FYSA2041 osa A, kevät 2019

Koe pe 22.2.2019. Kesto 4 tuntia. Kaavakokoelma lopussa.

Exam Friday February 22th, 2019. Duration: 4 hours. Questions in English and a collection of formulae at the end of the sheet

1. (a) (2p) Lämpökylvyssä oleva systeemi on termodynaamisessa tasapainossa, kun Helmholzin vapaa energia F on minimissä. Määritelmän mukaan $F = E - TS$, missä E on systeemin sisäenergia ja S on systeemin entropia. Toisaalta tiedetään, että entropialla on maksimiarvo termodynaamisessa tasapainossa. Miten on mahdollista, että systeemin vapaa energia F on minimissä ja entropia on maksimissa yhtaikaa? Vihje: *minkä* entropia on maksimissa?

   (b) (2p) Selitä lyhyesti, mitä tarkoitetaan Boltzmannin jakaumalla.

   (c) (6p) Tarkastellaan kolmea prosessien ominaisuutta: adiabaattinen, reversiibeli ja isentrooppinen. Pitääkö paikkansa, että jos jollekin prosessille näistä kaksi on voimassa, on kolmaskin aina voimassa? Perustele lyhyesti.

2. (9p) Osoita, että Helmholtzin vapaa energia saadaan partitiofunktiosta kaavalla

$$F = -k_B T \ln Z \ ,$$

käyttäen hyväksi Gibbsin entropian lauseketta $S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, missä todennäköisyys, että systeemi on tilassa i on $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$.

3. (9p)

   (a) Johda lämpötilojen T_1 ja T_2 ($T_1 \geq T_2$) välillä toimivan Carnot'n koneen hyötysuhteen kaava

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \ .$$

   Rakennetaan kaksi "peräkkäin" toimivaa lämpövoimakonetta, ensimmäinen toimii lämpötilojen T_1 ja T_3 ($T_1 \geq T_3$) välillä ja toinen lämpötilojen T_3 ja T_2 ($T_3 \geq T_2$) välillä. Mikä on näiden kahden lämpövoimakoneen yhdistetty hyötysuhde verrattuna yhden koneen tapaukseen?

   (b) Talon lämmitys vie 4,6 kWh. Katolla on 2 kWh tuottava aurinkopaneeli, jonka tuottama sähkö aiotaan käyttää maalämpöpumpun käyttämiseen. Kuinka korkea hyötysuhde eli COP (coefficient of performance) pumpulla on oltava jotta talo saadaan lämmitettyä?

4. (10p) Neste (L)- ja kaasufaasin (G) rajapintaa kuvaa käyrä $P(T)$, jonka derivaatta on

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{cx} = \frac{L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}}{T(V_{\mathrm{G}} - V_{\mathrm{L}})} \ ,$$

missä $L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}$ on latentti lämpö nesteestä kaasuksi. Kaasun tilavuus on paljon nesteen tilavuutta suurempi, $V_{\mathrm{G}} \gg V_{\mathrm{L}}$. Oletetaan, ettei $L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}$ riipu lämpötilasta ja että kaasu on ideaalikaasua. Laske kaasun paine lämpötilan funktiona faasien rajapinnalla.

5. (10p) Yksiulotteisen harmoniseen värähtelijän energiatilat ovat $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, ...$ Värähtelijä asetetaan lämpökylpyyn, jonka lämpötila on T. Laske värähtelijän energian odotusarvo E ja lämpökapasiteetti.

1. (a) (2p) A system in a heat bath is in thermodynamical equilibrium, when it's Helmholz free energy F is at minimum. By definition, $F = E - TS$, where E is the internal energy of the system, and S is the entropy of the system. On the other hand, we know that entropy is at maximum in thermodynamical equilibrium. How is it possible, that the system free energy is F minimum and entropy is maximum simultaneously? Hint: entropy of *what* is at maximum?

   (b) (2p) Explain in few words what is meant by Boltzmann distribution.

   (c) (6p) Consider the three properties of processes: adiabatic, reversible, and isentropic. Is it true that if any two of these are valid for a process, then the third one is also valid? Justify your answer.

2. (9p) Show that the Helmholtz free energy can be obtained from the partition function using the formula

$$F = -k_B T \ln Z \ .$$

   Use the Gibbs entropy $S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$, where the probability of finding the system in state i is $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$.

3. (9p)

   (a) Derive the Carnot heat engine efficiency

$$\eta \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \ ,$$

   where the engine works between temperatures T_1 and T_2 ($T_1 \geq T_2$). Let us build two heat engines working in sequence: the first one works between temperatures T_1 and T_3 ($T_1 \geq T_3$) and the second between T_3 ja T_2 ($T_3 \geq T_2$). What is the combined efficiency of the two heat engines with respect to the single heat engine case?

   (b) Heating a house takes 4.6 kWh. On the roof we have a 2 kWh solar panel, and we are planning to run a ground heat pump with it. How high efficiency a.k.a. COP (coefficient of performance) must the pump at least have to let us heat the house with this setup? In other words, what is the combined efficiency of the two heat engines with respect to the efficiency of a single engine?

4. (10p) Liquid (L) and gas (G) phase boundary is given by the curve $P(T)$, whose derivative is

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{cx} = \frac{L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}}{T(V_{\mathrm{G}} - V_{\mathrm{L}})} \ ,$$

   where $L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}$ is the latent heat from liquid to gas. The volume of gas is much larger that the liquid volume, $V_{\mathrm{G}} \gg V_{\mathrm{L}}$. Let's assume, that $L_{\mathrm{L}\to\mathrm{G}}$ does not depend on temperature and that the gas is ideal gas. Calculate the gas pressure as a function of temperature at the phase boundary.

5. (10p) A one-dimensional harmonic oscillator has the energy levels $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, $n = 0, 1, \ldots$. The oscillator is set in a heat bath with temperature T. Calculate the expectation value of the energy E and the heat capacity of the oscillator.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B \cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s}^2$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu \mathrm{d}N$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \qquad (\text{thermodyn. } E = \text{ stat. phys. } \langle E \rangle)$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_{V,N} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P} \right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = N k_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} N k_B T \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} \right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} \left(e^x - e^{-x} \right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) a^n b^{N-n}$$