FYSA241 osa A

Koe pe 28.4.2017. Kesto 4 tuntia. Kaavakokoelma lopussa.
Exam Friday, April 28th, 2017. Duration: 4 hours. Questions in English and a collection of formulae at the end of the sheet

1. (a) (2p) Lämpökylvyssä oleva systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, kun systeemin Helmholzin vapaa energia F on minimissä. Määritelmän mukaan $F = E - TS$, missä E on systeemin sisäenergia ja S on systeemin entropia. Toisaalta tiedetään, että entropialla on maksimiarvo termodynaamisessa tasapainossa. Miten on mahdollista, että systeemin vapaa energia F on minimissä ja entropia on maksimissa yhtaikaa? Vihje: *minkä* entropia on maksimissa?

   (b) (2p) Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan Boltzmannin jakaumalla.

   (c) (6p) Tarkastellaan kolmea prosessien ominaisuutta: adiabaattinen, reversiibeli ja isentrooppinen. Pitääkö paikkansa, että jos jollekin prosessille näistä kaksi on voimassa, on kolmaskin aina voimassa? Perustele lyhyesti.

2. (9p) Hiilimonoksidimolekyylin (CO) rotaatiotilojen energia on

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \ , \tag{1}$$

missä $I = 1,3 \times 10^{-46}$ $\mathrm{m^2kg}$ ja tilojen degeneraatio on $2l+1$. Paljonko rotaatiotilat vaikuttavat CO:n moolia kohti laskettuun lämpökapasiteettiin lämpötilassa T=1,5 K ?

3. (9p)

   (a) Johda lämpötilojen T_1 ja T_2 ($T_1 \geq T_2$) välillä toimivan Carnot'n koneen hyötysuhteen kaava

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \ .$$

   Rakennetaan kaksi "peräkkäin" toimivaa lämpövoimakonetta, ensimmäinen toimii lämpötilojen T_1 ja T_3 ($T_1 \geq T_3$) välillä ja toinen lämpötilojen T_3 ja T_2 ($T_3 \geq T_2$) välillä. Mikä on näiden kahden lämpövoimakoneen yhdistetty hyötysuhde verrattuna yhden koneen tapaukseen?

   (b) Talon lämmitys vie 4,6 kWh. Katolla on 2 kWh tuottava aurinkopaneeli, jonka tuottama sähkö aiotaan käyttää maalämpöpumpun käyttämiseen. Kuinka korkea hyötysuhde eli COP (coefficient of performance) pumpulla on oltava jotta talo saadaan lämmitettyä?

4. (10p) Tilan i energia on E_i ja sen todennäköisyys saadaan Boltzmannin jakaumasta

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \quad , \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \ . \tag{2}$$

   (a) Johda entropia todennäköisyyden p_i avulla lausuttuna.

   (b) Jos systeemi koostuu kahdesta osasta A ja B, jotka eivät vuorovaikuta keskenään, osoita että partitiofunktio on osien partitiofunktioiden tulo, eli $Z = Z_A Z_B$.

   (c) Jos systeemin energia koostuu rotaatiosta, vibraatiosta ja translaatiosta, niin miksi partitiofunktio on jälleen tulo $Z = Z_{\text{rotaatio}} Z_{\text{vibraatio}} Z_{\text{translaatio}}$?

JATKUU SEURAAVALLA SIVULLA!

5. (10p) Tässä on hyvin helppoja laskuja, vain hiukan ajattelua!
Päijänteessä uiskenteleva älykäs kala haluaa ymmärtää lämpötilan vaihteluita. Kalan mielestä koko tienoo on pelkkää vettä tai vettä ja jäätä, ja että

- Auringon kokonaissäteily kuukaudessa on keskimäärin[1]

1	22	5	541	9	226
2	80	6	560	10	90
3	214	7	558	11	26
4	385	8	408	12	10

  Ensimmäinen sarake on kuukausi (1=tammikuu, 6=kesäkuu, 12=joulukuu) ja toinen sarake on kokonaissäteily yksiköissä MJ/m^2 (=10^6 Joulea neliömetrille).

- Veden albedo on 0,06 ja jään 0,6, eli jää heijastaa 60 % säteilystä takaisin, vesi vain 6 %.

(a) Kala päättelee, että energiaa paitsi heijastuu takaisin, sitä täytyy myös poistua esim. lämpösäteilynä – muuten se olisi jo keitetty kala.[2] Havaintojen mukaan jäätön aika on suunnilleen huhtikuusta syyskuuhun. Paljonko energiaa säteilee pois tänä aikana (neliömetriä kohti)?

(b) Tammikuusta maaliskuuhun ja lokakuusta joulukuuhun veden lämpötila jään alla on koko ajan 0° C. Kala keksii käsitteen *latentti lämpö*. Miten?

(c) Kuinka paksun jääkerroksen edellä mainittuina kuukausina jäähän siirtyvä energia kykenisi sulattamaan? Jään tiheys[3] on 917 kg/m^3 ja jään sulamisen latentti lämpö on 334 kJ/kg. Vertaa tulosta havaintoon, että jään paksuus on suurimmillaan muutamia kymmeniä senttimetrejä; mistä ero voisi johtua?

(d) Hahmottele kuvaaja veden lämpötilasta ajan funktiona koko vuoden ajalta. Karkea arvio riittää, lämpötilan vaihtelua syvyyden funktiona ei tarvitse ottaa huomioon. Mikä veden ominaisuus vaikuttaa maksimin korkeuteen?

---

[1] Ilmatieteen Laitoksen tilasto Jyväskylän lentoasemalta vuosilta 1981-2010.
[2] Kala ei tiedä mitään ilmakehän olemassaolosta eikä osaa kuvitella lämmön johtumista.
[3] Vesi on hiukan tiheämpää, litra painaa n. kilogramman.

1. (a) (2p) A system in a heat bath is in thermodynamical equilibrium, when it's Helmholz free energy F is at minimum. By definition, $F = E - TS$, where E is the internal energy of the system, and S is the entropy of the system. On the other hand, we know that entropy is at maximum in thermodynamical equilibrium. How is it possible, that the system free energy is F at minimum and entropy is at maximum simultaneously? Hint: entropy of *what* is at maximum?

   (b) (2p) Explain in few words what is meant by Boltzmann distribution.

   (c) (6p) Consider the three properties of processes: adiabatic, reversible, and isentropic. Is it true that if any two of these are valid for a process, then the third one is also valid? Justify your answer.

2. (9p) Carbon monoxide (CO) has rotational states with energies

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \ , \tag{3}$$

where $I = 1.3\ 10^{-46}\ \mathrm{m^2kg}$ and states have $2l+1$ degeneracy. How much do the rotational states contribute to CO's heat capacity per mole at temperature T=1.5 K ?

3. (9p)

   (a) Derive the Carnot heat engine efficiency

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \ ,$$

   where the engine works between temperatures T_1 and T_2 ($T_1 \geq T_2$). Let us build two heat engines working in sequence: the first one works between temperatures T_1 and T_3 ($T_1 \geq T_3$) and the second between T_3 ja T_2 ($T_3 \geq T_2$). What is the combined efficiency of the two heat engines with respect to the single heat engine case?

   (b) Heating a house takes 4.6 kWh. On the roof we have a 2 kWh solar panel, and we are planning to run a ground heat pump with it. How high efficiency a.k.a. COP (coefficient of performance) must the pump at least have to let us heat the house with this setup? In other words, what is the combined efficiency of the two heat engines with respect to the efficiency of a single engine?

4. (10p) The energy of state i is E_i, and it's probability is given by the Boltzmann distribution

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \quad , \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \ . \tag{4}$$

   (a) Write entropy in terms of p_i.

   (b) If the system is made of two parts A and B, which don't interact, show that the partition function is the product of the partition functions of the parts, $Z = Z_A Z_B$.

   (c) If the system energy comprises of rotation, vibration and translation, why is the partition function again a product, $Z = Z_{\mathrm{rotation}} Z_{\mathrm{vibration}} Z_{\mathrm{translation}}$?

CONTINUES ON THE NEXT PAGE!

5. (10p) Very easy calculations, but needs some thinking!
A clever fish swimming in lake Päijänne wants to understand the variations in temperature. The fish thinks the whole neighbourhood is water or water and ice, and that

- The total radiation from the Sun per month is on average [4]

1	22	5	541	9	226
2	80	6	560	10	90
3	214	7	558	11	26
4	385	8	408	12	10

  The first column is the month (1=January, 6=June, 12=December) and the second column is the total radiation in units MJ/m^2 ($=10^6$ Joules per square meter).

- The albedo of water is 0.06 and that of ice is 0.6, meaning ice reflects 60 % of the radiation, water reflects only 6 %.

(a) The fish deduces that in addition to reflecting, some energy must also leave, for example, as thermal radiation – otherwise it would be a cooked fish.[5] According to observations, there is no ice from April to September. How much energy radiates away during this open water season (per square meter)?

(b) From January to March and from October to December the water temperature below ice is all the time 0° C. The fish invents the concept of *latent heat*. How?

(c) How thick layer of ice could be melted by the energy absorbed during the above mentioned period of time? The density of ice[6] is 917 kg/m^3 and the latent heat in melting ice is 334 kJ/kg. Compare the result to the observation, that the thickness of ice is below a few tens of centimeters; what could explain the difference?

(d) Sketch the curve of water temperature as a function of time during one year. A rough estimate is enough, no need to take into account temperature variation with depth. What property of water affects the height of the maximum?

---

[4] Finnish Meteorological Institute statistics, Jyväskylä airport, years 1981-2010.
[5] The fish doesn't know about the atmosphere and can't imagine heat conduction.
[6] Water is a bit denser, one liter of water weighs about one kilogram.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0°\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \qquad \text{(thermodyn. } E = \text{ stat. phys. } \langle E \rangle\text{)}$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_{V,N} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = N k_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} N k_B T \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} \right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} a^n b^{N-n}$$