FYSA242 kevät 2016

Harjoitus 5, lasketaan laskupajassa ke 6.4.2016, palautetaan ma 11.4. klo 10.

1. Osoita, että ideaaliseen spin-1/2-fermionikaasun lämpökapasiteetti rajalla $T \to 0$ on verrannollinen T:hen ja laske kerroin γ kaavassa

$$C_V = \gamma N k_B T / T_F \tag{1}$$

2. Auringon lämpötila on 5780K. Oleta Aurinko ja Maa mustiksi kappaleiksi. Laske Maan lämpötila käyttäen sitä, että Maan absorboima Auringon säteily ja Maan emittoima säteily ovat tasapainossa. Maan säde on $6{,}38 \cdot 10^6$m, Auringon säde $6{,}96 \cdot 10^8$m ja Maan ja Auringon etäisyys $1,50 \cdot 10^{11}$m.

3. Luennoilla osoitettiin, että 3-ulotteisella ideaalisella bosonikaasulla tapahtuu Bose-Einstein-kondensaatio. Esiintyykö tämä ilmiö myös 2-ulotteisella bosonikaasulla? Vihje, tutki miten hiukkastiheys N/V käyttäytyy, kun $\mu \to 0^-$, voidaanko kaikki hiukkaset sijoittaa muille kuin perustilalle?

4. Tarkastellaan Bose-Einstein-kondensaattia harmonisessa potentiaalissa $V(x) = \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$. Nyt yksihiukkastilat eivät ole tasoaaltoja vaan harmonisen oskillaattorin ominaistiloja $\varepsilon = \hbar\Omega(n_x + n_y + n_z)$ (jätämme tässä pois nollapiste-energiat) ja hiukkasten lukumäärä on:

$$N = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{1}{\exp\{\beta\hbar\Omega(n_x + n_y + n_z) - \beta\mu\} - 1} \tag{2}$$

Tarkastelemme rajaa jossa harmoninen loukku on suuri eli $\Omega \to 0$ ja summat n_x, n_y ja n_z:n yli voidaan korvata integraaleilla (tämä vastaa sitä, miten rajalla $V \to \infty$ summa aaltomoodien yli korvataan integraalilla).

(a) Kirjoita N käyttäen tuttua geometrisen summan kaavaa

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}, \quad x > 0 \tag{3}$$

ja integroiden n_x, n_y ja n_z:n yli osoita, että kondensaatin ulkopuolella olevien hiukkasten lukumäärä on

$$N_{\varepsilon \neq 0}(\mu = 0) = \left(\frac{k_B T}{\hbar\Omega}\right)^3 \zeta(3) \tag{4}$$

(b) Mikä on nyt kriittinen lämpötila Bose-Einstein-kondensaatiolle?

5. Fugasiteetin $z = e^{\mu\beta}$ avulla Fermi-Dirac (ylemmät etumerkit) ja Bose-Einstein (alemmat etumerkit) paine ja lukumäärätiheys voidaan kirjoittaa

$$P = \pm k_B T C \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln\left[1 \pm z e^{-\beta\varepsilon}\right] \quad \frac{N}{V} = C \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1 \pm z e^{-\beta\varepsilon}}, \quad C = \frac{g}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \tag{5}$$

Laske P ja N/V klassisen kaasun rajalla $z \to 0$ termiin z^2 asti. Laske näiden avulla toinen termi $a_2(T)$ kaasun tilanyhtälön viriaalikehitelmässä

$$P = k_B T \left[\frac{N}{V} + a_2(T) \left(\frac{N}{V}\right)^2 + \ldots\right] \tag{6}$$

Tulkitse saamasi tuloksen etumerkkiä bosonien ja fermionien tapauksessa.

FYSA242 spring 2016

Exercise 5, discussed in exercise sessions Wed April 4th, return Mon April 11th at 10AM to the box outside FYS1.

1. Show that the specific heat of an ideal spin-1/2-fermion gas is the limit $T \to 0$ is proportional to T and calculate the coefficient γ in the equation

$$C_V = \gamma N k_B T / T_F \tag{7}$$

2. The Sun's surface temperature is 5780K. Assume that both the Sun and the Earth are ideal black bodies. Calculate the temperature of the Earth using the fact that the intensity of the Sun's radiation absorbed by the Earth and the radiation emitted by the Earth are in equilibrium. The radius of the Earth is $6.38 \cdot 10^6$m, the radius of the Sun $6.96 \cdot 10^8$m and the distance between the Earth and the Sun $1.50 \cdot 10^{11}$m.

3. In the lectures we showed that an ideal Bose gas exhibits Bose-Einstein condensation. Does this phenomenon also happen in a 2-dimensional Bose gas? Hint: study how the number density of the gas N/V behaves as $\mu \to 0^-$, can all the particles in the gas be placed oudside of the ground state?

4. Let us consider a Bose-Einstein condensate in a harmonic trap $V(x) = \frac{1}{2} m \Omega^2 x^2$. Now the one particle states are not plane waves but eigenstates of a harmonic oscillator $\varepsilon = \hbar\Omega(n_x + n_y + n_z)$ (we leave out the zero point energies for simplicity here) and the number of particles is:

$$N = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \frac{1}{\exp\{\beta\hbar\Omega(n_x + n_y + n_z) - \beta\mu\} - 1} \tag{8}$$

We consider the limit where the harmonic trap is large, i.e. $\Omega \to 0$ and the sums over n_x, n_y and n_z can be replaced by integrals (this corresponds to the way the sum over plane waves is replaced by an integral in the limit $V \to \infty$).

(a) Write N using the geometric series formula

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}, \quad x > 0 \tag{9}$$

and by integrating over n_x, n_y and n_z show that the number of particles outside the condensate is

$$N_{\varepsilon \neq 0}(\mu = 0) = \left(\frac{k_B T}{\hbar\Omega}\right)^3 \zeta(3) \tag{10}$$

(b) What is now the critical temperature for Bose-Einstein condensation?

5. In terms of the fugacity $z = e^{\mu\beta}$ the Fermi-Dirac (upper signs) and the Bose-Einstein (lower signs) pressure and number density can be written as

$$P = \pm k_B T C \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln\left[1 \pm z e^{-\beta\varepsilon}\right] \quad \frac{N}{V} = C \int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{z e^{-\beta\varepsilon}}{1 \pm z e^{-\beta\varepsilon}}, \quad C = \frac{g}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \tag{11}$$

Calculate P and N/V in the classical gas limit $z \to 0$ up to the z^2 terms. Use these results to calculate the second term $a_2(T)$ in the virial expansion for the equation of state

$$P = k_B T \left[\frac{N}{V} + a_2(T) \left(\frac{N}{V}\right)^2 + \ldots\right] \tag{12}$$

Discuss the sign of $a_2(T)$ in the case of bosons and fermions.