FYSA2041 osa A

Koe 10.03.2023 klo 12:00-16:00 (joillekin klo 10:00-16:00).
Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam 10.03.2023 at 12:00-16:00 (for some 10:00-16.00)
Questions in English are at the end.
There are 5 questions.

1. (a) (2p) Lämpökylvyssä oleva systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, kun Helmholzin vapaa energia F on minimissä. Määritelmän mukaan $F = U - TS$, missä U on systeemin sisäenergia ja S on systeemin entropia. Toisaalta tiedetään, että entropialla on maksimiarvo termodynaamisessa tasapainossa. Miten on mahdollista, että systeemin vapaa energia F on minimissä ja entropia on maksimissa yhtaikaa? Vihje: *minkä* entropia on maksimissa termodynaamisessa tasapainossa?

   (b) (2p) Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan Boltzmannin jakaumalla.

   (c) (6p) Tarkastellaan kolmea prosessien ominaisuutta: adiabaattinen, reversiibeli ja isentrooppinen. Pitääkö paikkansa, että jos jollekin prosessille näistä kaksi on voimassa, on kolmaskin aina voimassa? Perustele lyhyesti.

2. Kappaleen lämpökapasiteetti on $C_1 = 100\,\mathrm{J/K}$ ja toisen kappaleen $C_2 = 300\,\mathrm{J/K}$. Alussa kappaleet ovat termodynaamisessa tasapainossa lämpötiloissa $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ ja $T_2 = 800\,\mathrm{K}$. Kappaleet pannaan eristetyssä säiliössä termiseen kontaktiin ja odotetaan pitkä aika.

   (a) (1p) Tapahtuuko säiliössä reversiibeli vai irreversiibeli prosessi? Perustele lyhyesti.

   (b) (2p) Mikä on kappaleiden loppulämpötila?

   (c) (3p) Paljonko entropia muuttui?

   (d) (3p) Osoita, että lämpöä virtasi kuumemmasta kappaleesta kylmempään.

3. Landaun mallissa spinsysteemin vapaa energia on magnetoituman $\mathcal{M}$ funktiona lähellä kriittistä lämpötilaa T_c muotoa

$$F = a_2(T - T_c)\mathcal{M}^2 + a_4\mathcal{M}^4 - B\mathcal{M}\ ,$$

   missä a_2 ja a_4 ovat positiivisia vakioita ja B on magneettikenttä.

   (a) (2p) Osoita, että termodynaamisessa tasapainossa spontaani ($B = 0$) magnetoituma saa arvot

$$\begin{cases} \mathcal{M} = 0 & \text{, jos } T > T_c \\ \mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}(T_c - T)} & \text{, jos } T < T_c. \end{cases}$$

   (b) (1p) Tarkastellaan tilannetta kun $B = 0$. Lähellä kriittistä lämpötilaa kun $T < T_c$ magnetoituma käyttäytyy kuten

$$\mathcal{M} \sim |T - T_c|^{\beta}\ .$$

   Mikä on mallin ennustama kriittisen eksponentin β arvo?

(c) (3p) Magnetoituman vaste ulkoiseen kenttään on

$$\mathcal{X} = \frac{\partial M(B)}{\partial B} \ .$$

Tarkastellaan vastetta kun B on hyvin pieni. Tällöin magnetoituma on

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}_0 + \delta\mathcal{M}(B) \ ,$$

missä $\mathcal{M}_0$ on a)-kohdassa saatu tasapainomagnetoituma ilman magneettikenttää ja $\delta\mathcal{M}(B)$ on pieni magneettikentästä johtuva korjaus. Laske vaste kun $T > T_c$ ja toisaalta kun $T < T_c$ ja osoita, että kriittinen käyttäytyminen on $\mathcal{X} \sim |T - T_c|^{-\gamma}$, ja että kriittiselle eksponentille γ saadaan sama arvo.

(d) (2p) Kriittisessä lämpötilassa magneettikentän kääntäminen päälle tuottaa magnetoituman, joka käyttäytyy kuten

$$\mathcal{M} \sim B^{1/\delta} \ .$$

Mikä on mallin ennustama kriittinen eksponentti δ?.

(e) (1p) Onko mallin kuvaama faasitransitio 1. kertaluvun transitio vai jatkuva? Miksi?

4. Tarkastellaan kaksitilasysteemiä, jossa tilojen välinen energiaero on $\Delta\epsilon$. Jos systeemissä on vakiomäärä hiukkasia, (i) laske systeemin lämpökapasiteetti $C(T) = \partial U/\partial T$ (ii) piirrä kuva käyrästä $C(T)$ ja (iii) selvitä miten $C(T)$ käyttäytyy matalassa ja korkeassa lämpötilassa; miten näistä voisi päätellä, että systeemissä on kaksi tilaa?

5. Tarkastellaan jääkaappia, jonka kuuma lämpösäiliö on kuuma ilma jääkaapin takana lämpötilassa T_1 =47 °C. Kompressorin käyttämä sähköteho on 100 W ja huoneilmasta siirtyy jääkaappiin lämpöä teholla $k(T_0 - T)$, missä k = 10 W/K, T_0 = 27 °C on huoneilman lämpötila ja T jääkaapin sisälämpötila. Mikä on kylmin lämpötila, jonka tällainen jääkaappi voi teoriassa saavuttaa?

QUESTIONS IN ENGLISH

1. (a) (2p) A system in a heat bath is in thermodynamical equilibrium, when it's Helmholz free energy F is minimum. By definition, $F = U - TS$, where U is the internal energy of the system, and S is the entropy of the system. On the other hand, we know that entropy is at maximum in thermodynamical equilibrium. How is it possible, that the system free energy is F minimum and entropy is maximum simultaneously? Hint: entropy of *what* is maximum in thermodynamical equilibrium?

   (b) (2p) Explain in few words what is meant by Boltzmann distribution.

   (c) (6p) Consider the three properties of processes: adiabatic, reversible, and isentropic. Is it true that if any two of these are valid for a process, then the third one is also valid? Justify your answer.

2. One body has heat capacity $C_1 = 100\,\mathrm{J/K}$ and another one has $C_2 = 300\,\mathrm{J/K}$. In the beginning the bodies are in thermodynamical equilibrium at temperatures $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ and $T_2 = 800\,\mathrm{K}$. The bodies are put to thermal contact in an isolated container, and we wait for a long time.

   (a) (1p) Is the process in the container reversible or irreversible? Justify briefly.

   (b) (2p) What is the final temperature of the bodies?

   (c) (3p) How much did entropy change?

   (d) (3p) Show that the heat flow was from the hotter body to the colder one.

3. In the Landau model the free energy of a spin system depends on magnetization $\mathcal{M}$ near the critical temperature T_c as

$$F = a_2(T - T_c)\mathcal{M}^2 + a_4\mathcal{M}^4 - B\mathcal{M} \ ,$$

   where a_2 and a_4 are positive constants and B is the magnetic field.

   (a) (2p) Show that in thermodynamical equilibrium the spontaneous ($B = 0$) magnetization has values

$$\begin{cases} \mathcal{M} = 0 & \text{, if } T > T_c \\ \mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{a_2}{2a_4}(T_c - T)} & \text{, if } T < T_c. \end{cases}$$

   (b) (1p) Let's look at the case $B = 0$. Near the critical temperature the magnetization behaves like

$$\mathcal{M} \sim |T - T_c|^\beta \ .$$

   What critical exponent β does the model predict?

   (c) (3p) The response of magnetization to external magnetic field is

$$\mathcal{X} = \frac{\partial M(B)}{\partial B} \ .$$

   Let's look at the situation when B is very small. Then magnetization is

$$\mathcal{M}(B) = \mathcal{M}_0 + \delta\mathcal{M}(B) \ ,$$

where $\mathcal{M}_0$ is the equilibrium magnetization without a magnetic field found in a), and $\delta\mathcal{M}(B)$ is a small correction due to the magnetic field. Calculate the response for $T > T_c$ and on the other hand for $T < T_c$ and show that the critical response behaves like $\mathcal{X} \sim |T - T_c|^{-\gamma}$, and that the critical exponent γ predicted by the model is the same.

(d) (2p) At the critical temperature turning on magnetic field produces magnetization, which behaves like

$$\mathcal{M} \sim B^{1/\delta} \ .$$

What is the value of the critical exponentδ predicted by the model?.

(e) (1p) Is the transition of the model a 1. order or a continuous phase transition? Why?

4. Consider a two-state system, where the energy difference of the states is $\Delta\epsilon$. Assuming the number of particles in the system is constant, calculate (i) the heat capacity of the system $C(T) = \partial U/\partial T$ (ii) draw the curve $C(T)$ and (iii) find out how $C(T)$ behaves at low temperature and at high temperature; How could you deduce from these, that there are two states in the system?

5. Consider a refrigerator, whose warm heat bath is the hot air behind the machine at the temperature T_1 =47 °C. The electrical power cunsumption of the compressor is 100 W and heat is transferred from the outside into the refrigerator with the power $k(T_0 - T)$, where k = 10 W/K, T_0 = 27 °C is the room air temperature and T the temperature inside the refrigerator. What is the coldest temperature that this refrigerator can, in principle, reach?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \text{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \text{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\text{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \text{K} \approx \frac{1}{40}\ \text{eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15\ \text{K} \quad 1\ \text{atm} = 101.3\ \text{kPa} \quad g = 9.82\ \text{m/s}^2$$

$$dU = \delta Q + \delta W \quad dU = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = U - TS \quad G = U - TS + PV \quad H = U + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \ \ (n \gg 1) \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad U = \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} \quad C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{P,N} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{P,N}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = N k_B T = nRT \quad U = \frac{3}{2} N k_B T \quad \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$