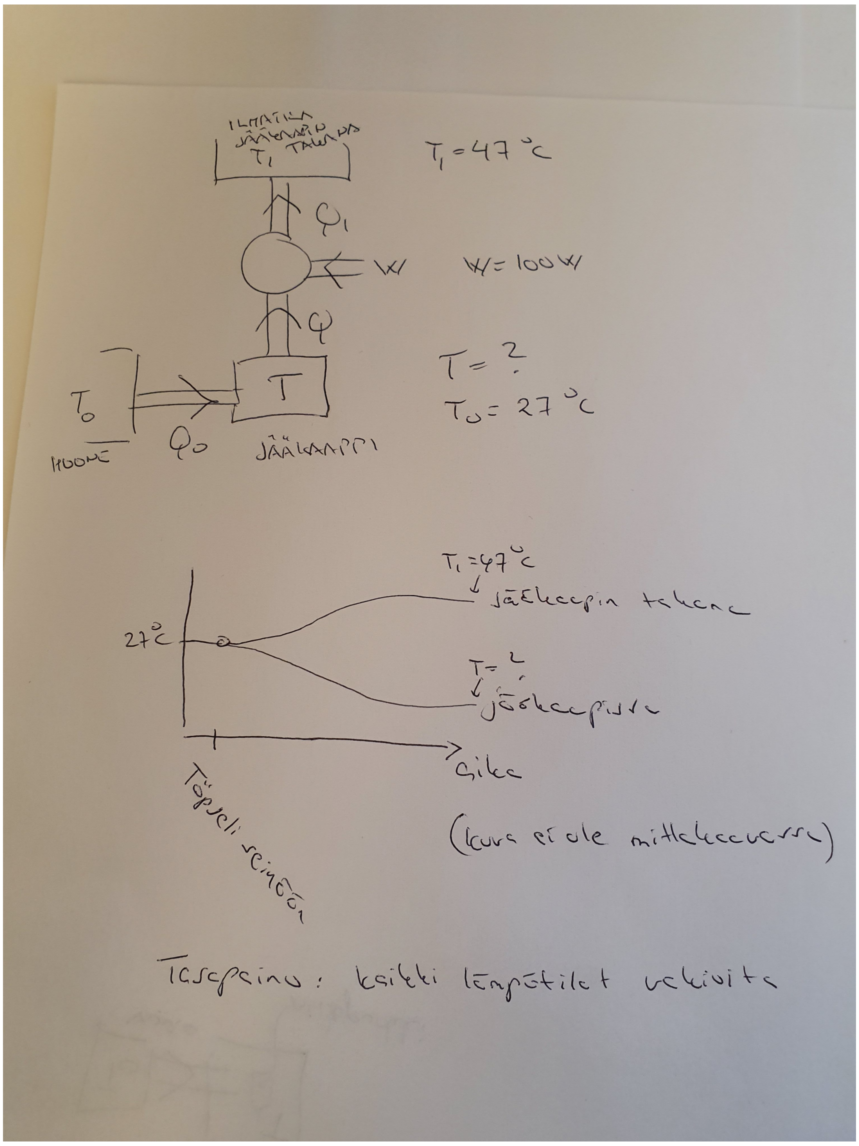
**KYSYMYS**

Tarkastellaan vuotavaa jääkaappia, jonka kuuma lämpövarasto on ilma jääkaapin takana lämpötilassa $T_1 = 47\,°\mathrm{C}$. Kompressorin käyttää sähköä 100 W ja jääkaapin ulkopuolelta vuotaa jääkaappiin lämpöä teholla $k(T_0 - T)$, missä $k = 10\,\mathrm{W/K}$, $T_0 = 27\,°\mathrm{C}$ on huoneilman lämpötila ja $T$ jääkaapin sisälämpötila. Mikä on kylmin lämpötila, jonka tällainen jääkaappi voi teoriassa saavuttaa? Prosessi on syklinen.

**VASTAUS**

Kutsun jatkossa jääkaapin sisällä olevaa kylmää tilaa "jääkaapiksi" ja jääkaappia koneistoineen "koneeksi" (koko vekotin, kompressori ym. toteutukseen liittyvä).

Huoneilmasta (lämpötila $T_0 = 27\,°\mathrm{C}$) johtuu jääkaappiin lämpömäärä $Q_0$, jääkaapista (lämpötila $T$) otetaan lämpömäärä $Q$, kone tekee työtä $W \leq 100\ W$ (otetaan sähköverkosta), jääkaapin taakse (lämpötilaan $T_1 = 47\,°\mathrm{C}$ siirtyy lämpömäärä $Q_1$.




1) Energia säilyy, joten $Q_1 = W + Q$. Jääkaapin lämpötila ei enää muutu, joten sieltä lähtee ja sinne tulee sama lämpömäärä: $Q = Q_0$.

2) Kylmin lämpötila saavutetaan, kun kone jaksaa täydellä teholla ($W = 100$ W) juuri ja juuri siirtää kaiken jääkaappiin tulevan lämpömäärän pois jääkaapista.

3) Termodynamiikan 2. pääsäännön mukaan entropia kasvaa tai pysyy samana.

Entropian muutokset tapahtuvat jääkaapista poistetun lämmön ja jääkaapin taakse siirretyn lämmön vuoksi. Entropiaan vaikuttavat termit seuraavat:

| | |
|---|---|
| $\frac{Q_1}{T_1}$ | entropia kasvaa jääkaapin takana |
| $-\frac{Q}{T}$ | jääkaapin entropia pienenee poistetun lämpömäärän vuoksi |
| $\frac{Q_0}{T}$ | jääkaapin entropia lisääntyy sinne vuotaneen lämpömäärän vuoksi |
| $-\frac{Q_0}{T_0}$ | huoneilman entropia pienenee sieltä jääkaappiin vuotaneen lämpömäärän vuoksi |

Termodynamiikan 2. pääsääntö koko systeemille on siis

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q}{T} + \frac{Q_0}{T} - \frac{Q_0}{T_0} \geq 0 \ .$$

Sijoittamalla $Q_1 = W + Q$ ja $Q = Q_0$ saadaan epäyhtälö

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q}{T_0} = \frac{W+Q}{T_1} - \frac{Q}{T_0} \geq 0 \ . \tag{1}$$

Nyt tulee ratkaisun kannalta tärkeä havainto: Pelkkä kokonaisentropian tarkastelu ei riitä, koska se ei vielä takaa, että kone toimii syklisesti. Lämpövarasto $T$, koneisto ja lämpövarasto $T_1$ muodostavat kokonaisuuden, syklisesti toimivan koneen, jonka hyötysuhde on parhaimmillaan Carnot'n jääkaapin hyötysuhde: sen entropian muutos ei voi olla negatiivinen,

$$\Delta S_{\text{kone}} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q}{T} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q} \geq \frac{T_1}{T} \ . \tag{2}$$

Tarkistus: edellä annettu lisäehto tarvitaan, jotta koneen suurin mahdollinen hyötysuhde olisi Carnot'n jääkaapin hyötysuhde,

$$\eta = \frac{Q}{W} = \frac{Q}{Q_1 - Q} = \frac{1}{\frac{Q_1}{Q} - 1} \leq \frac{1}{\frac{T_1}{T} - 1} = \frac{T}{T_1 - T} \quad \text{OK} \ .$$

Lämpömäärä, jonka syklisesti toimiva kone kykenee poistamaan jääkaapista on siis

$$Q = \eta W \leq \frac{T}{T_1 - T} W \ . \tag{3}$$

Tasapainossa jääkaapista poistuu sama lämpömäärä kuin sinne tulee, joten $Q = Q_0$ ja

$$Q = Q_0 = k(T_0 - T) \ . \tag{4}$$

Meillä on näin kolme ehtoa, (1), (2) ja (4). Ehto (2) on tiukempi kuin (1), koska

$$\Delta S = \underbrace{\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q}{T}}_{\geq 0, \text{ehto (2)}} + \frac{Q_0}{T} - \frac{Q_0}{T_0} \geq \frac{Q_0}{T} - \frac{Q_0}{T_0} = Q_0 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \geq 0 \ ,$$

koska $Q_0 > 0$ ja $T < T_0$. Ehdosta (2) saatiin (3), ja yhdistämällä tämä ehdon (4) kanssa saadaan (huom. $T_1 - T > 0$)

$$k(T_0 - T) \leq \frac{T}{T_1 - T} W \Leftrightarrow (T_0 - T)(T_1 - T) \leq (W/k)T \ ,$$

joka sievenee muotoon

$$T^2 - (T_1 + T_0 + W/k)T + T_0 T_1 \leq 0 \ .$$

Vasen puoli on ylöspäin aukeava paraabeli, joten ratkaisu on nollakohtien välissä, $T_a \leq T \leq T_b$, missä

$$\begin{aligned}
T_{a,b} &= \frac{1}{2}[(T_0 + T_1) + W/k] \pm \sqrt{\frac{1}{4}[(T_0 + T_1) + W/k]^2 - T_1 T_0} \\
&= (315,15 \pm 56,80)\ \mathrm{K} \\
&= 258{,}35\,\mathrm{K} \quad \text{tai} \quad 371{,}9\,\mathrm{K} \\
&= 98{,}9\,^\circ\mathrm{C} \quad (\text{ei ratkaisu, oletettiin } T_1 - T > 0) \ \ \text{tai} \quad -14{,}8\,^\circ\mathrm{C} \ .
\end{aligned}$$

Tulos on $\underline{\underline{T = -14{,}8\,^\circ\mathrm{C}}}$ on kylmin saavutettava lämpötila.