

Statistinen fysiikka, osa B (FYSA242)

Tuomas Lappi

`tuomas.v.v.lappi@jyu.fi`

Huone: FL240. Ei kiinteitä vastaanottoaikoja.

kl 2016

10. Kvanttikaasu

Aaltofunktio ja hiukkasten vaihto

Tunnettua kvanttimekaniikasta

Bosonit

- ▶ Spin kokonaisluku: 0,1,2, ...
- ▶ Esim. fotonit, pionit, ^4He , ...
- ▶ Monta identtistä bosonia:
Aaltofunktio symmetrinen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

- ▶ Bosonit yksihiukkastiloilla a, b :

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(\mathbf{x}_1)\psi_b(\mathbf{x}_2) + \psi_a(\mathbf{x}_2)\psi_b(\mathbf{x}_1)) \end{aligned}$$

- ▶ Voi olla $a = b \implies$ monta hiukkasta samalla tilalla

Fermionit

- ▶ Spin puoliluku: 1/2, 3/2, 5/2, ...
- ▶ Esim. e, p, n , ^3He , ...
- ▶ Monta identtistä fermionia:
Aaltofunktio antisymmetrinen:

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

- ▶ Fermionit yksihiukkastiloilla a, b :

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(\mathbf{x}_1)\psi_b(\mathbf{x}_2) - \psi_a(\mathbf{x}_2)\psi_b(\mathbf{x}_1)) \end{aligned}$$

- ▶ Ei olla $a = b \implies$ vain yksi hiukkanen samalla tilalla = **Paulin kielto**sääntö

Riippumattomat yksihiukkastilat: ei vuorovaikutuksia

- ▶ Oletetaan edelleen **ideaalikaasu = ei vuorovaikutuksia**
- ▶ Monihiukkastilat ovat yksihiukkastilojen tuloja
- ▶ Systeemin mikrotilan kuvaukseen riittävät
 - ▶ Yksihiukkastilat r
(tyypillisesti aaltotilat $\mathbf{k}$, joiden luku tilatiheydellä)
 - ▶ Tilalla olevien hiukkasten lukumäärä n_r
(Bosoneille $0, 1, 2, \dots$; Fermioneille 0 tai 1)

Tyypillisesti siis:

$$\sum_{\text{tilat } s} = \int dk f(k) \quad \text{esim. kaasu: } f(k) dk = \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

Esimerkiksi hiukkasten lukumäärä

$$\langle N \rangle = \sum_{\text{tilat } r} \langle n_r \rangle = \int dk f(k) \langle n_k \rangle$$

Suurkanoninen partitiofunktio

Yksi tila jolla n hiukkasta $\Rightarrow$ energia $n\varepsilon$

- Yhden tilan tilasummat

$$\mathcal{Z}^B = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} \quad \mathcal{Z}^F = \sum_{n=0}^1 e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n} = 1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$

- Yhden tilan suuri potentiaali $\Omega_G = -k_B T \ln \mathcal{Z}$

$$\Omega_G^B = k_B T \ln [1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}] \quad \Omega_G^F = -k_B T \ln [1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}]$$

- Monelle tilalle $r = 1, 2, \dots$: $\mathcal{Z} = \prod_r \mathcal{Z}_r$ ja $\Omega_G = \sum_r \Omega_{G,r}$

$$\Omega_G^B = k_B T \sum_r \ln [1 - e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu)}] \quad \Omega_G^F = -k_B T \sum_r \ln [1 + e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu)}]$$

- Hiukkasten lukumäärä $N = -\left(\frac{\partial \Omega_G}{\partial \mu}\right)_{V,T}$

$$N^B = \sum_r \frac{1}{1 - e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}} \quad N^F = \sum_r \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}}$$

Hiukkasten lukumäärä fluktuoi

Huom: hiukkasten kokonaislukumäärä ei kiinteä

$$N = \sum_r n_r$$

Jokainen n_r saa fluktuoida erikseen kemiallisen potentiaalin mukaisesti

$$\text{Laskettiin } \mathcal{Z} = \sum_{n_1} e^{-\beta(E_1 - \mu n_1)} \dots \sum_{n_r} e^{-\beta(E_r - \mu n_r)}$$

$$= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \overbrace{\left[\sum_N \delta \left(N - \sum_r n_r \right) \right]}^{=1} e^{-\sum_s \beta(E_s - \mu n_s)}$$

$$= \sum_N e^{\beta \mu N} \overbrace{\sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \delta \left(N - \sum_r n_r \right)}^{\text{ei osata laskea}} e^{-\sum_s \beta E_s}$$

$$= \sum_N e^{\beta \mu N} \overbrace{\mathcal{Z}_N(T, V)}^{\text{ei osata laskea!}}$$

Harva kaasu: klassinen raja

► Fermi-Dirac [FD]

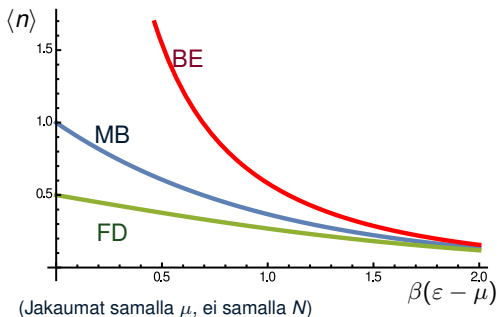
$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp\{\beta(\varepsilon - \mu)\} + 1}$$

Voi olla $\varepsilon < \mu$ tai $\varepsilon > \mu$

► Bose-Einstein [BE]

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp\{\beta(\varepsilon - \mu)\} - 1}$$

Oltava $\varepsilon > \mu$



Harvalle kaasulle $\varepsilon \gg \mu$: molemmista Maxwell-Boltzmann [MB]

$$\langle n \rangle \xrightarrow{\varepsilon \gg \mu} \exp\{-\beta(\varepsilon - \mu)\}$$

(Miehitysluvut kasvavia μ :n funktioita: harva kaasu on siis pieni μ)

Klassiselle ideaalikaasulle tiedettiin jo $N = e^{\beta\mu} Z_1(T, V) \sim e^{\beta\mu}$

Pohdittavaa: mikä on suuren lämpötilan raja $\beta \rightarrow 0$?

Yhteenveto

Käytännön laskuissa loppukurssissa tarvitsemme

Ideaalisen bosoni- ja fermionikaasu

- Sallitut $\mathbf{k}$ -ominaistilat, laskenta

$$f(k) dk = \frac{V}{2\pi^2} g k^2 \quad g = \text{spindegeneraatio, elektronille 2}$$

- Dispersiorelaatio $\varepsilon(\mathbf{k})$; esim. epärelativistinen kaasu

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$$

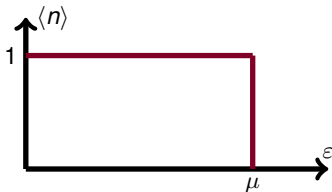
- Fermi-Dirac ja Bose-Einstein-**miehitysluvut**

$$\langle n_{FD}(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{\exp \{ \beta (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \} + 1} \quad \langle n_{BE}(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{\exp \{ \beta (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) \} - 1}$$

Kertovat kuinka monta hiukkasta tällä tilalla on. $\langle n_{FD}(\mathbf{k}) \rangle \leq 1$

Fermionikaasu nollalämpötilassa

$$\langle n_r \rangle = \frac{1}{\exp \{ \beta(\varepsilon_r - \mu) \} + 1} \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} \theta(\mu - \varepsilon_r)$$



Tiedetään tilatiheys ja energia

$$f(k) dk = 2 \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Muuttujanvaihto

$$dk = \frac{\sqrt{m}}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(k) dk = 2 \frac{V}{2\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$$

Saadaan hiukkasten lukumäärä

$$N = 2 \frac{V}{2\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int_0^\mu d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} = \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2} \mu^{3/2} V$$

Muista: aina lasketaan $N(\mu)$, käännetään $\mu(N)$, sijoitetaan $\rightarrow f(\mu)$, missä f on muu fysikaalinen suure. Tarvitaan siis kemiallinen potentiaali

$$\mu(T=0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Fermiliikemäärä, -energia, -lämpötila, ...

Oletetaan fermionisysteemi, jolle tunnetaan N, V **Nollalämpötilassa** laskettiin

$$\mu(T=0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Määritellään ”kylmille” systeemeille hyödylliset ”fermisuureet:”

Fermienergia

$$\varepsilon_F(N, V) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \mu(T=0)$$

Fermiliikemäärä

$$p_F(N, V) = \hbar \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3} \Rightarrow \varepsilon_F(N, V) = \frac{p_F^2}{2m}$$

Ferminopeus

$$v_F(N, V) = p_F/m$$

Fermilämpötila

$$T_F(N, V) = \varepsilon_F/k_B$$

Fermipallo ja fermipinta

Tulkinta kun $T = 0$, hiukkasia on niillä ja vain niillä tiloilla, joiden

- ▶ $\varepsilon \leq \varepsilon_F$
- ▶ $p \leq p_F$
- ▶ $v \leq v_F$

Nämä tilat **p**-avaruudessa muodostavat **fermipallon** $\varepsilon_p < \varepsilon_F$ jonka pinta on **fermipinta** $\varepsilon_p = \varepsilon_F$.

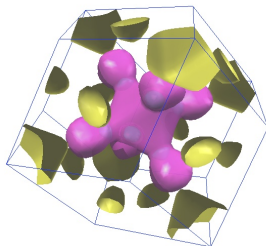
"Kylmä" $\longleftrightarrow$ "kuuma"

$T \lesssim T_F \longleftrightarrow T \gtrsim T_F$

Käytännössä usein fysiikka lähellä fermipintaa.

Kidehila: ei rotaatiosymmetriaa:
Fermipallo ei enää ole pallo, esim:

Cr

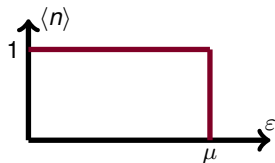


Kromin johdinelektronien fermipinta

T.-S. Choy, J. Naset, J. Chen, S. Hershfield, and C. Stanton, Bulletin of The American Physical Society, 45(1):L36 42, 2000. [URL]

Paine

$$\begin{aligned}\langle n_r \rangle &\stackrel{T=0}{=} \theta(\mu - \varepsilon_r) \\ \Omega_{G,r} &= -k_B T \ln [1 + \exp \{-\beta(\varepsilon_r - \mu)\}] \\ &\stackrel{T=0}{\rightarrow} -(\mu - \varepsilon_r) \theta(\mu - \varepsilon_r)\end{aligned}$$



Käyttäen samaa tilatiheyttä kuin N :lle

$$\begin{aligned}PV &= -\Omega_G \stackrel{T=0}{=} \sum_r (\mu - \varepsilon_r) \theta(\mu - \varepsilon_r) = \frac{m^{3/2} \sqrt{2} V}{\hbar^3 \pi^2} \int_0^\mu d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} (\mu - \varepsilon) \\ &= \frac{m^{3/2} \sqrt{2} V}{\hbar^3 \pi^2} \frac{4}{15} \mu^{5/2} = \frac{2}{5} N \mu\end{aligned}$$

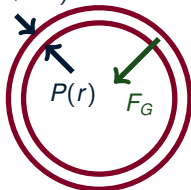
Toisin sanoen $T = 0$ -fermikaasun tilanyhtälö on:

$$P \stackrel{T=0}{=} \frac{2}{5} \frac{N}{V} \mu = \frac{2}{5} \left(3\pi^2\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

- ▶ Kiinteällä N/V paine ei ole $P \sim T \Rightarrow$ ero klassiseen ideaalikaasuun!
- ▶ Paulin kieltoääntö toiminnassa: yritetään puristaa kaasua, tarvitaan energiaa ... mihin?

Tähden stabiilius: paine ja gravitaatio

$P(r + dr)$



- ▶ Tarkastellaan pallokuorta $[r, r + dr]$
- ▶ Kuoren massa $dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr$
- ▶ Kuoren sisällä oleva massa $M(r)$:
gravitaatiovoima $dF_G = -GM(r) dm/r^2$
- ▶ Tämän kompensoi paine-ero
 $P(r) - P(r + dr) = -dF_G/4\pi r^2$
 $\Rightarrow$ paine keskellä suurin, reunalla nolla

Mistä paine syntyy?

- ▶ Tavallinen tähti: kuuma, harva, $\sim$ klassinen plasma
- ▶ Valkoinen kääpiö: kylmä, tiheä $R \sim 0.01 R_\odot$ ($\odot$ =Aurinko)
 - ▶ Varauksen säilyminen: $N_e = N_p$, paine $P \sim (N/V)^{5/3}/m \Rightarrow P_e \gg P_p$
 - ▶ Paineen aiheuttaa degeneroitunut ($T \ll T_F$) **elektronikaasu**
 - ▶ $M \approx 1.4 M_\odot$ **Chandrasekharin raja**
 $\Rightarrow$ elektronikaasun paine ei voita painovoimaa: supernovaräjähdyks
- ▶ Neutronitähti:
 - ▶ Vielä tiheämpi $M \sim M_\odot$ ja $R \sim 10\text{km}$ ($\approx 10^{-5} R_\odot$)
 - ▶ Paine: neutronikaasun degeneraatio + neutronien välinen ydinvoima
- ▶ Huom tässä "kylmä" $T \ll T_F$

Kylmän tähden massa-säde-suhde

Suuruusluokka-arviota varten oletetaan tähdelle

- ▶ Tunnettu massa ja hiukkasten lukumäärä $M \sim N$
- ▶ Tuntematon säde $R \Rightarrow V \sim R^3$
- ▶ Tiheys $\rho = M/V$ sama kaikkialla tähdessä
- ▶ Gravitaatioenergia $E_G \sim -GM^2/R$
- ▶ Kaasun energia $E_g \sim N\varepsilon_F$
- ▶ Epärelativistinen fermikaasu

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \Rightarrow E_g \sim \frac{\hbar^2}{m} N^{5/3} R^{-2}$$

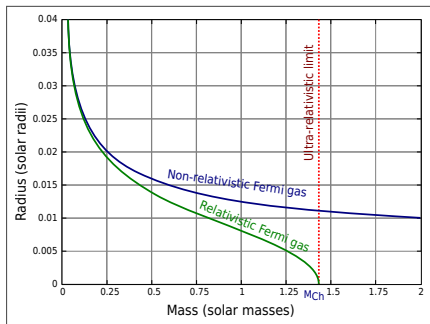
Minimoimalla $E_g + E_G$ saadaan säde $R \sim M^{-1/3}$

- ▶ Relativistinen:

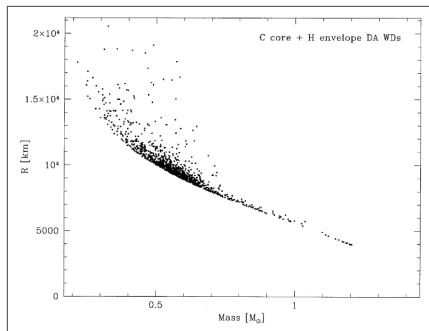
$$\varepsilon_F \sim (N/V)^{1/3} / (\hbar c) \Rightarrow E_g \sim N^{4/3} R^{-1} / (\hbar c)$$

$\Rightarrow$ ei ehtoa V :lle eli R :lle, sen sijaan vain yksi mahdollinen N tai M

Massa-sädesuhde



Lähde: Wikipedia



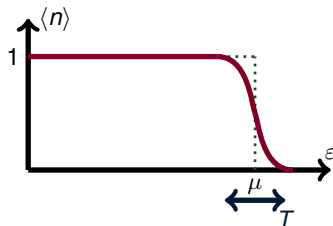
Lähde: A&A 419, L5-L8 (2004)

- ▶ Epärelativistinen kaasu; $R \sim M^{-1/3}$
- ▶ Täysin relativistinen kaasu: kiinteä M
- ▶ Todellinen massa-säderelaatio interpoloi näiden välillä
 - ▶ Iso R , pieni M : tiheys pieni, $\varepsilon_F \ll m_e c^2$, $v_F \ll c$: epärelativistinen oikea
 - ▶ Pieni R , iso M : tiheys suuri, $\varepsilon_F \sim m_e c^2$, $v_F \sim c$: lähellä relativistista
 - ▶ Täysin relativistinen tapaus antaa massan **ylärajan**; tämä on Chandrasekharin raja $M \approx 1.4 M_{\odot}$.

Pieni lämpötila

$$\langle n_r \rangle = \frac{1}{\exp \{ \beta(\varepsilon_r - \mu) \} + 1}$$

Halutaan pienen T :n korjaukset
 $T = 0$ -käytökseen

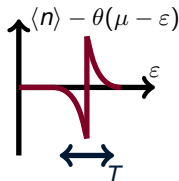


Tarvitaan ns. **Sommerfeldin kehitelmä**

$$\int_0^\infty d\varepsilon \frac{f(\varepsilon)}{\exp \{ \beta(\varepsilon - \mu) \} + 1} \approx \int_0^\mu d\varepsilon f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_\mu + \mathcal{O}(T^4)$$

Kehitelmän johto:

- ▶ $\langle n(\varepsilon) \rangle \neq \theta(\mu - \varepsilon)$ vain $|\varepsilon - \mu| \lesssim k_B T$
- ▶ Kehitetään $f(\varepsilon)$ Taylorin sarjaksi $\varepsilon = \mu$:n ympärillä ja integroidaan termeittäin.



Hiukkastiheys, energia

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int d\varepsilon n_{FD}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} = \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \left(\frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{1}{2\sqrt{\mu}} + \dots \right) \\
 &= \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{T^2}{T_F^2} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

(Korjaustermissä korvattu $\mu(T) \rightarrow \mu(0) = k_B T_F$, virhe korkeampaa kertalukua T :ssä)

Kääntäen

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left(1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{T^2}{T_F^2} + \dots \right)^{-2/3} \approx \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{T^2}{T_F^2} + \dots \right)$$

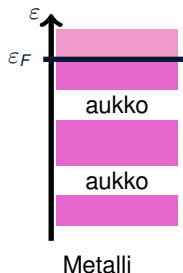
Samoin energia

$$E = \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int d\varepsilon n_{FD}(\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} \varepsilon = \frac{V}{\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \frac{2}{5} \mu^{5/2} \left(1 + \frac{15\pi^2}{4} \frac{T^2}{T_F^2} + \dots \right)$$

Tähän pitää vielä sijoittaa $\mu(T)$, jotta saadaan (HT)

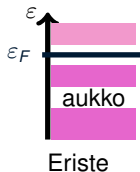
$$E = \frac{2}{5} N \varepsilon_F \left(1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{T^2}{T_F^2} \right) \Rightarrow C_V \sim N k_B \frac{T}{T_F}$$

Sovellus: metallien johtavuuselektronit



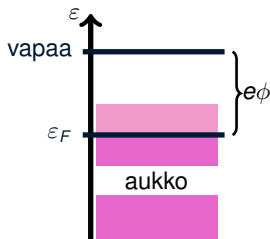
- ▶ Kiinteä aine: elektronien energiatilat ovat **vöitä**
 - ▶ Seuraa jaksollisesta potentiaalista kiteessä
 - ▶ Tarkemmin mat. fys. kurssilla
- ▶ Johde: ylin vyö **osittain** täytetty: johdinelektronit
- ▶ Malli: e - e -vuorovaikutukset merkityksettömiä
 $\Rightarrow$ Johdinelektronit ideaalinen fermionikaasu
- ▶ Johdinelektronien tiheys $\Rightarrow T_F \sim 10000\text{K}$
 $\Rightarrow$ kylmä kaasu

Johdinelektronien kylmä fermikaasu $\Rightarrow$ johteiden $C_V(T) \sim \gamma T$



- ▶ Eriste: fermienergia aukossa
- ▶ Elektronin siirtäminen ylempään vyöhön vaatii liikaa energiaa $\Rightarrow$ ei onnistu pienellä sähkökentällä, lämpötilalla tms.

Laboratoriotyö: terminen elektronin emissio

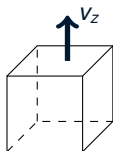


- **Irrotustyötyö:** energiaero fermipinnalta vapaaksi
- Lämmitetään metallia: elektroneja pääsee vapaaksi: terminen elektroniemissio
- Lasketaan virta: tilatiheys

$$\sum_{\text{tilat}} = \int 2V \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 \hbar^3} = \int 2 \frac{Vm^3}{(2\pi)^3 \hbar^3} d^3 \mathbf{v}$$

- Irtoavat elektronit $\varepsilon \gg \mu$: "hännässä"

$$n_{FD}(\varepsilon) \approx \exp\{\beta(\mu - \varepsilon)\}$$



Lasketaan virrantiheys elektroneista, joilla tarpeeksi suuri nopeus z-suuntaan:

$$j = \frac{1}{V} \sum_{\text{tilat } r} e N_e(r) v_z \theta \left(mv_z^2/2 - (\mu + e\phi) \right)$$

Richardson-Dushman-yhtälö: termisen elektroniemission virrantiheys

$$j = \frac{1}{V} \sum_{\text{tilat } r} e N_e(r) v_z \theta \left(\frac{1}{2} m v_z^2 - \mu - e\phi \right)$$

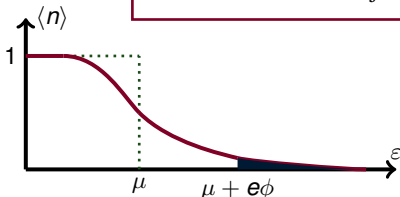
$$= e \frac{2m^3}{(2\pi)^3 \hbar^3} e^{\beta\mu} \int d^3\mathbf{v} e^{-\beta m v^2/2} \theta \left(v_z - \sqrt{2(\mu + e\phi)/m} \right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_x e^{-\beta m v_x^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{m}}$$

$$\int_{\sqrt{2(\mu+e\phi)/m}}^{\infty} dv_z v_z e^{-\beta m v_z^2/2} = \frac{1}{2} \int_{2(\mu+e\phi)/m}^{\infty} dv_z^2 e^{-\beta m v_z^2/2} = \frac{k_B T}{m} e^{-\beta(\mu+e\phi)}$$

⇒

$$\text{Richardson-Dushman: } j = \frac{em}{2\pi^2 \hbar^3} (k_B T)^2 e^{-e\phi/(k_B T)}$$



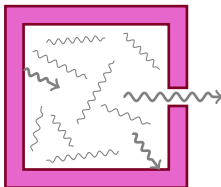
Labratyössä määritetään $e\phi$.

Jakauman hännässä

$\sim e^{-e\phi/k_B T}$ elektronia, joilla

$\epsilon > \mu + e\phi$

Fysikaalinen tilanne, Stefan-Boltzmann



- ▶ Lämmitetään laatikko T
- ▶ Tarkkaillaan aukosta
- ▶ Seinät absorboivat ja emittoivat lämpösäteliyä (fotoneja)
 $\Rightarrow$ Kaasu TDTP:ssä laatikon kanssa:

- ▶ Historiallisesti: pitääkö käsitellä s.m. aaltolina, vai hiukkasina?
- ▶ Fotoneja syntyy ja tuhoutuu jatkuvasti: lukumäärä ei säily
 $\Rightarrow$ ei voida määritellä kemiallista potentiaalia, fotoneille

$$\mu = 0.$$

Kokeellisesti

Stefan-Boltzmann 1879

$$\text{Energia tiheys } u(T) = aT^4$$

$$\text{Intensiteetti } I(T) = \sigma T^4$$

Nykyaikaisin notaatioin

$$a = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3} k_B^4$$

$$\sigma = ac/4$$

Kvanttimekaaninen fotonikaasu

Bosoneja, $\mu = 0$:

$$n_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\{\beta\varepsilon\} - 1} \quad \varepsilon = \hbar\omega$$

Fotonilla 2 spintilaa

$$f(k) dk = 2 \frac{V}{2\pi^2} k^2 \quad \omega = ck \quad \Rightarrow \quad f(\omega) d\varepsilon = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

Lukumäärätiheys

$$dN(\omega) = n_{BE}(\omega) f(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1} d\omega$$

Energia tiheys $u d\omega = \hbar\omega dN(\omega)/V$ eli

$$u(T, \omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1} \quad \text{Planckin säteilylaki (1900)}$$

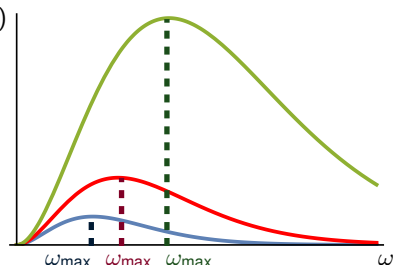
Mustan kappaleen spektri

$$u(T, \omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\{\beta \hbar \omega\} - 1}$$

- ▶ Lämpötila määrää tyypillisen aallonpituuden (värin)

$$\frac{d}{d\omega} u(T, \omega) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\max} \approx 2.882 k_B T$$



Wienin siirtymälaki

Sovelluksia

- ▶ Kuuman kappaleen lämpösäteily
- ▶ Aurinko: $T \approx 6000\text{K}$ (näkyvä valo)
- ▶ Kosminen taustasäteily $\approx 3\text{K}$ (mikroaaltoja)
- ▶ Mustan aukon Hawking-säteily

Fotonikaasun termodynamiikka: Stefan-Boltzmann

$$d\varepsilon = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1} \quad dN = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1}$$

Energiatiheys

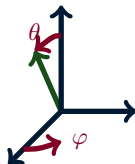
$$\begin{aligned} u &= \int_0^\infty \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{(k_B T)^4}{\hbar^3 c^3} \frac{1}{\pi^2} 6\zeta(4) = \frac{\pi^2}{15} \frac{1}{\hbar^3 c^3} k_B^4 T^4 \Rightarrow \text{Stefan-Boltzmann} \end{aligned}$$

Fotonien lukumäärätiheys

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\{\beta\hbar\omega\} - 1} = \frac{(k_B T^3)}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \frac{2\zeta(2)}{\pi^2} \frac{k_B^3}{\hbar^3 c^3} T^3$$

- Energiassa kulmaintegraali $\int_0^\pi d\theta \sin \theta = 2$
- Intensiteetissä (z-suunta) tämän tilalla
 $c \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta = c/2$

$\Rightarrow$ Intensiteetti on $I = cu/4$.



Fotonikaasun termodynamiikka: paine ja entropia

Tilatiheys

$$\sum_{\text{tilat}} = \int \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$$

Paine

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\Omega_G}{V} = -\frac{k_B T}{V} \sum_{\text{tilat}} \ln [1 - \exp\{-\beta \hbar \omega\}] \\ &= \frac{-k_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \ln [1 - \exp\{-\beta \hbar \omega\}] = \frac{-(k_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty dx x^2 \ln [1 - e^{-x}] \\ &= \frac{(k_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{1}{3} u \end{aligned}$$

Entropiatiheys

$$\begin{aligned} \frac{S}{V} &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega_G}{\partial T} \right)_{V, \mu} \\ &= \frac{P}{T} - \frac{1}{k_B T^2} \frac{d}{d\beta} \sum_{\text{tilat}} \ln [1 - \exp\{-\beta \hbar \omega\}] = \dots = \frac{P + u}{T} \end{aligned}$$

Planck: klassiset rajat

$$u(T, \omega) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\{\beta \hbar \omega\} - 1}$$

- $\omega \ll k_B T / \hbar$, Planckin vakio $\hbar$ katoaa:

$$u(T, \omega) d\omega \approx \overbrace{\left[\frac{1}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega \right]}^{\text{Oskillaattorien lukumäärä}} \times \overbrace{[k_B T]}^{\text{Energian ekvipartitio}} \quad \text{Rayleigh-Jeans-laki}$$

Klassisten sähkömag. aaltojen klassinen termodynamiikka!

Ei voida integroida $\omega = \infty$ asti: ns. ultraviolettikatastrofi

- $\omega \gg k_B T / \hbar$, $\varepsilon = \hbar \omega$

$$u(T, \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \varepsilon^3 \exp\{-\beta \varepsilon\} d\varepsilon$$

Klassisten hiukkasten Maxwell-Boltzmann kaasu!

Planckin vakio jää, niin kuin klassisessa ideaalikaasussakin

Kvanttimekaniikassa hiukkaset $\longleftrightarrow$ aallot

Planck: rajatapauksina sekä klassiset aallot että klassiset hiukkaset

Bosonit matalilla lämpötiloilla

supranestevideo

^4He muuttuu $\sim 2\text{K}$:ssä **suprajuoksevaksi**

- ▶ Faasitransitio, esim. lämpökapasiteetti divergoi
- ▶ Kylmä faasi supraneste: virtaa ilman vastusta.

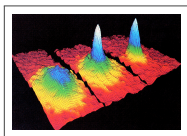
^4He vahvasti vuorovaikuttava neste:

Ideaalinen Bose-kaasu vain kvalitatiivinen kuvaus

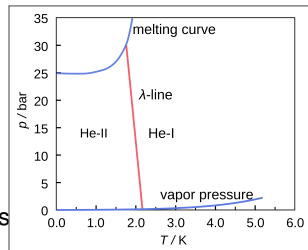
Muita "suprailmiöitä":

- ▶ Myös ^3He suprajuoksevaa!
- ▶ Suprajohtavuus: johdinelektronien Cooperin parit eräänlainen supraneste

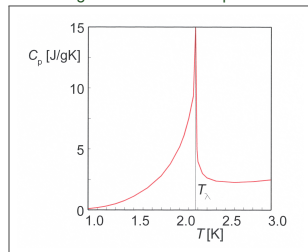
Ideaalikaasun Bose-Einstein-kondensaatti



Nobel 2001 Cornell, Ketterle, Wieman [url](#)
 "Achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms" ...



Faasidiagramma Lähde: Wikipedia



Lämpökapasiteetti Lähde: Wikipedia

Kylmän bosonikaasun tiheys

Lähdetään laskemaan tiheyttä ($\mu < 0$, muuten summa $\mathcal{Z} \sim \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta \mu n}$ ei konvergoi)

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\{\beta(\epsilon - \mu)\} - 1},$$

- N kasvaa, kun μ kasvaa
- N pienenee, kun β kasvaa, eli kun $T \rightarrow 0$

⇒ Jotta N vakio, on kasvatettava μ :ta kun $T \rightarrow 0$

(Muistetaan myös fermioneille $(\partial\mu/\partial T)_N < 0$) Mitä tapahtuu, kun $\mu = 0$?

$$\frac{N_{\max}}{V} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{\exp\{\beta\epsilon\} - 1} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{(k_B T m)^{3/2} \sqrt{2}}{\hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

- Tarvitaan taas ζ -funktiota

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} \sqrt{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(3/2)$$

- Tunnistetaan terminen de Broglie-aallonpituus

$$\frac{N_{\max}}{V} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(k_B T m)^{3/2}}{\hbar^3} \zeta(3/2) = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_D^3(T)}$$

Kriittinen lämpötila

Saatiin "suurin mahdollinen tiheys"

$$\frac{N}{V} \leq \frac{N(\mu = 0)}{V} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{(k_B T m)^{3/2}}{\hbar^3} \zeta(3/2) = \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_D^3(T)} \sim T^{3/2}$$

Fysikaalinen tilanne: kiinteä N/V , jäähdytetään. Nyt kuitenkin näennäisesti

$$T \geq T_c = 2\pi \left(\frac{1}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Mitä tapahtuu kun $T \leq T_c$?

Tarkasteltava erikseen perustila $\varepsilon = 0$, joka ei mukana integraalissa.

Perustilalla $\varepsilon = 0$ on makroskooppinen määrä N_0 hiukkasia

$\Rightarrow$ kondensaatti.

Eli kun $T \leq T_c$, on

$$N_0 = N - \frac{\zeta(3/2)}{\lambda_D^3} \iff \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

Tavalliset hiukkaset ja kondensaatti

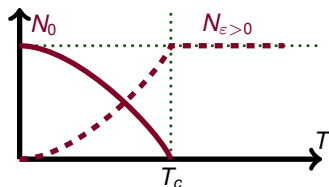
$$T_c = 2\pi \left(\frac{1}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{k_B m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

Kun lämpötila $T < T_c$, kaasussa kaksi komponenttia

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]$$

$$N_{\epsilon > 0} = N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

- Kondensaatti, N_0 hiukkasta
- Tavallinen kaasu, loput



Vrt. Nobel 1962: Landaun "2-nestemalli" suprajuoksevalle ^4He :lle.

Energia ja lämpökapasiteetti

Kondensaatissa ei energiaa, entropiaa. Muualla

$$\begin{aligned} E(\mu = 0) &= \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon} \epsilon d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{V}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (k_B T)^{5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \zeta(5/2) = \frac{V k_B T}{\lambda_D^3} \frac{3}{2} \zeta(5/2) \end{aligned}$$

Lämpökapasiteetti $T < T_c$:llä on ($E \sim T^{5/2} \Rightarrow \partial_T E = (5/2)E/T$)

$$C_V = \frac{5}{2} \frac{V k_B}{\lambda_D^3} \frac{3}{2} \zeta(5/2) = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} k_B N_{\epsilon > 0} = \overbrace{\frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)}}^{1,93} k_B N \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

- $C_V \rightarrow (3/2) N k_B$ kun $T \rightarrow \infty$ tiedetään $C_V/(k_B N)$

($T > T_c$ poikkeama tästä on ylöspäin, voidaan laskea)

- $C_V \rightarrow 0$, kun $T \rightarrow 0$:
Bosonikaasulle hituja kondensaattiin ilman energiaa.

