

## FYSA2041 osa A

Koe pe 26.2.2020 klo 12:00-16:00.

Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.

### **PALAUTUSOHJE:**

Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/7F8JsKGXLWdDcDw>  
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf

*Vain jos* tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam on Friday, February 26th, 2021, at 12:00-16:00.

Questions in English are at the end.

All material may be used but not copied.

### **RETURN INSTRUCTIONS:**

Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/7F8JsKGXLWdDcDw>  
using the naming convention firstname.lastname.pdf

*Only if* this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele lyhyesti.

- (a) (2p) Miksei ideaalikaasun sisäenergia riipu tilavuudesta?
- (b) (2p) Miksei mikään lämpövoimakone voi ottaa lämpöä määrän  $\delta Q$  ja tehdä työtä määrän  $\delta W = \delta Q$ ?
- (c) (2p) Anna esimerkki tilanteesta, jossa kaasun tekemä työ  $\delta W$  ei ole  $-PdV$ .
- (d) (1p) Miksei kappaleen ominaisuutena voi kertoa, että siinä on lämpöä määrä  $Q$ , tai että siinä on työtä määrä  $W$ ?
- (e) (3p) Piirrä kuva entropiasta lämpötilan funktiona Carnot'n syklistä, ja merkitse kuvaan missä vaiheessa siirtyy lämpöä ja missä tehdään työtä.

2. (a) (4p) Eristetyssä säiliössä on kaasua läpäisemätön väliseinä, joka erottaa puolet  $A$  ja  $B$ . Alussa säiliön toisella puolella on paine  $P_A$  ja toisella  $P_B$ . Osoita, että jos väliseinän annetaan siirtyä, niin suuremman paineen osion tilavuus kasvaa ja entropia kasvaa.
- (b) (5p) Todennäköisyys, että lämpökylvyssä aineen sisäenergia on välillä  $E$  ja  $E + dE$  on  $P(E)dE \propto g(E)e^{-\beta E}dE$ , missä  $g(E)$  on tilatiheys. Kirjoita partitiofunktion lauseke. Jos tilatiheys tunnetaan, niin miten lasketaan jonkin fysikaalisen suureen  $A$  odotusarvo?

3. (9p) Ensimmäisen kappaleen lämpökapasiteetti on  $C_V = 500 \text{ J/K}$  ja alkulämpötila on  $10^\circ\text{C}$ , toisen  $C_V = 300 \text{ J/K}$  ja alkulämpötila  $200^\circ\text{C}$ , ja kolmannen  $C_V = 200 \text{ J/K}$  ja alkulämpötila  $300^\circ\text{C}$ . Kappaleet tuodaan termiseen kontaktiin.
- (a) Mikä on kappaleiden loppulämpötila niiden saavutettua termodynaamisen tasapainon?
  - (b) Paljonko maailmankaikkeuden entropia muuttui?

4. (a) (5p) Kuvaile, miten toimii syklinen prosessi, joka muuttaa työtä lämmöksi. Piirrä  $P, V$ -tason sykli ja kerro miten syklin aikana luovutetun lämmön määrä lasketaan.
- (b) (5p) Termodynamiikassa energian lausekkeessa suureet esiintyvät aina konjugaattipareina, kuten paine ja tilavuus ( $P, V$ ), lämpötila ja entropia ( $T, S$ ), jne. Miksei energian lausekkeessa voi olla painetta ilman tilavuutta? Entä miksei entropiaa ilman lämpötilaa?

5. (a) (5p) Todista jotenkin, ettei yksiulotteisessa Isingin mallissa ole faasimuutosta.
- (b) (2p) Miten Maxwellin konstruktio liittyy vapaan energian minimointiin ja miksi Maxwellin konstruktiota tarvitaan?
- (c) (3p) Perustele, miksi lämpökylvyssä olevan systeemin tilojen todennäköisyys on Boltzmannin jakauman  $p_i = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_i}$  mukainen. Onko  $p_i$  myös energian  $E_i$  todennäköisyys?

## QUESTIONS IN ENGLISH

1. Answer the following questions, justify briefly:

- (a) (2p) Why doesn't ideal gas internal energy depend on volume?
- (b) (2p) Why can't any heat engine take heat  $\delta Q$  and do work  $\delta W = \delta Q$ ?
- (c) (2p) Give an example of a situation, where the work done by a gas,  $\delta W$ , does not equal  $-PdV$ .
- (d) (1p) Why can't one describe a body by saying that it has heat  $Q$ , or that it contains work  $W$ ?
- (e) (3p) Draw a picture of entropy as a function of temperature in a Carnot cycle, and indicate where heat is transferred and where work is done.

2. (a) (4p) An isolated container has an impenetrable wall separating sides  $A$  and  $B$ . In the beginning the gas on each side has pressures  $P_A$  and  $P_B$ . Show, that if the wall is allowed to move, the volume on the side with higher pressure increases and entropy increases.
- (b) (5p) The probability, that matter in a heat bath has internal energy between  $E$  and  $E + dE$  is  $P(E)dE \propto g(E)e^{-\beta E}dE$ , where  $g(E)$  is the density of states. Write down the partition function. If we know the density of states, how do we calculate the expectation value of a physical quantity  $A$ ?

3. (9p) The first body has heat capacity  $C_V = 500 \text{ J/K}$  and temperature  $10^\circ\text{C}$ , the second one has  $C_V = 300 \text{ J/K}$  and temperature  $200^\circ\text{C}$ , and the third one has  $C_V = 200 \text{ J/K}$  ja alkulämpötila  $300^\circ\text{C}$ . The three bodies are then brought to thermal contact.
- (a) What is the final temperature of the bodies at thermal equilibrium?
  - (b) How much did the entropy of the universe change?



4. (a) (5p) Describe the details of a cyclic process that converts work to heat. Draw the cycle in a  $P, V$ -plane, and tell how the amount of heat released during a single cycle is calculated.
- (b) (5p) In thermodynamical expressions of energy, quantities appear always in conjugate pairs, such as pressure and volume ( $P, V$ ), temperature and entropy ( $T, S$ ) *etc.*. Why can't there be pressure without volume? Similarly, why can't there be entropy without temperature?
5. (a) (5p) Prove somehow, that there's no phase transition in the one dimensional Ising model.
- (b) (2p) How is the Maxwell construction related to the minimization of the free energy? Why does one need a Maxwell construction?
- (c) (3p) Give a justification to the fact, that in a heat bath the probability of states is given by the Boltzmann distribution  $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ . Is  $p_i$  also the probability of energy  $E_i$ ?

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143 \text{ J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$$

$$k_B \cdot 300 \text{ K} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K} \quad 1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} \quad g = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$$dE = \delta Q + \delta W \quad dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (\text{thermodyn. } E = \text{stat. phys. } \langle E \rangle)$$

$$C_V \equiv T \left( \frac{dS}{dT} \right)_{V,N} = \left( \frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left( \frac{dS}{dT} \right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dP} \right)_{S,N}$$

$$\left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left( \frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left( \frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_{\nu} p_{\nu} \ln p_{\nu} \quad p_{\nu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\nu}} \quad Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E_{\nu}} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$