

FYSA2041 osa A

Koe pe 19.3.2020 klo 12:00-16:00.

Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.

PALAUTUSOHJE:

Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/dbWkPf2YgFjd6Hk>
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf

Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam on Friday, March 19th, 2021, at 12:00-16:00.

Questions in English are at the end.

All material may be used but not copied.

RETURN INSTRUCTIONS:

Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/dbWkPf2YgFjd6Hk>
using the naming convention firstname.lastname.pdf

Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele lyhyesti.

- (2p) Kappaleeseen, jonka lämpökapasiteetti on C_V , siirretään lämpöä määrä Q . Millä oletuksilla kappaleen lämpötila muuttuu määrän $\Delta T = Q/C_V$?
- (2p) Eräessä syklisessä prosessissa entropian muutos syklin aika on $\Delta S = 0$. Onko prosessi reversiibeli? Miten suuri muutoksen ulkoisiin olosuhteisiin vaadittaisiin, että syklin suunta saataisiin käännettyä? Olisiko prosessi sopiva kelloksi?
- (2p) Adiabaattinen prosessi ei välttämättä ole reversiibeli. Anna jokin esimerkki adiabaattisesta irreversiibelistä prosessista.
- (1p) Termodynaamisten tasapainotilojen A ja B välinen entropaero lasketaan reversiibeliä reittiä pitkin integraalina

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} .$$

Jos todellinen prosessi, jossa systeemin tila muuttuu A :sta B :ksi, onkin irreversiibeli, niin onko sen entropian muutos (1) suurempi kuin laskettu $S_B - S_A$ (2) sama kuin $S_B - S_A$ vai (3) pienempi kuin $S_B - S_A$?

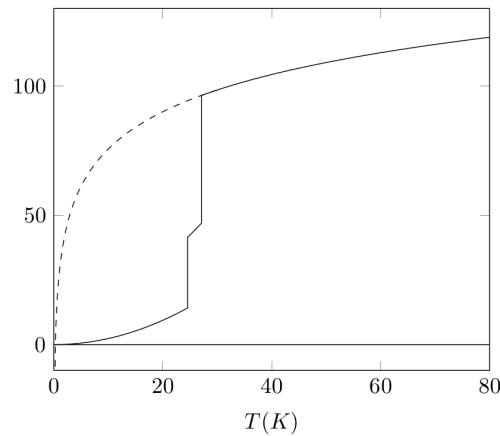
- (3p) Miksi realistisempi lämpövoimakone saadaan olettamalla, että lämpöä johtuu kuumasta lämpövarastosta Carnot'n koneeseen, ja hukkalämpö myös johtuu pois kylmään lämpövarastoon?

2. (a) (6p) Osoita, ettei ideaalikaasun sisäenergia riipu tilavuudesta käyttämällä ideaalikaasun tilayhtälöä $PV = Nk_B T$, termodynamiikan 1. pääsääntöä $dE = TdS - PdV$, sekä Maxwellin relaatioita. Huom: Mikään muu todistelu ei tuota pisteitä.
- (b) (3p) Mitä tarkoitetaan Gibbsin paradoksilla, mistä se johtuu, ja miten se ratkaistaan?

3. (a) (3p) Yksiatomisen ideaalikaasun entropian antaa Sackur-Tetrode (ST) yhtälö

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{(3/2)} \right) .$$

- (i) Mistä Planckin vakio tulee tähän klassisen ideaalikaasun kaavaan?
(ii) Miksei ST- yhtälö voi pitää paikkansa matalissa lämpötiloissa?
- (b) (3p) Kuvassa on neonin (Ne) entropia lämpötilan funktiona (yhtenäinen viiva) ja ST-yhtälön entropia (katkoviiva).



ST-yhtälö pitää selvästi hyvin paikkansa korkeissa lämpötiloissa. Mitä aineessa tapahtuu käyrän pystysuorilla osilla, eli mitä tarkoittaa, että aineen entropia muuttuu samassa lämpötilassa?

- (c) (3p) Kerro lyhyesti, miten Carnot'n lämpövoimakoneen hyötysuhteesta saa ideaalisen jääkaapin ja lämpöpumpun hyötysuhteet.

4. (10p) Isingin mallin keskimääräisen kentän ratkaisu on implisiittinen yhtälö magnetoitumalle spiniä kohti m ,

$$m = \tanh(\beta J z m) ,$$

missä $J > 0$ on mallin parametri, ja z on koordinaatioluku.

- (a) Miksi ratkaisujen m määrä muuttuu kriittisessä lämpötilassa?
- (b) Miten em. implisiittisestä yhtälöstä saadaan kriittinen lämpötila T_c ?
- (c) Kun $T < T_c$ ratkaisuja magnetoitumalle m on kolme; miksei ratkaisu $m = 0$ ole stabiili faasi?
- (d) Miksi keskimääräisen kentän approksimaatiolla saatava kriittinen lämpötila on tarkkaan tulokseen verrattuna liian korkea?

5. (a) (3p) Mihin oletuksiin ekvipartitioteoreema perustuu?
- (b) (3p) Osoita ekvipartitioteoreeman perusteella, että kaksiatomisen ideaalikaasun sisäenergia on $E = \frac{7}{2}Nk_B T$.
- (c) (4p) Hiukkasluku N on vakio. Osoita, että Gibbsin vapaan energian isobaari $G(T)$ on laskeva käyrä.

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Answer the following questions, justify briefly:

- (a) (2p) The heat Q is transferred to a body with heat capacity C_v . Under what assumptions does the temperature of the body change the amount $\Delta T = Q/C_V$?
- (b) (2p) A cyclic process has entropy change $\Delta S = 0$ during a cycle. Is the process reversible? How big changes to external conditions is required to reverse the cycle? Would such a process make a good clock?
- (c) (2p) An adiabatic process is not necessarily reversible. Give an example of an adiabatic irreversible process.
- (d) (1p) The entropy difference between thermodynamically equilibrium states A and B is calculated on a reversible path, by integrating

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} .$$

If the real process taking the system from state A to B turns out to be irreversible, is the entropy change (1) larger than calculated $S_B - S_A$ (2) same as $S_B - S_A$, or (3) smaller than $S_B - S_A$?

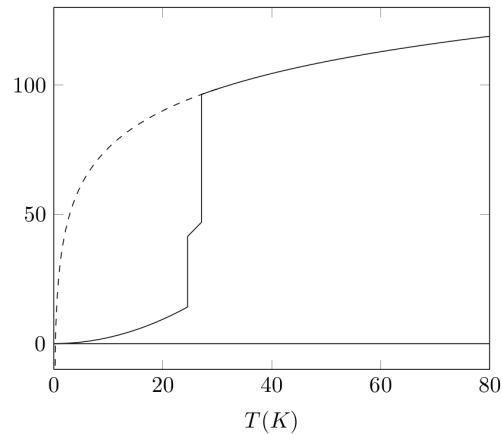
- (e) (3p) Why does one get a more realistic heat engine by assuming, that heat transfer from the hot reservoir to a Carnot engine is taking place via conduction, and similarly, that the wasted heat also conducts from the Carnot engine to the cold reservoir?

2. (a) (6p) Show, that the internal energy of ideal gas does not depend on volume by using the equation of state $PV = Nk_B T$, the 1st law of thermodynamics $dE = TdS - PdV$, and Maxwell's relations. Note: No hand waving proof earns you any points.
- (b) (3p) What does the notion of Gibbs paradox mean, what's the cause and solution to the paradox?

3. (a) (3p) The entropy of a monatomic ideal gas is given by the Sackur-Tetrode (ST) equation,

$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{(3/2)} \right) .$$

- (i) Where does Planck's constant sneak into this formula for classical ideal gas?
(ii) Why can't ST-equation be valid at low temperatures?
- (b) (3p) The figure shows the entropy of neon (Ne) as a function of temperature (solid line), and the entropy given by the ST equation (dashed line).



Obviously the ST equation is accurate at high temperatures. What happens on the vertical portions of the curve, that is, what does it mean to have entropy jump at the same temperature?

- (c) (3p) Explain briefly, how a Carnot heat engine efficiency can be converted to the efficiency of an ideal fridge or a heat pump.

4. The Ising model in mean field approximation is the implicit relation for magnetization per spin m ,

$$m = \tanh(\beta J z m) ,$$

where $J > 0$ is a model parameter, and z is the coordination number.

- (a) Why does the number of solutions m change at the critical temperature T_c ?
 - (b) How can one obtain the critical temperature T_c from the given implicit relation?
 - (c) For $T < T_c$ there are three solutions for magnetization m ; why can't the solution $m = 0$ correspond to a stable phase?
 - (d) Why is the critical temperature predicted by the mean field theory higher than the accurate T_c ?
5. (a) (3p) What are the assumptions behind the equipartition theorem?
- (b) (3p) Based on the equipartition theorem, show that the internal energy of diatomic gases is $E = \frac{7}{2} N k_B T$.
- (c) (4p) The number of particles N is constant. Show, that the Gibbs free energy isobar $G(T)$ has negative slope.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143 \text{ J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$$

$$k_B \cdot 300 \text{ K} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K} \quad 1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} \quad g = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$$dE = \delta Q + \delta W \quad dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (\text{thermodyn. } E = \text{stat. phys. } \langle E \rangle)$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{V,N} = \left(\frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_{\nu} p_{\nu} \ln p_{\nu} \quad p_{\nu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\nu}} \quad Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E_{\nu}} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$