

FYSA2041 osa A, kevät 2020

Koe pe 12.6.2020 klo 12:00-16:00.

Kaavakokoelma lopussa. Kaikkea materiaalia saa käyttää muttei kopioida.

PALAUTUSOHJE:

Palauta skannatut vastauksesi yhtenä pdf-tiedostona klo. 17:00 mennessä NextCloud-laatikkoon

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/y2iMFATi3TerqiA>
nimettynä etunimi.sukunimi.pdf

Vain jos tämä ei toimi, sähköpostin liitteenä osoitteeseen vesa.apaja@jyu.fi

Tehtäviä on 5 kappaletta.

Exam Friday June 12th 2020, 12:00-16:00.

Questions in English and a collection of formulae at the end. All material may be used but not copied.

RETURN INSTRUCTIONS:

Return your scanned answers as a single pdf-file before 17:00 to the NextCloud box

<https://nextcloud.jyu.fi/index.php/s/y2iMFATi3TerqiA>
using the naming convention firstname.lastname.pdf

Only if this doesn't work, as an email attachment to vesa.apaja@jyu.fi

There are 5 questions.

1. Vastaa seuraaviin kysymyksiin, perustele lyhyesti.

- (a) (2p) Miksei ideaalikaasun sisäenergia riipu tilavuudesta?
- (b) (2p) Alussa ideaalikaasu on R -säteisen pallon sisällä. Pallo muuttuu muotoaan kuutioksi, niin ettei kaasun tilavuus muutu. Miten kaasun entropia muuttuu ja miksi?
- (c) (2p) Jaska syö ison hampurilaisen, jossa on energiaa 500 kcal eli 2.092×10^6 J. Oletetaan, että kaikki energia muuttuu lämmöksi. Paljonko hänen entropiansa kasvaa, jos hänen ruumiinlämpönsä on 37°C ?
- (d) (1p) Miksei kappaleen ominaisuutena voi kertoa, että siinä on lämpöä määrä Q , tai että siinä on työtä määrä W ?
- (e) (3p) Gibbsin vapaa energia on ekstensiivinen. Miten tästä seuraa, että N samanlaisen hiukkasen Gibbsin vapaa energia on $G = \mu N$, ja että kemiallinen potentiaali on väistämättä vain paineen ja lämpötilan funktio, eli $\mu = \mu(P, T)$?

2. (a) (2p) Demotehtävässä vertailtiin veden lämmittämistä lämpötilasta $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ lämpötilaan $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ (i) asettamalla vesi suoraan 100 -asteiseen lämpökylpyyn ja (ii) asettamalla vesi aluksi 75 -asteiseen lämpökylpyyn ja sitten 100 -asteiseen lämpökylpyyn. Miksi veden entropian muutos on molemmilla tavoilla sama?
Miksi kokonaisentropian muutos on jälkimmäisellä tavalla pienempi?
- (b) (2p) Lämpövoimakone ottaa lämpövarastosta lämpöä 100 W teholla. Vaikka kitka unohdettaisiin ja kone olisi ideaalinen, niin miksei se silti voi tehdä työtä 100 W teholla?
- (c) (2p) Kun tiedetään kaikkien lämpövarastojen lämpötilat, niin ideaalisen lämpövoimakoneen, jääkaapin ja lämpöpumpun ominaisuuksien laskemiseen tarvitaan vain kaksi termodynamiikan lakia. Mitkä ne ovat?
- (d) (3p) Työhuoneen pöydällä on pikkuinen lämpövoimakone, joka ottaa energiansa kuumaa teetä täynnä olevasta kupista. Mitä tietoja tarvitsisit, että voisit laskea kauanko lämpövoimakone pysyy käynnissä?

3. Tarkastellaan faasidiagrammassa kahden faasin koeksistenssikäyrää.

- (a) (3p) Koeksistenttikäyrälle on johdettu yleinen ehto. Mikä se on?
- (b) (3p) Jos koeksistenssikäyrältä tunnetaan yksi piste (P_0, T_0) , esimerkiksi veden kiehumislämpötila $T_0 = 373 \text{ K}$ paineessa $P_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$, niin millä oletuksilla voit laskea muutamia lähipisteitä, vaikkapa veden kiehumislämpötilan hiukan korkeammassa paineessa?
- (c) (3p) Mitä tietoja tarvitsisit koko koeksistenssikäyrän laskemiseksi?

4. (a) (2p) Lämpökapasiteetti vakioaineessa on $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, missä entalpia on $H = E + PV$. Miksei C_P ole pelkästään sisäenergian derivaatta vakioaineessa, vaan mukaan pitää ottaa entalpiain PV -termi?
- (b) (1p) Miksi todellisen aineen lämpökapasiteetti menee aina nolnaan kun lämpötila laskee absoluuttiseen nollapisteeseen?
- (c) (2p) Todista yleisesti, että energia siirtyy aina kuumemmasta kappaleesta kylmempään.
- (d) (2p) Selosta lyhyesti, miten systeemin energiatilojen todennäköisyydeksi lämpötilassa T saadaan Boltzmannin jakauma $p_i = \frac{1}{Z} e^{-E_i/(k_B T)}$,
- (e) (3p) Paine saadaan mikrotilojen i todennäköisyyksistä p_i ja energioista E_i kaavalla

$$P = \sum_i p_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial V} \right)_{T,N} .$$

- (i) Miksi paineen kaavoissa on aina jonkin energiasuureen derivaatta tilavuuden suhteen?
- (ii) Entropian laskemiseksi riittää pelkkä p_i , mutta miksei se riitä paineen laskemiseksi?

5. (10p) Klassisen, vuorovaikuttavassa systeemissä on N identtistä hiukkasta, joiden massa on m . Systeemin Hamiltonin funktio on

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{q}) ,$$

missä $U(\mathbf{q})$ on hiukkasten paikkavektorista \mathbf{q} riippuva hiukkasten potentiaalienergia. Partitiofunktio on

$$Z = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int d^{3N}p e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}} \times \int d^{2N}q e^{-\beta U(q)} .$$

- (a) Mistä kerroin $1/N!$ johtuu? Tarkastelu on puhtaasti klassinen. Miksi kaavassa on silti Planckin vakio \hbar ?
- (b) Jos kyseessä on kaasu, niin miten hiukkasten välinen vuorovaikutus $U(\mathbf{q})$ vaikuttaa kaasun Joule-Thomson kertoimeen?
- (c) Oletetaan, että hiukkaset eivät vuorovaikuta keskenään, mutta ne ovat harmonisessa potentiaalissa. Miksi tässä tapauksessa voi soveltaa ekvipartitioteoremaa?
Bonus: Laske systeemin energia ekvipartitioteoreemalla.

QUESTIONS IN ENGLISH

1. Answer the following questions, justify briefly:

- (a) (2p) Why doesn't ideal gas internal energy depend on volume?
- (b) (2p) Originally, ideal gas occupies a sphere of radius R . The sphere transforms smoothly to a cube, so that the gas volume doesn't change. How does the gas entropy change and why?
- (c) (2p) Jack devours a large hamburger with energy content 500 kcal, aka 2.092×10^6 J. Assuming all energy is transformed to heat, how much does Jack's entropy increase, taking that his body temperature stays at 37°C ?
- (d) (1p) Why can't one describe a body by saying that it has heat Q , or that it contains work W ?
- (e) (3p) The Gibbs free energy G is extensive. How does this lead to the fact that N identical particles have $G = \mu N$, and that the chemical potential is inevitably only a function of pressure and temperature, $\mu = \mu(P, T)$?

2. (a) (2p) In a demo question we compared heating water from temperature 0°C to 100°C (i) directly by putting it in contact with a 100°C heat reservoir (ii) first by putting it in contact with temperature 75°C heat reservoir, and with a 100°C reservoir. Why is the change in entropy of water the same in both cases? Why is the total entropy change lower in the latter way of heating?
- (b) (2p) A heat engine takes heat with power 100 W . Without friction and with an ideal heat engine, why can't the engine do work with power 100 W ?
- (c) (2p) Knowing temperatures of heat reservoirs, you only need two laws of thermodynamics to calculate the properties of an ideal heat engine, refrigerator, and heat pump. Name the two laws.
- (d) (3p) On an office desk sits a small heat engine, that takes runs on energy taken from a hot cup of tea. What information would you need to calculate how long the engine keeps running?

3. Let's examine a phase diagram and the coexistence curve between two phases.
- (a) (3p) There is a general condition for the coexistence curve. What is it?
 - (b) (3p) If we know a single point (P_0, T_0) on the coexistence curve, for example the boiling point of water $T_0 = 373\text{ K}$ and $P_0 = 1.01325 \times 10^5\text{ Pa}$, what assumptions would you make to calculate a few nearby points on the curve, say the boiling temperature of water at a slightly higher pressure?
 - (c) (3p) What do you need to know in order to be able to calculate the whole coexistence curve?

4. (a) (2p) Heat capacity in constant pressure is $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, where enthalpy is $H = E + PV$. Why makes C_P different from the derivative of just internal energy at constant pressure, so that you need to include the PV term in enthalpy?
- (b) (1p) Why does the heat capacity of all real matter go to zero as temperature is lowered to absolute zero?
- (c) (2p) Give a general proof, that energy is always transferred from a hotter body to a colder one.
- (d) (2p) Explain briefly some way to prove that the probability of energy states as a function of temperature is given by the Boltzmann distribution $p_i = \frac{1}{Z}e^{-E_i/(k_B T)}$.
- (e) (3p) Pressure can be computed from probabilities p_i and energies E_i of microstates i using the formula

$$P = \sum_i p_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial V} \right)_{T,N} .$$

- (i) Why does equations for pressure always contain derivatives of some energy variable with respect to volume?
- (ii) To determine entropy it's enough to know only p_i , but why is p_i not enough to determine pressure?

5. (10p) A classical, interacting system has N identical particles with mass m . The Hamiltonian's function is

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + U(\mathbf{q}) ,$$

where $U(\mathbf{q})$ is the potential energy, that depends on particle coordinates \mathbf{q} . The partition function is

$$Z = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int d^{3N}p e^{-\beta \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}} \times \int d^{2N}q e^{-\beta U(\mathbf{q})} .$$

- (a) Where does the factor $1/N!$ come from? The model is entirely classical. Why is there Planck's constant \hbar ?
- (b) If we are talking about gas, how does the particle-particle interaction in $U(\mathbf{q})$ affect on the Joule-Thomson coefficient?
- (c) Let's assume particles are not interacting with each other, but that they are in a harmonic potential. Why can you in this case apply the equipartition theorem?
Bonus: Calculate the energy of the system using the equipartition theorem.

Mahdollisesti hyödyllisiä tietoja / potentially useful information

$$k_B = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad R = k_B N_A = 8.3143 \text{ J/molK} \quad N_A = 6.022 \times 10^{23} / \text{mol}$$

$$k_B \cdot 300 \text{ K} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad 0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K} \quad 1 \text{ atm} = 101.3 \text{ kPa} \quad g = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$$dE = \delta Q + \delta W \quad dE = TdS - PdV + \mu dN$$

$$F = E - TS \quad G = E - TS + PV \quad H = E + PV$$

$$S = k_B \ln \Omega \quad \ln n! \approx n \ln n - n \quad \binom{N}{n} \equiv \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (\text{thermodyn. } E = \text{stat. phys. } \langle E \rangle)$$

$$C_V \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{V,N} = \left(\frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad C_P \equiv T \left(\frac{dS}{dT} \right)_{P,N}$$

$$\kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{T,N} \quad \kappa_S \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP} \right)_{S,N}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z \right]^{-1} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)_z \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_z \quad \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

$$S = -k_B \sum_{\nu} p_{\nu} \ln p_{\nu} \quad p_{\nu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\nu}} \quad Z = \sum_{\nu} e^{-\beta E_{\nu}} \quad \beta \equiv 1/(k_B T)$$

$$PV = Nk_B T = nRT \quad E = \frac{3}{2} Nk_B T \quad \left(\frac{dP}{dT} \right)_{\text{cx}} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T \Delta V}$$

$$\sinh x \equiv \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \cosh x \equiv \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1 \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$