FYSA2041 osa A, kevät 2019

Koe perjantaina 15.3.2019. Kesto 4 tuntia. Kaavakokoelma lopussa.

Exam Friday, March 15th, 2019. Duration: 4 hours. Questions in English and a collection of formulae at the end of the sheet

1. (a) (2p) Jaska syö ison hampurilaisen (500 kcal = 2,092 miljoonaa Joulea). Oletetaan, että kaikki energia muuttuu lämmöksi. Paljonko hänen entropiansa kasvaa, jos hänen ruumiinlämpönsä on 37 °C?

   (b) (3p) Nettipalstalla joku väittää, että on mahdotonta lämmittää ainetta ilman että siihen lisätään lämpöenergiaa. Onko hän oikeassa? Perustele lyhyesti.

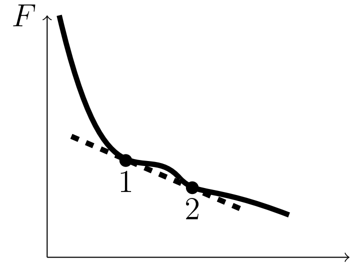
   (c) (5p) Selitä lyhyesti seuraavat termit:
   - mikrokanoninen joukko
   - kanoninen joukko
   - Boltzmannin jakauma
   - Boltzmannin entropia
   - Gibbsin entropia

2. (9p) Otetaan kaksi samaa ainetta olevaa kappaletta, jotka on eristetty muusta ympäristöstä. Toisen lämpötila on $T_1 = 320$ K ja sen lämpökapasiteetti on C_V, toisen lämpötila on $T_2 = 280$ K ja sen lämpökapasiteetti on $3C_V$. Kappaleet pannaan termiseen kontaktiin ja ne pidetään vakiotilavuudessa. Mikä on niiden lämpötila termisessä tasapainossa? Paljonko entropia muuttui? Laske entropian muutos myös olettaen, että aine on vettä (kilogramman lämpökapasiteetti $C_V = 4186$ J/K).

3. (9p) Osoita, että Gibbsin vapaa energia G saadaan Helmholzin vapaasta energiasta F kaavalla
$$G = -V^2 \left(\frac{\partial (F/V)}{\partial V} \right)_T .$$

4. Kuvassa on erään aineen tilayhtälöstä laskettu Helmholtzin vapaan energian isotermi $F(V)$. Pisteissä 1 ja 2 on käyrällä $F(V)$ yhteinen tangentti (katkoviiva).

   (a) (4p) Pisteiden 1 ja 2 välissä on alue, jossa käyrää $F(V)$ vastaavan isotermin $P(V)$ derivaatta on positiivinen. Osoita, että aine olisi epästabiili, joten käyrän tämä osa on epäfysikaalinen. Ovatko epästabiiliusrajat samat kuin faasimuutospisteet 1 ja 2?



   (b) (5p) Miksi aine faasiseparoituu pisteiden 1 ja 2 välissä ja seuraa katkoviivaa, eikä käyrää $F(V)$?

   (c) (1p) Osoita, että pisteiden 1 ja 2 välissä faaseilla on sama paine.

5. (10p) Tarkastellaan vuotavaa jääkaappia, jonka kuuma lämpövarasto on ilma jääkaapin takana lämpötilassa T_1 =47 °C. Kompressorin käyttää sähköä 100 W ja jääkaapin ulkopuolelta vuotaa jääkaappiin lämpöä teholla $k(T_0 - T)$, missä $k = 10$ W/K, $T_0 = 27$ °C on huoneilman lämpötila ja T jääkaapin sisälämpötila. Mikä on kylmin lämpötila, jonka tällainen jääkaappi voi teoriassa saavuttaa? Prosessi on syklinen.

1. (a) (2p) Jack eats a large hamburger (500 kcal = 2.092 million Joules). Assuming all energy is converted to heat, how much does his entropy increase? His body temperature is 37 °C.

   (b) (3p) In an internet forum someone claims that it's impossible to warm up any substance without adding heat to it. Is this correct? Justify your answer shortly.

   (c) (5p) Explain shortly the following terms :

   - microcanonical ensemble
   - canonical ensemble
   - Boltzmann distribution
   - Boltzmann entropy
   - Gibbs entropy

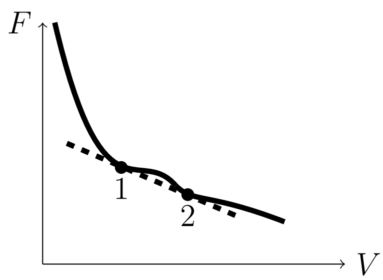
2. (9p) Take two bodies made of same material and insulated from the surroundings. The temperature of one body is $T_1 = 320$ K and heat capacity is C_V, the other one has $T_2 = 280$ K and heat capacity $3C_V$. The bodies are put to thermal contact, while kept in constant volume. What is the temperature of the bodies in thermal equilibrium? How much did entropy change? Compute the numerical entropy change assuming the bodies are water (one kilogram of water has $C_V = 4186$ J/K) ?

3. (9p) Show, that the relation between the Gibbs free energy G and the Helmholz free energy F is

$$G = -V^2 \left(\frac{\partial (F/V)}{\partial V} \right)_T .$$

4. The Helmholtz free energy isotherm $F(V)$ of a substance is shown in the figure. Points 1 and 2 have a common tangent on the curve $F(V)$ (dashed line).

   (a) (4p) There is a region between point 1 and 2, where the isotherm $P(V)$ corresponding to the curve $F(V)$ has a positive slope. Show, that the substance would be unstable, hence this region is unphysical. Do the limits of instability coincide with the points of phase transition 1 and 2?



   (b) (5p) Why does the substance phase separate between point 1 and 2 and follow the dashed line, instead of following the curve $F(V)$?

   (c) (1p) Show that between points 1 and 2 both phases have same pressure.

5. (10p) Consider a leaking refrigerator, whose warm heat reservoir is the air behind the machine at the temperature T_1 =47 °C. The electrical power cunsumption of the compressor is 100 W and heat leaks from the outside into the refrigerator with the power $k(T_0 - T)$, where $k = 10$ W/K, $T_0 = 27$ °C is the room air temperature and T the temperature inside the refrigerator. What is the coldest temperature that this refrigerator can, in principle, reach? The process is cyclic.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805\times10^{-23}\ \mathrm{J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143\ \mathrm{J/molK} \quad N_A = 6.022\times10^{23}/\mathrm{mol}$$

$$k_B\cdot 300\ \mathrm{K} \approx \frac{1}{40}\ \mathrm{eV} \quad 0^\circ\mathrm{C} = 273.15\ \mathrm{K} \quad 1\ \mathrm{atm} = 101.3\ \mathrm{kPa} \quad g = 9.82\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\mathrm{d}E = đQ + đW \quad \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln\Omega \quad \ln n! \approx n\ln n - n \quad \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T\ln Z \quad \langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \qquad (\text{thermodyn. } E = \text{ stat. phys. } \langle E\rangle)$$

$$C_V \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}\right)_{V,N} \quad C_P \equiv T\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T}\right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}\right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z\right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)_z\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

$$S = -k_B\sum_\nu p_\nu \ln p_\nu \quad p_\nu = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_\nu} \quad Z = \sum_\nu e^{-\beta E_\nu} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = Nk_BT = nRT \quad E = \frac{3}{2}Nk_BT \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1\to2}(T)}{T\Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^{N}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} a^n b^{N-n}$$