

KYSYMYS

Mikrokanoninen joukko; Johda ideaalikaasun tilayhtälö $PV = Nk_B T$ lähtien entropian muutoksen lausekkeesta

$$S_A - S_B = Nk_B \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) . \quad (1)$$

VASTAUS

Ideaalikaasun määrittelee ominaisuus, ettei sen sisäenergia muutu kaasun laajetessa. Jos kaasu laajenee tilavuudesta V tilavuuteen $V + \Delta V$, niin statistinen paino kasvaa $(V + \Delta V)/V$ -kertaiseksi¹, joten entropia kasvaa määrän

$$\Delta S = Nk_B \ln \left(\frac{V + \Delta V}{V} \right) = Nk_B \ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V} \right) . \quad (2)$$

Jos $\Delta V \ll V$, niin

$$\Delta S = Nk_B \frac{\Delta V}{V} , \quad (3)$$

joten differentiaalisille muutoksille

$$dS = Nk_B \frac{dV}{V} . \quad (4)$$

Sisäenergia ei muutu ideaalikaasun laajetessa, joten tästä seuraa, että

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} = Nk_B \frac{1}{V} . \quad (5)$$

ja vertaamalla paineen määritelmään

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} . \quad (6)$$

saadaan ideaalikaasun tilayhtälö,

$$P = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{U,N} = Nk_B \frac{T}{V} \Leftrightarrow PV = Nk_B T . \quad (7)$$

¹Luennoissa otettiin tapaus $\Delta V = V$, jolloin statistinen paino (mikrotilojen lukumäärä) kaksinkertaistui.