

FYSA242 kevät 2016

Harjoitus 4, lasketaan laskupajassa ke 30.3.2016, palautetaan ma 4.4. klo 10.

1. Laske kaksikulotteisen fermionikaasun fermiliikemäärä p_F sekä paine ja energia nollalämpötilassa hiukkasten lukumäärän N ja kaasun tilavuuden (eli pinta-alan) funktiona. Tarkista, että $-PV = E - \mu N$.
2. Tarkastellaan relativistista fermionikaasua (spin-1/2-hiukkasia), jolle siis $E(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}| = c\hbar|\mathbf{k}|$. Kaasu on nollalämpötilassa, ja siinä on N hiukkasta tilavuudessa V . Laske kaasun fermienergia, sisäenergia ja paine N :n ja V :n funktiona.

3. Elektroneilla on magneettinen momentti μ_B , joten ulkoisessa magneettikentässä elektronin energia on $\varepsilon_{\mathbf{k}} \pm \mu_B B$, missä etumerkit vastaavat eri spintiloja ja $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ on liike-energia. Tällöin spintilojen miehitysluvut ovat $n_{\pm} = (1 + e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp \mu_B B - \mu)})^{-1}$. Osoita, että nollalämpötilassa elektronikaasun magneetoituma on

$$M = \mu_B(N_+ - N_-) = \frac{3}{2}N \frac{\mu_B^2 B}{\varepsilon_F}, \quad (1)$$

missä $N = N_+ + N_-$ ja voit olettaa että $\mu_B B \ll \varepsilon_F$. Tämä on ns. Paulin paramagnetismia. Kurssin A-osalla johdettiin pienellä B :llä magneetoitumalle kaava (Curien laki)

$$M \approx N \frac{\mu_B^2 B}{k_B T}. \quad (2)$$

Olettaen, että kullalla (Au) on yksi johdinelektroni atomia kohti, laske näiden johdinelektronien ε_F ja T_F ja vertaa Paulin ja Curien paramagnetismien voimakkuutta.

4. Osoita, että epärelativistisista fermioneista koostuvalle tähdelle nollalämpötilassa $R \sim M^{-1/3}$, olettaen että tähden tiheys on sama kaikkialla tähdessä. Tässä ei siis tarvitse laskea tarkkaa riippuvuutta, vaan käyttää luennoilla esitettyjä suuruusluokka-arvioita
5. Johdetaan approksimaatio Chandrasekharin rajalle. Tarkastellaan valkoista kääpiötähteä, joka koostuu elektronikaasusta ja atomytimistä, joiden massaluku on A ja varaus Ze . Oletamme, että tähden lämpötila on nolla, elektronit ovat massattomia ja että tähden paine koostuu pelkästään elektronikaasun paineesta.

- (a) Tarkastellaan säteen r etäisyydellä tähden keskipisteestä olevaa ohutta pallokuorta. Osoita, että kuoreen kohdistuva painovoima kumoaa kuoren ulko- ja sisäpuolien välisen paine-eron $P(r + dr) - P(r)$, kun

$$-GM(r)\rho(r) = r^2 \partial_r P(r), \quad (3)$$

missä ρ on tähden aineen massatiheys ja $M(r)$ taas r -säteisen pallokuoren sisäpuolella oleva kokonaismassa

$$M(r) = \int_0^r ds 4\pi s^2 \rho(s) \quad (4)$$

- (b) Käyttäen tehtävän 2 tuloksia ja sitä, että tähden aine on sähköisesti neutraalia (atomytimien varaustiheys on sama kuin elektronien) lausu paine P ja massatiheys ρ elektronien kemiallisen potentiaalin μ avulla.
- (c) Käyttäen yhtälöitä (3) ja (4) osoita, että kemiallinen potentiaali toteuttaa yhtälön

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \mu(r)) = -C \mu^3(r). \quad (5)$$

Mikä on kerroin C ? Tee yhtälöön muuttujanvaihto $\xi = r\sqrt{C}$, jolloin tuloksena on Lane-Emden yhtälö

$$\frac{1}{\xi^2} \partial_{\xi} (\xi^2 \partial_{\xi} \mu(\xi)) = -\mu^3(\xi). \quad (6)$$

Tämän yhtälön ratkaisulla on nollakohta ξ_1 , jolle pätee $-\xi_1^2 \mu'(\xi_1) = 2.018$. Käyttäen yhtälöä (3) saat tästä tähden massan eli funktion $M(r)$ arvon kohdassa, jossa $\rho(r) = P(r) = \mu(r) = 0$. Vertaa auringon massaan, jos tähden atomytimet ovat hiiltä $A = 12, Z = 6$.

FYSA242 spring 2016

Exercise 4, discussed in exercise sessions Wed March 30th, return Mon April 4th at 10AM to the box outside FYSI.

1. Calculate the Fermi momentum p_F and the pressure and energy at zero temperature for a two-dimensional fermion gas. Express your results as a function of the number of particles N and the volume (area) of the gas. Check that $-PV = E - \mu N$.
2. Consider an ultrarelativistic fermion gas (spin-1/2 particles), i.e. a gas of particles with $E(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}| = c\hbar|\mathbf{k}|$. The gas is at zero temperature and it has N particles in a volume V . Calculate the Fermi energy, internal energy and the pressure of the gas as a function of N and V .
3. Electrons have a magnetic moment μ_B , so that in an external magnetic field the energy of an electron is $\varepsilon_{\mathbf{k}} \pm \mu_B B$, where the signs correspond to different spin states and $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ is the kinetic energy. The occupation numbers of the different spin states are $n_{\pm} = (1 + e^{\beta(\varepsilon_{\mathbf{k}} \mp \mu_B B - \mu)})^{-1}$. Show that at zero temperature the magnetization of the electron gas is

$$M = \mu_B(N_+ - N_-) = \frac{3}{2}N \frac{\mu_B^2 B}{\varepsilon_F}, \quad (7)$$

where $N = N_+ + N_-$ and you may assume $\mu_B B \ll \varepsilon_F$. This is the so called Pauli paramagnetism. In the A-part of the course one derives (at small B) the Curie law for the magnetization

$$M \approx N \frac{\mu_B^2 B}{k_B T}. \quad (8)$$

Assuming that gold(Au) only has one conduction electron per atom, calculate the Fermi energy ε_F and temperature T_F of these conduction electrons, and compare the strengths of the Pauli ja Curie paramagnetisms.

4. Show that for a star consisting of nonrelativistic fermions at zero temperature the radius R and mass M of the star are related as $R \sim M^{-1/3}$. You may assume that the density is the same everywhere in the star. Here you do not need to calculate the coefficient, the parametric dependence is enough.
5. Let us derive an approximation for the Chandrasekhar limit. Consider a white dwarf star consisting of an electron gas and atomic nuclei, with mass number A and charge Ze . We assume that the temperature of the star is zero, that electrons are massless and that the pressure of the star consists of only the electron gas pressure.

- (a) Consider an infinitesimal spherical shell at radius r from the center of the star. Show that the gravity acting on the shell compensates the pressure difference between the outer and inner edges of the shell $P(r + dr) - P(r)$, when

$$-GM(r)\rho(r) = r^2 \partial_r P(r), \quad (9)$$

where ρ is the mass density and $M(r)$ is the total mass inside a sphere of radius r

$$M(r) = \int_0^r ds 4\pi s^2 \rho(s) \quad (10)$$

- (b) Using the results from exercise 2 and the fact that the matter inside the star is electrically neutral express the pressure P and the mass density ρ in terms of the electron chemical potential μ .
- (c) Using equations (9) and (10) show, that the chemical potential satisfies

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \mu(r)) = -C \mu^3(r). \quad (11)$$

What is the coefficient C ? Make a change of variables $\xi = r\sqrt{C}$ to get the Lane-Emden equation

$$\frac{1}{\xi^2} \partial_{\xi} (\xi^2 \partial_{\xi} \mu(\xi)) = -\mu^3(\xi). \quad (12)$$

The solution of this equation has a zero $\mu(\xi_1) = 0$, for which $-\xi_1^2 \mu'(\xi_1) = 2.018$. Using equation (9) this equation will give you the mass of the star, i.e. the value of the function $M(r)$ at the place where $\rho(r) = P(r) = \mu(r) = 0$. Compare to the mass of the sun, if the atomic nuclei in the star are carbon $A = 12, Z = 6$.