

## Vaikutusala ja sironta-amplitudi

- Alkutila  $|i\rangle \in \mathcal{F}$ in avaruus, monihiukkestila
- Aikakehitys operaattori eli S-matriisi

→ lopputila  $|f\rangle$

Projisoidaan lopputila  $|f\rangle$  vastaava komponentti; antaa todennäköisyysamplitudin sille, että lopputilassa on tilan  $|f\rangle$  hiukkeen - riällo

~~S-matriisi~~

S-matriisielementti  $\langle f | S | i \rangle \equiv S_{fi}$

Tod. näk.  $|S_{fi}|^2 \sim$  vaikutusala  $i \rightarrow f$

Kuna QM: nä: todennäköisyys  $\sim$  amplitudin itsearvon neliö.

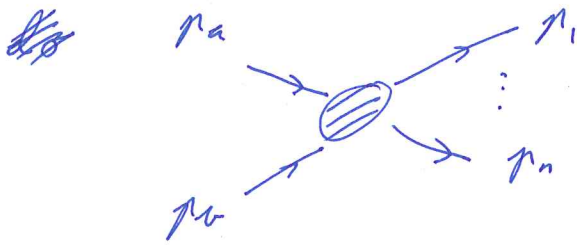
Erötellään S-matriisista tapaus, jolloin mitään sirontaa ei tapahdu:

$$S = 1 + i T \leftarrow T\text{-matriisi}$$

$\uparrow$  ei sirontaa       $\uparrow$  konventio

Nelitulokemäärä riikyy (päätti jos ulkoinen klassinen kenttä mukana; tähän pitää Feynmanin sääntöjä väliin laajentaa) → käytännöllistä erotella

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(\sum p_f - \sum p_i) \underbrace{A(i \rightarrow f)}_{\text{Sironta-amplitudi}}$$

2 → n - prosessi

$$s = (p_a + p_b)^2$$

$$d\sigma = \frac{1}{\Phi} |A(i \rightarrow f_n)|^2 d\mathcal{R}_n$$

$\uparrow$  flux factor, vuote kija  
 $\uparrow$  invariantti n-hiukkas-faasiavaruus

$$\Phi \propto s, \text{ kun } s \text{ iso}$$

$[\sigma] = -2$ , voi viheasti ajatella pinta-alana

$$\sigma = \frac{\text{tapahtumia / aika}}{\text{tulovirta / (aika \cdot pinta-ala)}} \sim \text{pinta-ala}$$

$$d\mathcal{R}_n = \left[ \prod_{i=1}^n \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(k_i^2 - m_i^2) \right] (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_i k_i)$$

$$= \frac{d^3 \vec{k}_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

- Yleensä muotoa näkee monessa, että Lorentz-invariantti.
- $2\pi$ : ei aine  $d^3 k = n$  ja  $\delta(k) = n$  mukana

→ |  
L1 17.1.11

i) A yhdistämätkä :

(i, for  $S = 1 + iT$ )

1. propagaasi Hori

$$\rightarrow \frac{i}{z - m + i\epsilon}$$



$$-i \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$$

*Fegumenis mitans*



$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

2. verteksi

icy ~

varian - e

$$-ig \gamma^{\mu} t_{ij}^a$$

various + 7

4-impulssi säilyy

$$-g \rho^{abc} [(p-q)^c g^{ab}]$$

$$+ (q-r)^x \mathcal{L}^{\alpha\beta} + (r-n) \mathcal{L}^{\alpha\beta} ]$$

3. ulkoiset viivat:

$$\textcircled{\text{E}} \quad \varepsilon^{\wedge}(n)$$

4. sisäiset viivat:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

QCD, väri

QED: Lagrangen funktio: (tuttu kaveri?)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} + e \not{A} - m) \psi$$

$$\cdot \not{A} = \alpha^\mu \gamma_\mu$$

$$\cdot F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\cdot E^i = F^{i0} = F_{0i}$$

lineaarinen A: ma!

Etumerkki vaihe: muistisääntö  
erin.  $A=0$

$$\Rightarrow E^i = \partial_i A^0 = -\partial_i A^0 = \partial^i A^0 = F^{i0}$$

$$\cdot B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}$$

Tas etumerkki?

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A^k$$

QCD: liitteen sisäinen vapausaste:

Väri  $\psi_i$   $i = 1 \dots N_c$

fotoni  $\rightarrow$  gluoni, liimakentällä myös väri

$$A_\mu^a \quad a = 1 \dots N_c^2 - 1 = \mathcal{L}_A \leftarrow \text{sohjungevidun esityksen dimensio}$$

Vuorovaikutuksen indeksi  $i, j, a \rightarrow$  matriisi

$$t^a_{ij} \text{ fund. esityksen generaattori, } (t^a)^T = -t^a$$

$$\text{Normalisointi } \text{Tr } t^a t^b = t^a_{ij} t^b_{ji} = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

Sammas konventio!  $ii = \sum_i ii$

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}_i (i \not{\partial} \delta_{ij} - g \not{A}_a t^a_{ij} - m \delta_{ij}) \psi_j$$



Matriisinotatio  $A_\mu^a x^a = A_\mu \in N_c^2$ -matriisi

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{\bar{\psi} (i \not{\partial} - \underbrace{g A - m}_{\text{matriisi}})}_{\text{vektori}} \underbrace{\psi}_{\text{vek.}}$$

Mittainvaranssin vuoksi kenttävoimakenttä  $F_{\mu\nu}$  ei voi olla yhtä yksinkertainen kuin QED: nä.  
Sen sijaan gluonit vuorovaikuttavat keskenään l.  
gluoneilla on värivaraus l.  $F_{\mu\nu}$  on gälinävaraus.  
 $A_\mu$ : nä

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig \underbrace{[A^\mu, A^\nu]}$$

$$[x^a, x^b] = i f^{abc} x^c$$

rakennevakiot

Mittamuunnos:  $\Omega(x): \mathbb{R}^4 \rightarrow \text{SU}(N_c)$

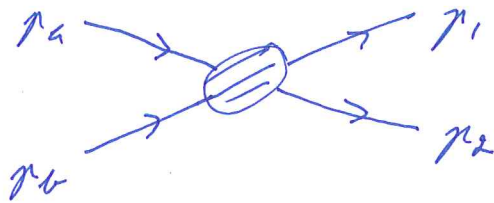
$$A^\mu(x) \Rightarrow \Omega(x) A^\mu(x) \Omega^{-1}(x) + \frac{i}{g} \Omega(x) \partial^\mu \Omega^{-1}(x)$$

$$\psi(x) \rightarrow \Omega(x) \psi(x)$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad (\text{HT FYSH300})$$

Täällä  $\mathcal{L}$  = Lagrangen funktioita voidaan  
johdella Feynmanin säännöt iännä -  
amplitudiin laskemiseksi. Tämä tehdään  
QFT- kerralla, täällä kerralla säännöt  
vain otetaan annettuna.

# Mandelstamin muuttujat ( $2 \rightarrow 2$ - prosessi)



$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 \\ \approx 2 p_a \cdot p_b$$

$$t = (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2 \\ \approx -2 p_a \cdot p_1$$

$$u = (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2 \\ \approx -2 p_a \cdot p_2$$

Huomattava:

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow t \leftrightarrow u$$

Muistetaan:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2 \approx 0$$

• suurenergiaraja:

$$s \approx -u \rightarrow \infty, \quad t < 0 \text{ kiinteä}$$

Faasiavaruus, ( $m=0$ , lasketaan C.M. koordinaateissa)

$$t = \cancel{2E_a E_b} - 2E_a E_1 + 2|\vec{p}_a| |\vec{p}_1| \cos \theta \quad \left[ -2 p_a \cdot p_1 \right]$$

$$= -2|\vec{p}_1|^2 (1 - \cos \theta)$$

$$= \frac{s}{2} (1 + \cos \theta)$$

$$[|\vec{p}_1| = |\vec{p}_a| = E_1 = E_a]$$

$$[s = (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = 4|\vec{p}_1|^2]$$

$$d\mathcal{R}_2 = \frac{d^3 \vec{p}_1}{2|\vec{p}_1| (2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2|\vec{p}_2| (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2| - \sqrt{s}) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$= \frac{d^3 \vec{p}_1}{16\pi^2 |\vec{p}_1|^2} \delta(2|\vec{p}_1| - \sqrt{s})$$

$$= \frac{d|\vec{p}_1| d\cos\theta d\varphi}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta(|\vec{p}_1| - \frac{\sqrt{s}}{2})$$

Oh. ee-symmetris,  
sym!

$$= \frac{d\cos\theta}{16\pi} = \frac{dt}{8\pi s}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{s} \frac{1}{8\pi s} |M|^2 = \frac{1}{16\pi s^2} |M|^2$$

loppulutas invarianttien  
avulla  $\rightarrow$  pätee  
m.v. koordinaateina

Valokartiokoordinaatit

Kun liikutaan (lähes) valon nopeudella  $z$ -suuntaan, on  $x \approx z$  ja  $E \approx p^z$

$\Rightarrow$  on käytännöllistä ilmaista vektorit kannassa, joka lyödyntää tätä.

$$v^\mu: \quad v^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (v^0 \pm v^z) \quad \cancel{v^0} = \cancel{v^z}$$

$$\underline{v} = (v^+, v^-)$$

$$v^2 = 2v^+v^- - \underline{v}^2 = (v^0)^2 - (v^z)^2 - (v^+)^2 - (v^-)^2$$

Metrikka

$$g_{\mu\nu} = \begin{matrix} & + & - & x & z \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

esim.

$$e^{ip \cdot x} = e^{ip^+x^- + ip^-x^+ - i\underline{p} \cdot \underline{x}}$$

$\downarrow$   
 $p^\pm$ : m kiihtyvyyden  
 muutujat  $x^\pm$ ;  
 vrt. Heisenbergin  
 ehto

Nopeudella  $\approx c$   $z$ -suuntaan:

$$E \approx p^z \rightarrow p^+ \approx \sqrt{2} E \text{ iso}$$

$$p^- = \frac{m^2}{2p^+} \text{ pieni}$$

- oletta  $p \approx 0$ , huomi: oltaisiin  $p^2 = m^2$
- vastavoima  $z$ -suuntaan:  
 $p^-$  iso,  $p^+$  pieni

Rapiditeetti

Parametrisoidaan liikemäärävektori tavalla,  
jonka muunnos boostin  $z$ -akseliin  
muuntaa on mahdollisimman yksinkertainen

• transverse mass  $m_T^2 = m^2 + p_T^2$

• rapiditeetti  $y$   $p_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} m_T e^{\pm y}$  } huom! Suoraan  
manakuorelle,  
3 parametria  $p_x, p_y, z$   
kavaa nelivektoriain

$\Rightarrow E = m_T \cosh y$   
 $p_z = m_T \sinh y$

• pseudorapiditeetti  $\eta$   $p_z = (p_T / \sqrt{2}) \sinh \eta$

• sirontakulma  $\rightarrow$

•  $\eta \approx y$ , kun  $m \approx 0$

• Detektorin kattaa kiinteän  $\eta$ -alueen  
• Voimme mitata osan PID:stä  
(the particle ID)  $\rightarrow$  helppo  
mitata

Boosti  $z$ -suuntaan  $y \rightarrow y + y_0$   
 $m_T \rightarrow m_T$

~

2. hiukkasen systeemi

$$p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} m_1 e^{y_1}, \frac{1}{\sqrt{2}} m_1 e^{-y_1}, 0)$$

$$p_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} m_2 e^{y_2}, \frac{1}{\sqrt{2}} m_2 e^{-y_2}, 0)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cosh(y_1 - y_2)$$

$$\approx e^{|y_1 - y_2|}$$

$\Rightarrow$  iso rapiditeettiero  $\Leftrightarrow$  iso kokonaisenergia