

Analyttinen S-matriisi

- Tavoite: mitki $\frac{\partial \sigma_{tot}}{\partial t}$ perdo, mitä on $\frac{Re A}{Im A}$?
- Ennen QCD:ta ajateltiin, ettei lähesiellä kirkkailulle välttämätöni symmetria kohonaa valvoat vuorovaihtuvat. Nytkä tiedämme, ettei näin ole, ja monet asiat ovat muuttaneet sitä lähesikin.

$2 \rightarrow 2$ -prosessi, $s+t+u = \sum m_i^2$

valitun t, t ,
rakennus

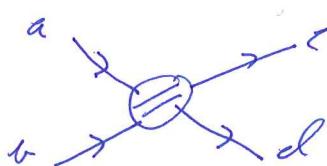
Postulaatti 1: Lorentz-invarianssi: $S(r, t)$

Postulaatti 2: Unitaarisuus: $\sigma_{tot} = \frac{1}{2\pi} 2 Im A$

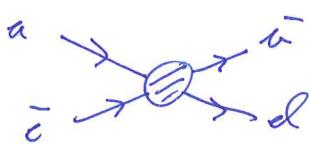
Postulaatti 3: Analytyyys

S-matriisi on muuttujien r, t analyyttinen funktio, ja voidaan analyyttisesti jatkaa epäsymmetrisille (esim. $r < 0, t > 0$) muuttujien arvoille.

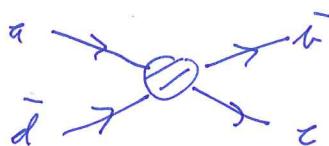
Crossing-symmetria (tarvitsemme lähesi CPT-symmetrii)



$$r\text{-kanava } A(r, t, u) \begin{array}{c} ab \\ + \\ ac \\ - \\ ad \\ - \end{array}$$



$$t\text{-kanava } A(t, s, u) \begin{array}{c} ab \\ - \\ ac \\ + \\ ad \\ - \end{array}$$



$$u\text{-kanava } A(u, t, s) \begin{array}{c} ab \\ - \\ ac \\ - \\ ad \\ + \end{array}$$

Sama analyyttinen funktio $A(r, t)$ kuvailee prosessia $Q^2 = n$ ohi alueissa.

Dispersioonrelaatio

$$\tau < 4m^2 \Rightarrow \text{ei hiukkastuslota} \Rightarrow \text{Im } A(\tau, t) = 0$$

mitä $m=0$? Argumentti ei voida välittää.

Toini hadroneilla on siis merta.

"Schwarz reflection principle"

$$\Rightarrow (A(\tau, t))^* = A(\tau^*, t)$$

$\text{Im } t = 0$ jolloin ~~ja~~
välillä $\subset R$

$$\Rightarrow A^* = A(\tau^*) \quad \forall \tau \in C!$$

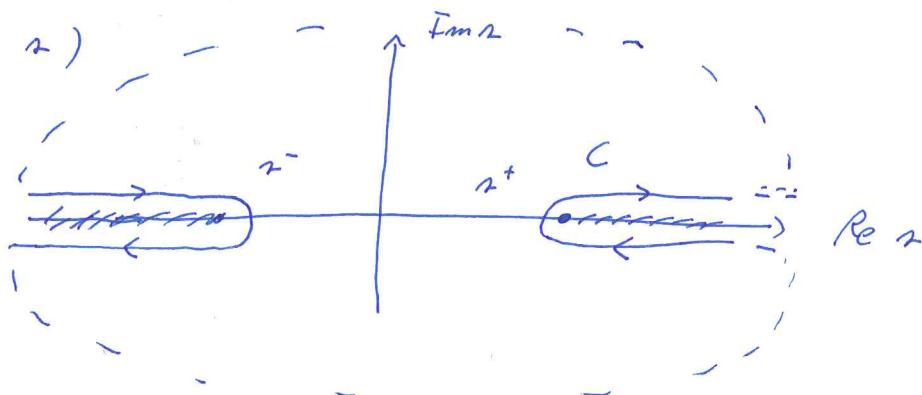
Konvențio: fysikaalinen $A(\tau, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} A(\tau + i\epsilon, t)$

$$\text{Im } A(\tau, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (A(\tau + i\epsilon, t) - A(\tau - i\epsilon, t))$$

$\neq 0$, kun $\tau > \tau^+$

$i^q \quad \tau < \tau^- < 0 \quad (\text{u-kanava!})$

τ^+, τ^- riippuvat maoista, $t = \text{vt}$ jne.



Oletus: ei myöskään muulla τ -taron kuin reaalialueella

\Rightarrow

$$\text{Cauchy: } A(\tau, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{A(z', t)}{z' - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\tau^+}^{\infty} dz' \frac{A(z'+i\epsilon, t)}{z'-z} + \int_{\infty}^{\tau^+} dz' \frac{A(z'-i\epsilon, t)}{z'-z} \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\tau^-} dz' \frac{A(z'+i\epsilon, t)}{z'-z} + \int_{\tau^-}^{-\infty} dz' \frac{A(z'-i\epsilon, t)}{z'-z} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\tau^+}^{\infty} dz' \frac{\text{Im } A(z', t)}{z'-z} + \int_{-\infty}^{\tau^-} dz' \frac{\text{Im } A(z', t)}{z'-z} \right] \quad \underline{\text{dispersionrelaatio}}$$

Dispersionrelaation idea: jos tunnetaan $\text{Im } A(s, t)$ (analyyttisen) amplitudin Im-osa, voidaan kontruoide integraanalle koko amplitudi:

Konsistenssitarvike: novittelemme, että fyysisellinen amplitudi on $A(s, t) = \bar{A}(s+i\varepsilon, t)$

$$A(s+i\varepsilon, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\text{Re } s'} \frac{\text{Im } A(s', t)}{s' - s - i\varepsilon}$$

$$\frac{1}{s' - s - i\varepsilon} = i\pi \delta(t) + \frac{1}{s'} \rightarrow \text{Im } A(s+i\varepsilon, t) \rightarrow \text{vikein.}$$

Tässä oletteliin, että $A(s, t)$ lähiosat ovat nollaammei
tunsi $\frac{1}{s}$, kun $|s| \rightarrow \infty$. Jos näin ei ole, voidaan
samoin johtaa "subtrahointi" dispersionrelaatio
soveltuuksella Cauchyn kaavaa funktioon

$$\frac{A(s, t)}{(s - s_0)^n}$$

Esim:

$$A(s, t) = \underbrace{C}_{\text{konstantti}} + \frac{1}{\pi} (s - s_0) \left[\int_{\text{Re } s'} \frac{\text{Im } A(s', t)}{(s' - s_0)(s' - s)} \right]$$

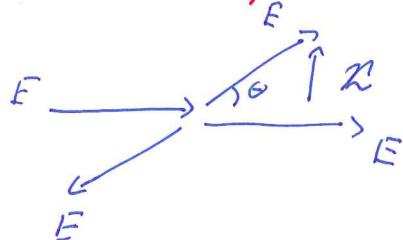
Yksi ylinäärinen ratkaisu, $A(s_0)$, joka ei
soveltu dispersionrelaatiolle.

Sommerfeld-Watson-muunnos

Ora-altaajatelema: heliketjun vironla-amplitudi on tasonaalisista polynomien rajaamia.

Tilanteeseen soveltuva kanto ovat legendren polynomiit P_ℓ , argumenttios vironla kulman korini: $P_\ell(\cos\theta)$. Joskus niin kain veljeketjun orbitaali. Jotta tilanne voidaan tehdä herentti-invariantille tavalle, pitää ilmastaa $\cos\theta$ vankelatunniin muuttujien avulla.

CMS:



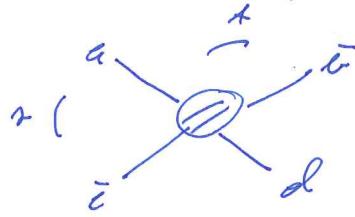
$$m = 0$$

$$\tau = 4E^2$$

$$\begin{aligned}
 t &= ((E, \varphi, E) - (E, \varphi, E \cos\theta))^2 \\
 &= -\varphi^2 - E^2(1 - \cos\theta)^2 \\
 &= -E^2 (\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) \\
 &= -\frac{\tau}{8} (1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1 + \underline{\frac{2t}{\tau}}
 \end{aligned}$$

Kalustan käytävä ironing-symmetriios, jolle vadaan yhteyksi siihen paikkaan välille. Tavoitteena on pyritäksämme t -taravaa, jolle vadaan epäteoriaali tulos, lähemmällä lähellä t -taravan prosimista.

Osa- α -kohanjotelma t -kanavan prosessille



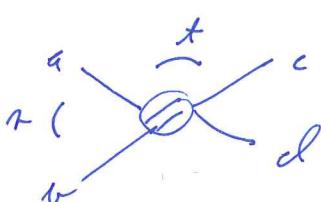
$$A_{a\bar{c}\rightarrow b\bar{d}}(n, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(n) P_l \left(1 + \frac{2t}{n}\right)$$

partial wave amplitude

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

fyrikaalinen
nironlahtea
 t -kanavalle.

n -kanava



$$A_{a\bar{c}\rightarrow b\bar{d}}(n, t) = A_{a\bar{c}\rightarrow b\bar{d}}(t, n)$$

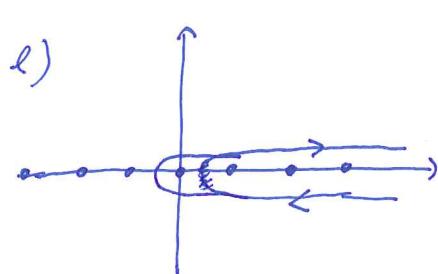
$$= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(t) P_l \left(1 + \frac{2n}{t}\right)$$

~~✓~~
 $\angle < 1$, ei enää
fyrikaalinen
nironlahtea

On jälteellä nironlahti-amplitudi
epäfyrikaalille kosteille
alueille, jossa onkin tärkei
proveniin fyrikaalisen alue.

Tullio Regge (valvoville vuorovaihdolla, SW al-
kayttämät samaa tempua jo aiemmin), ~1958

→ Muodostetaan l-jakkuvalni kompleksiseksi
murttijakkuvalni.



$$= \frac{i}{2} \oint_C dl (2l+1) \frac{a_l(l, t)}{\sin(\pi l)} P_l \left(1 + \frac{2n}{t}\right) (-1)^l$$

navat $l \in \mathbb{Z}$, residy $\frac{1}{2\pi} (-1)^l$

$$\oint_C = -2\pi i (\Sigma \text{residyt})$$

↑ reitti vääränä pienomurunsa

Ontko $a(l,t)$ yksikköillä reaali l $\in \mathbb{C}$?
 Ei avan.. Carlson (1914) osoitti, että funktio
 f_l , $l \in \mathbb{N}$ voidaan yksikköillä analytisti jatkaa
 reaali l $\in \mathbb{C}$ vain, jos ~~$|f_l(z)| < C e^{\sigma|z|}$~~
 $|f_l(z)| < C e^{\sigma|z|}$.

Se, l $\in \mathbb{N}$ määritetään l-käs. $f_l(z)$, l $\in \mathbb{C}$ on
 vain, jos $|f_l(z)| < C e^{\sigma|z|}$ $z \rightarrow \infty$
 Jos $f_l \sim (-1)^l = e^{-i\pi l}$ \rightarrow ongelma.

Erotellaan l $\in \mathbb{Z}/N$ ja ~~l+1 $\in \mathbb{Z}/N$~~ .

$$A(n,t) = \frac{i}{2} \oint_C dz z^{l-1} (2z+1)^n \frac{P(l, 1 + \frac{2\pi}{t})}{\sin \pi z} \sum_{q=\pm 1} \underbrace{\frac{z+e^{-i\pi l}}{2}}_{\text{signature}} a^{(q)}(l, t)$$

$(-1)^l$ absorboileva ratkaisu

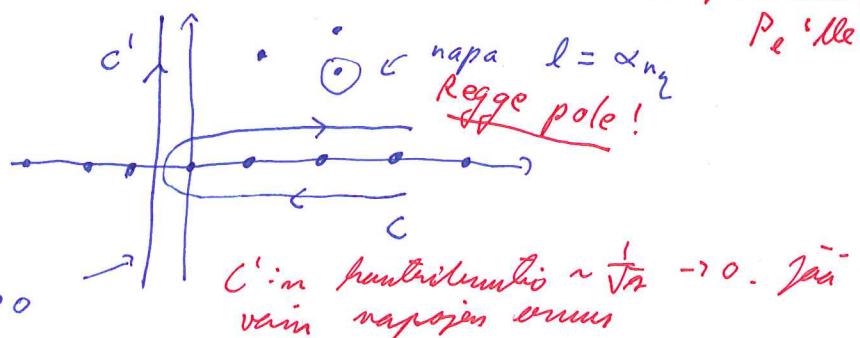
$q=1 \rightarrow l$ parillinen

$q=-1 \rightarrow l$ pariton

Kun $l \in \mathbb{Z}$, Pe on polynomi \rightarrow äärellinen kaikilla argumenttien arvoilla. Mielivaltaisella l:lla tavallinen rajaarvoity ei konvergisi, kun argumentti ≥ 1 .
 Legendren funktio Pe voidaan kuitenkin analytisti.

$$P(l, 1 + \frac{2\pi}{t}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(l + \frac{1}{2})}{\Gamma(l+1)} \left(\frac{4\pi}{t}\right)^l \quad \text{HT?}$$

Integroointityy
Pe 'lle



Deformoidaan integroimistie
 Tämä vai alla
 napojia $\Rightarrow \Re l = -\frac{1}{2}, \Im l \rightarrow 0$

$$A(n, t) = \sum_l \sum_{n_l} \frac{\gamma - e^{-i\omega \alpha_{n_l}(t)}}{2} \xrightarrow{\text{red.}} \frac{\tilde{B}_{n_l}(t)}{\sin(\omega \alpha_{n_l}(t))} e^{\alpha_{n_l}(t)}$$

Tekijöitä absorboitu tuntemattomuus
vaihdetaan.

Näytä, jolla on murin reaktion dominoin
muodossa energialla

$$A(n, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\gamma + e^{-i\omega \alpha(t)}}{2} \tilde{B}(t) \approx e^{\alpha(t)},$$

$$\frac{\operatorname{Re} A}{\operatorname{Im} A} = - \frac{\gamma + \cos(\omega \alpha(t))}{\sin(\omega \alpha(t))}, \text{ missä } \alpha(t) = \frac{\partial A(t, t)}{\partial \ln n}.$$

Heikillä tutta kaava... Huom! $\gamma = \pm 1$,
jotain tietää kumpi; riippuu uroavista
hiukkarsista.

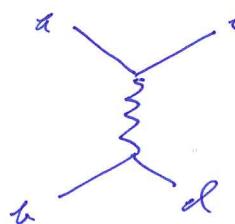
Espätiivisesti asia on siis yhteyks amplitudin
kaarin ja energiaruumusvuden välillä
välillä, reka tyypillinen potenssilaski-
käytös n :n funktions.

Reggen radatRegge trajectory

Mita fyysikaalisi objekteja vartaavat nämä t-tilat rüppuvat mavaat l:n kompleksitason?

Napa-amplitudina = fyysikaalisen tilan

Nyt esitellään n-kanavan reaktioita



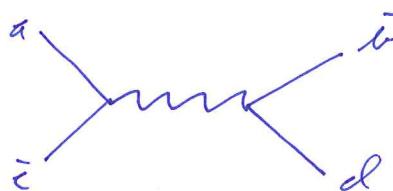
$A_{ab \rightarrow cd} \sim$

$$\propto \frac{\alpha(x)}{\sin(\pi x \alpha(x))}$$

napa, kaikun
 $\alpha(x) \in \mathbb{N}$

x :n eksponentti
= vaihdetun hukkisen
spin

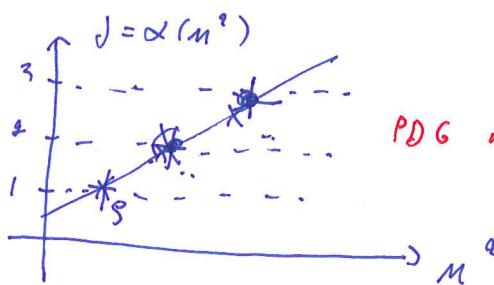
Muisteluaan, että t-kanavan prosessi näyttää siltä:



$$\propto \frac{x^{\alpha(x)}}{\sin(\pi x \alpha(x))}$$

↑
resonanssi, massa $M^2 = x$
eholosta $\alpha(M^2) \in \mathbb{N}$

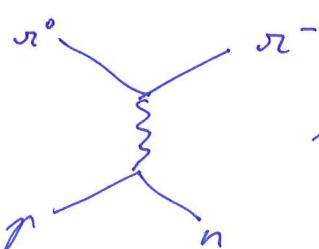
Kokeellisesti lineaarinen $\alpha(M^2)$:



PDG mesonit

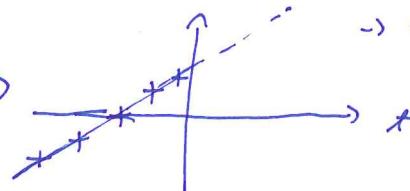
$$\alpha(M^2) = \alpha_0 + \alpha' M^2$$

↑
Regge slope



$$\sim x^{\alpha(x)}$$

Muisteluaan näkymäsalan t-rüppuvuus



Pomeroni

Fitataan kohonairvaihtuvuuden potenssialti:

$$\sigma_{\text{tot}}^{pp} \sim r^{0.08} \sim \frac{1}{\pi} \text{Im } A(r, t) \Big|_{t=0} \sim r^{\alpha_0^P - 1}$$

Pomeranchuk: $\sigma_{\text{tot}}^{\text{tot}}(r \rightarrow \infty) \Leftrightarrow$ vakuumikvanttilukujen vaihto
 $(\sigma_{pp}^{\text{tot}} = \sigma_{p\bar{p}}^{\text{tot}})$

• $\sigma_{\text{tot}}^{pp} :$ ja vastaava Reggen rata $\alpha^P(\mu^*) = \boxed{\text{pomeroni } / P}$

• vastaavaa fysikaalista hitua $M^2 = \frac{j - \alpha_0^P}{\alpha'}$
 ei havaittu.

Liimapallo? ~~J~~

$$j = 2$$

$$\alpha_0^P = 1.08$$

$\alpha' = 0.25 \text{ GeV}^{-2}$ ↪ ~ sama kiehulla Reggen radolla

$$\Rightarrow M_{j=2}^2 \approx 4 \text{ GeV}^2$$

$$\frac{\text{Re } A}{\text{Im } A} = - \frac{g + \cos(\omega r \alpha_0^P)}{\sin(\omega r \alpha_0^P)} \approx - \frac{\pm 1 - 1 + \frac{1}{2}(0.08)^2}{-0.08 \omega}$$

$$\approx \begin{cases} \frac{0.08 \omega}{2} \approx 0.1 & g = 1 \quad \leftarrow \text{havaitaan} \\ -\frac{g}{0.08 \omega} \approx -8 & g = -1 \end{cases} \Rightarrow g_P = 1$$

Vaihto tallaista eliästä esittää QCD:n?

Ei eivä, mutta jotain hieman toinen tallaista hyllätään.