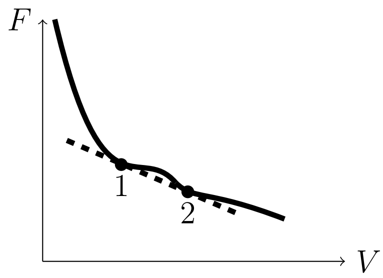
$$\begin{cases} \mathcal{M} = 0 & , \text{if } T > T_c \\ \mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}(T_c - T)} & , \text{if } T < T_c. \end{cases}$$

   (c) (4p) At $B = 0$, show that the phase transition has continuous $(\partial F/\partial T)$, but discontinous $(\partial^2 F/\partial T^2)$. Is the transition 1st order or continuous; why?

(d) (3p) How does the specific heat C behave at the phase transition? We still have $B = 0$.

4. The Helmholtz free energy isotherm $F(V)$ of a substance is shown in the figure. Points 1 and 2 have a common tangent on the curve $F(V)$ (dashed line).

   (a) (4p) There is a region between point 1 and 2, where the isotherm $P(V)$ corresponding to the curve $F(V)$ has a positive slope. Show, that the substance would be unstable, hence this region is unphysical. Do the limits of instability coincide with the points of phase transition 1 and 2?

   (b) (3p) Why does the substance phase separate between point 1 and 2 and follows the dashed line, instead of following the curve $F(V)$?

   (c) (3p) Show that between points 1 and 2 both phases have same pressure.

5. A one-dimensional harmonic oscillator has the energy levels

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \quad n = 0, 1, \dots \; ,$$

where ω is the angular frequency of the oscillator. The oscillator is set in a heat bath with temperature T. Calculate the internal energy and the heat capacity of the oscillator.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0°\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s}^2$$

$$dE = \delta Q + \delta W \quad dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \qquad (\text{thermodyn. } E = \text{ stat. phys. } \langle E \rangle)$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{dS}{dT}\right)_{V,N} = \left(\frac{dE}{dT}\right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{dS}{dT}\right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = N k_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} N k_B T \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$