FYSA2041 osa A

Koe 18.03.2022 klo 12:00-16:00.
Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam 18.03.2022 at 12:00-16:00.
Questions in English are at the end.
There are 5 questions.

1. Kaksi kappaletta on lämpötiloissa T_1 ja T_2 ($T_1 > T_2$) on eristetty muusta maailmasta. Kappaleet asetetaan termiseen kontaktiin ja jonkin ajan kuluttua ne saavuttavat termodynaamisen tasapainon. Mikä seuraavista väitteistä on oikein, perustele lyhyesti:

   (a) (2p) kappaleiden loppulämpötila on $T = (T_1 + T_2)/2$

   (b) (2p) lämpöä siirtyy kuumemmasta kappaleesta kylmempään

   (c) (2p) kuumempi kappale tekee työtä kylmempään kappaleeseen

   (d) (2p) prosessi on reversiibeli

   (e) (2p) jos tuntisimme kappaleiden lämpökapasiteetit, voisimme laskea entropian muutoksen käyttäen reversiibeliä prosessia

2. (9p) Osoita, että Gibbsin vapaa energia G saadaan Helmholzin vapaasta energiasta F kaavalla

$$G = -V^2 \left(\frac{\partial (F/V)}{\partial V} \right)_T \ .$$

3. Yksiatomisen ideaalikaasun kanoninen partitiofunktio on

$$Z = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda_T^{3N}} \ ,$$

missä

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar}{mk_BT} \right)^{1/2}$$

on terminen aallonpituus (deBroglie'n aallonpituus) ja V on tilavuus.

   (a) (2p) Johda ideaalikaasun Helmhotzin vapaan energian lauseke

$$F = Nk_BT \left[\ln \left(\frac{N\lambda_T^3}{V} \right) - 1 \right]$$

   käyttäen Stirlingin approksimaatiota $\ln(N!) \approx N \ln N - N$.

   (b) (2p) Johda F:n lausekkeesta ideaalikaasun tilayhtälö $PV = Nk_BT$.

   (c) (2p) Johda F:n lausekkeesta ideaalikaasun entropialle ns. Sackur-Tetrode kaava

$$S = Nk_BT \left[\frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N\lambda_T^3}{V} \right) \right] \ .$$

   (d) (3p) Johda edellä saatujen tulosten avulla sisäenergian luaseke

$$U = \frac{3}{2} Nk_BT \ .$$

4. (10p) Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän energiatilat ovat

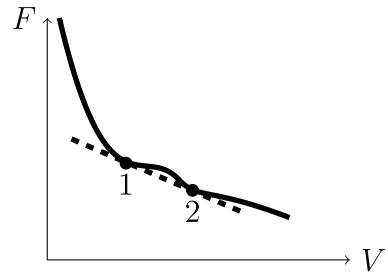
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad , \ n = 0, 1, ... \ ,$$

missä ω on värähtelijän kulmataajuus. Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn, jonka lämpötila on T. Laske värähtelijän sisäenergia ja lämpökapasiteetti.

5. Kuvassa yhtenäinen viiva on erään aineen tilayhtälöstä laskettu Helmholtzin vapaan energian isotermi $F(V)$. Pisteissä 1 ja 2 on käyrällä $F(V)$ yhteinen tangentti (katkoviiva).

   (a) (2p) Miksi isotermin $F(V)$ derivaatta on aina negatiivinen?

   (b) (3p) Pisteiden 1 ja 2 välissä on kapea alue, jossa käyrää $F(V)$ vastaavan isotermin $P(V)$ derivaatta on positiivinen. Mitä voit sanoa tilan stabiilisuudesta?



   (c) (4p) Miksi aine faasiseparoituu pisteiden 1 ja 2 välissä ja Helmhotzin vapaa energia seuraa katkoviivaa, eikä laskettua käyrää $F(V)$?

   (d) (1p) Osoita, että pisteiden 1 ja 2 välissä faaseilla on sama paine

---

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Two bodies at temperatures T_1 and T_2 ($T_1 > T_2$), are isolated from the rest of the world. The bodies are placed in thermal contact, and they reach thermal equilibrium after a while. Are the following statement true or false, justify briefly:

   (a) The final temperature of both bodies is $T = (T_1 + T_2)/2$

   (b) heat flows from the warmer body to the colder one

   (c) the warmer body does work on the colde one

   (d) the process is reversible

   (e) if we knew the heat capacities of the bodies, we could compute the entropy change using a reversible process

2. (9p) Show, that the relation between the Gibbs free energy G and the Helmholz free energy F is
$$G = -V^2 \left(\frac{\partial (F/V)}{\partial V} \right)_T .$$

3. Monatomic ideal gas has the partition function
$$Z = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{\lambda_T^{3N}} ,$$
where
$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar}{mk_B T} \right)^{1/2}$$
is the thermal wavelength (deBroglie wavelength) and V iks the volume.

   (a) (2p) Derive the ideal gas Helmhotz free energy
$$F = Nk_B T \left[\ln \left(\frac{N\lambda_T^3}{V} \right) - 1 \right]$$
   using the Stirling approximation $\ln(N!) \approx N \ln N - N$.

   (b) (2p) From the expression for F, derive the ideal gas equation of state $PV = Nk_B T$.

   (c) (2p) From the expression for F, derive the ideal gas entropy, the so-called Sackur-Tetrode formula,
$$S = Nk_B T \left[\frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N\lambda_T^3}{V} \right) \right] .$$

   (d) (3p) Using the prevous results, derive the expression for the internal energy
$$U = \frac{3}{2} Nk_B T .$$

4. (10p) A one-dimensional harmonic oscillator has the energy levels
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad , \; n = 0, 1, \dots ,$$
where ω is the angular frequency of the oscillator. The oscillator is set in a heat bath with temperature T. Calculate the internal energy and the heat capacity of the oscillator.

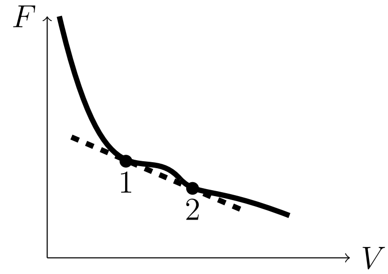
5. The Helmholtz free energy isotherm $F(V)$ of a substance is shown in the figure. Points 1 and 2 have a common tangent on the curve $F(V)$ (dashed line).

   (a) (2p) Why is the derivative of the isotherm $F(V)$ always negative?

   (b) (3p) There is a narrow region between point 1 and 2, where the isotherm $P(V)$ corresponding to the curve $F(V)$ has a positive slope. What can you say about the stability of that state?

   (c) (4p) Why is there phase separation between point 1 and 2, and the Helmholtz free energy follows the dashed line, instead of following the calculated curve $F(V)$?

   (d) (1p) Show that between points 1 and 2 both phases have same pressure



Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s^2}$$

$$dU = \delta Q + \delta W \quad dU = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = U - TS \quad G = U - TS + PV \quad H = U + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \ \ (n \gg 1) \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad U = \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = N k_B T = nRT \quad U = \frac{3}{2} N k_B T \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$