FYSA241 osa A

Koe pe 26.8.2016. Kesto 4 tuntia. Kaavakokoelma lopussa.

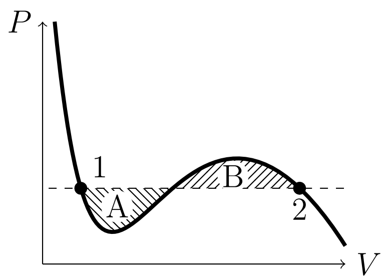
Exam Friday, August 26th 2016. Duration: 4 hours. Questions in English and a collection of formulae at the end of the sheet

1. (10p) Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele vastauksesi lyhyesti:
   (a) Mitä eroa on lämmöllä ja lämpötilalla?
   (b) Miksi lämpökylvyssä olevan systeemin Helmholtzin vapaa energia on minimissä termodynaamisessa tasapainossa, mutta sisäenergia ei ole minimissä?
   (c) Mitä on entropia?
   (d) Mitä tarkoittaa "irreversiibeli prosessi"?
   (e) Miksi työ voi muuttua prosessissa kokonaan lämmöksi, mutta lämpö ei koskaan voi muuttua kokonaan työksi?

2. (9p) Yksi kilogramma 20°C-asteista vettä (lämpökapasiteetti 4200J/(kg K)) laitetaan ensin 50°C:n ja sitten 80°C:n lämpökylpyyn siten, että kummallakin kerralla saavutetaan termodynaaminen tasapaino. Mikä on koko järjestelmän (vesi ja lämpökylvyt) entropian muutos? Entä jos sama vesimäärä laitetaan suoraan 80°C:n lämpökylpyyn ja annetaan lämpötilan tasoittua; miten tulkitset eroa?

3. (9p) Tilayhtälöstä laskettu isotermi on esitetty alla olevassa kuvassa P, V tasossa. Pisteissä 1 ja 2 tapahtuu 1. kertaluvun faasitransitio ja niiden välissä aine on faasiseparoitunut sekoitukseksi molempia faaseja. Transitiopisteet määräytyvät kahdesta ehdosta: (i) paineet ovat samat, $P_1 = P_2$ ja (ii) pisteissä 1 ja 2 Helmholzin vapaan energian käyrällä $F(V)$ on yhteinen tangentti, eli $\frac{F_2-F_1}{V_2-V_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$, missä osittaisderivaatta on laskettu joko pisteessä 1 tai 2.

   Osoita, että kuvassa $P(V)$-käyrän ja pisteitä 1 ja 2 yhdistävän vaakasuoran viivan väliin jäävät pinta-alat A ja B ovat yhtä suuret. Tämä on ns. Maxwellin konstruktio.



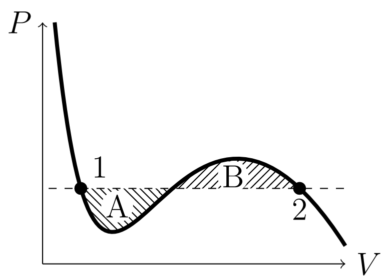
4. (10p) Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän enrrgiatilat ovat $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 1, 2, ...$ Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn, jonka lämpötila on T. Laske värähtelijän energian odotusarvo E, sekä lämpökapasiteetti vakiotilavuudessa, C_V.

5. (10p) Tarkastellaan jääkaappia, jonka kuuma lämpösäiliö on kuuma ilma jääkaapin takana lämpötilassa T_1 =47 °C. Kompressorin käyttämä sähköteho on 100 W ja huoneilmasta siirtyy jääkaappiin lämpöä teholla $k(T_0 - T)$, missä $k = 10$ W/K, $T_0 = 27$ °C on huoneilman lämpötila ja T jääkaapin sisälämpötila. Mikä on kylmin lämpötila, jonka tällainen jääkaappi voi teoriassa saavuttaa?

1. (10p) Answer to the following questions, justify you answer shortly:
   (a) What is the difference between heat and temperature?
   (b) Why does a system in a heat bath have it's Helmholtz free energy at minimum, but the internal energy is not at minimum?
   (c) What is entropy?
   (d) What does "irreversible process" mean?
   (e) Why can one convert work to heat without losses, but heat cannot turn completely to work?

2. (9p) One kilogram of water at $T = 20°\text{C}$ (specific heat capacity 4200J/(kg K)) is first put in contact with a 50°C heat bath and - after reaching thermal equilibrium - followed by an 80°C heat bath and thermal equilibrium. What is the total change of entropy, including changes in both water and in the two heat baths? What if we had put water directly in the 80°C heat bath, without the intermediate step? How would you interpret the difference?

3. (9p) An isotherm computed from the equation of state is shown in the figure below, in P, V plane. A 1st order phase transition takes place in points 1 and 2, and between the points the matter has phase separated to a mixture of the two phases. We have two condition to determine the transition points: (i) pressure is equal, $P_1 = P_2$ (ii) the Helmholz free energy curve $F(V)$ has a common tangent in points 1 and 2, which means that $\frac{F_2-F_1}{V_2-V_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$, where the partial derivative is calculated in either of points 1 or 2. Show, that in the figure the area A and the area B, between the curve $P(V)$ and the horizontal line connecting points 1 and 2, are equal. This is the so-called Maxwell construction.



4. (10p) A one-dimensional harmonic oscillator has the energy levels $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 1, 2, \ldots.$ The oscillator is set in a heat bath with temperature T. Calculate the expectation value of the energy E and the heat capacity in constant volume, C_V, of the oscillator.

5. (10p) Consider a refrigerator, whose warm heat bath is the hot air behind the machine at the temperature T_1 =47 °C. The electrical power cunsumption of the compressor is 100 W and heat is transferred from the outside into the refrigerator with the power $k(T_0 - T)$, where $k = 10$ W/K, $T_0 = 27$ °C is the room air temperature and T the temperature inside the refrigerator. What is the coldest temperature that this refrigerator can, in principle, reach?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s}^2$$

$$\mathrm{d}E = \text{đ}Q + \text{đ}W \quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln\Omega \quad \ln n! \approx n\ln n - n \quad \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right) \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \qquad (\text{thermodyn. } E = \text{ stat. phys. } \langle E\rangle)$$

$$C_V \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} \quad C_P \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = Nk_BT = nRT \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T\Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right) a^n b^{N-n}$$